Absolutní (globální) extrémy spojité funkce jedné proměnné na uzavřeném omezeném intervalu.

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Výpočet absolutních extrémů vychází z následujícího tvrzení III.4.2.9 - viz literatura [1]:

Věta (o existenci maxima a minima). Spojitá funkce v uzavřeném omezeném intervalu $I = \langle a, b\rangle$ nabývá v tomto intervalu svého maxima i minima.

Dodatek: Maxima (resp. minima) je nabýváno v bodě, který je buď

(1) krajním bodem daného intervalu nebo

(2) vnitřním bodem, ve kterém je derivace $f'(x)$ rovna nule nebo

(3) vnitřním bodem, ve kterém derivace neexistuje.

Takto určené body tedy můžeme nazvat kritickými ("podezřelými"), v jiných bodech být extrém nemůže. Při splněných předpokladech pak stačí určit největší a nejmenší z funkčních hodnot v těchto bodech.

Př. Je dána funkce $f : f(x) = x\sqrt{2x + 3}$.

a) Zdůvodněte existenci absolutních extrémů této funkce v intervalu $I = \langle -\frac{3}{2}, 1\rangle$.

b) Určete tyto absolutní extrémy (tj. stanovte polohu extrémů, jejich typ a hodnotu).

Řešení: a) Daný interval je uzavřený a omezený. Daná funkce je v něm spojitá, neboť $I \subset D(f) = \langle -\frac{3}{2}, \infty)$. Tím je zaručena existence největší i nejmenší hodnoty dané funkce v daném intervalu.

b) Ve všech vnitřních bodech daného intervalu má funkce f derivaci $f'(x) = \sqrt{2x + 3} + \dfrac{x}{\sqrt{2x + 3}}$.

Rovnice $f'(x) = 0$ má jediný kořen $x = -1$, který leží v daném intervalu. Spolu s krajními body intervalu I tak máme pouze tři kritické body, ve kterých daná funkce může nabývat absolutního extrému. V některém z nich je extrému nabýváno. Pro určení absolutních extrémů tedy stačí vypočítat funkční hodnoty v těchto kritických bodech a z těchto hodnot určit největší, resp. nejmenší. Vhodná je např. forma tabulky.

Závěr: V daném intervalu je max $f = f(1) = \sqrt{5}$, min $f = f(-1) = -1$.

V následujících pěti úlohách

a) Zdůvodněte existenci absolutních extrémů dané funkce f na intervalu I.

b) Absolutní extrémy určete (tj. polohu extrémů, jejich typ a hodnotu).

1. $f(x) = \ln(2x + 1) - \dfrac{x}{2}$. $\quad I = \langle 0, 10\rangle$

2. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $\quad I = \langle 0, 2\rangle$ $\quad$ [Výsl.: Max=$f(2) = 13$, Min=$f(1) = 4$]

3. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \sqrt{5 - x^2}$ $\quad I = \langle -2, 2\rangle$ $\quad$ [Max=$f(\pm 2) = 3$, , Min=$f(0) = \sqrt{5}$]

4. $f(x) = 2\sqrt{x - 1} - x + 2$, $\quad I = \langle 1, 5\rangle$ $\quad$ [Max=$f(2) = 2$, Min=$f(1) = f(5) = 1$]

5. $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x} - 16$, $\quad I = \langle 1, 4\rangle$ $\quad$ [Výsl.: Max=$f(4) = 4$, Min=$f(2) = -4$]

Další příklady k samostatnému počítání najdete v níže uvedených skriptech, včetně kapitoly Úlohy ze zkoušek v uvedené Sbírce příkladů z Matematiky I. V této sbírce najdete i úlohy řešené.

Doporučená literatura k tomuto tématu:

[1] J. Neustupa: **Matematika I.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2013.

[2] S.Kračmar, F. Mráz, J.Neustupa: **Sbírka příkladů z Matematiky I**. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2013.

[3] E. Brožíková, M. Kittlerová: **Diferenciální počet funkcé jedné proměnné** (řešené příklady). Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2007.