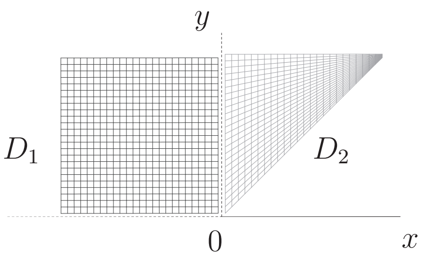
II. Diferenciální počet funkcí více proměnných

II.1. Definiční obor funkce $z = f(x, y)$

• Určete definiční obor funkcí a zakreslete jej :

***Příklad* 42**. $z = \dfrac{\ln(x^2y)}{\sqrt{y-x}}$

Řešení : Proměnné x a y musí splňovat současně tyto podmínky :

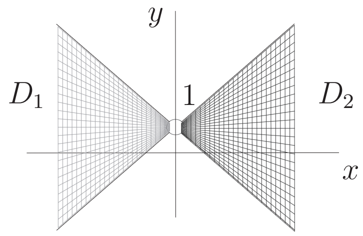


$$x^2y > 0 \implies y > 0, \quad x \neq 0$$
$$y - x > 0 \implies y > x$$
$$D_1 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x < 0, y > 0\},$$
$$D_2 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x > 0, y > x\}.$$

Pro definiční obor dané funkce dostaneme $D = D_1 \cup D_2$ ■

***Příklad* 43**. $z = \arcsin \dfrac{y-1}{x}$

Řešení :



Proměnné x a y musí splňovat současně tyto podmínky :

$$-1 \leq \frac{y-1}{x} \leq 1 \quad \text{a} \quad x \neq 0 \ .$$

Takže platí : $x > 0 : \quad -x \leq y - 1 \leq x \implies -x + 1 \leq y \leq x + 1$

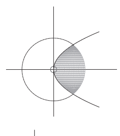
$x < 0 : \quad -x \geq y - 1 \geq x \implies -x + 1 \geq y \geq x + 1$

$D_1 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x < 0, \quad x + 1 \leq y \leq 1 - x\},$

$D_2 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x > 0, \quad 1 - x \leq y \geq x + 1\}.$

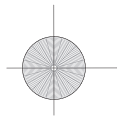
Pro definiční obor dané funkce dostaneme $D = D_1 \cup D_2$. ■

44. $z = \dfrac{\sqrt{x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$



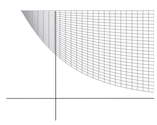
$[D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : 0 \neq x^2 + y^2 < 1; \ x \geq y^2\} \ ]$

45. $z = \sqrt{\ln \dfrac{16}{x^2 + y^2}}$



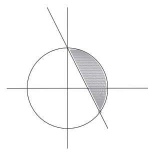
$[D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 16, \ [x, y] \neq [0, 0]\}]$

46. $z = 3 - 7 \ln(x + \ln y)$



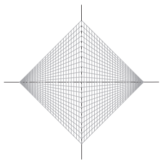
$[D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : y > \mathrm{e}^{-x}\}]$

47. $z = \sqrt{2x + y - 4} + \sqrt{16 - x^2 - y^2}$



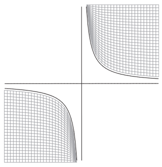
$[D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 16; \ y \geq 4 - 2x\}]$

48. $z = \dfrac{3}{\sqrt{1 - |x| - |y|}}$



$[D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : |x| + |y| < 1\}]$

49. $z = \sqrt{xy - 4}$



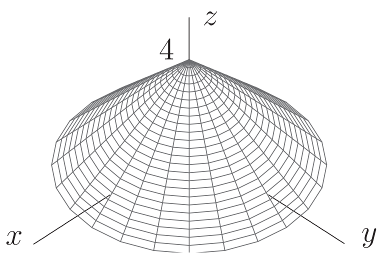
$[D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : xy \geq 4\}]$

• Určete a načrtněte definiční obor, zapište graf funkce a načrtněte v $\mathbb{E}_3$ plochu, která je grafem dané funkce :

***Příklad* 50**. $f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$

Řešení :

$$x^2 + y^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \geq 0\} \quad \Rightarrow \quad D(f) = \mathbb{E}_2$$

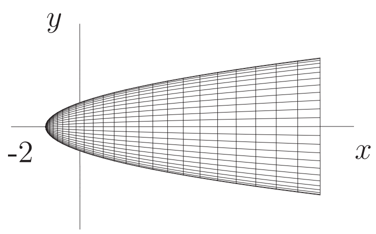


Grafem funkce je množina
$\mathrm{gr}\,(f) = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; [x, y] \in D_f,\ z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

■

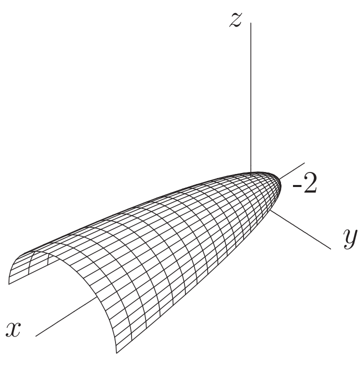
***Příklad* 51**. $f(x, y) = \sqrt{x - y^2 + 2}$

Řešení :



$x - y^2 + 2 \geq 0 \quad \Rightarrow$
$D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x - y^2 + 2 \geq 0\}$.

Hranicí $D(f)$ je parabola o rovnici $x+2 = y^2$ s osou v ose x a vrcholem $[-2, 0]$.

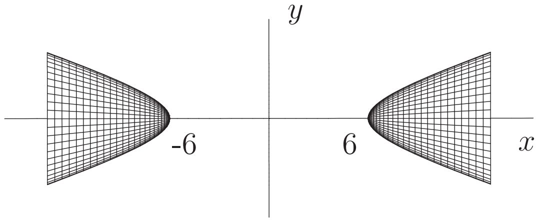


Grafem funkce je množina
$\mathrm{gr}\,(f) =$
$=\{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; [x, y] \in D_f \subset \mathbb{E}_2,\ z = \sqrt{x - y^2 + 2}\}$,
což je "horní"polovina rotačního paraboloidu o rovnici $x + 2 = y^2 + z^2$ s osou rotace v ose x a vrcholem $[-2, 0, 0]$.

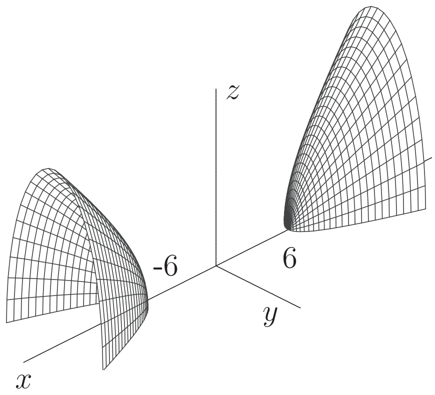
■

***Příklad* 52**. $f(x,y) = \sqrt{x^2 - 9y^2 - 36}$

Řešení :



$x^2 - 9y^2 - 36 \geq 0 \quad \Rightarrow$
$D(f) = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2; x^2 - 9y^2 - 36 \geq 0\}$,
hranicí je hyperbola o rovnici $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{4} = 1$
s vrcholy $[-6,0]$ a $[6,0]$



Grafem funkce je množina
gr $(f) =$
$= \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3; [x,y] \in D(f) \subset \mathbb{E}_2,\ z = \sqrt{x^2 - 9y^2 - 36}\}$
a to je "horní"polovina eliptického dvoudílného hyperboloidu s vrcholy $[-6,0,0]$ a $[6,0,0]$ ■

II.2. Limita a spojitost funkce

• Vyšetřete limity funkce v bodě :

***Příklad* 53**. $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

Řešení : Využijeme skutečnost, že $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} (x^2+y^2) = 0$ a provedeme substituci

$t = x^2 + y^2$. Potom $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ ■

***Příklad* 54**.* $\displaystyle\lim_{\substack{[x,y]\,\to\,[1,1]\\ [x,y]\,\in\,\mathrm{M}}} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$, $[x,y] \in \mathrm{M}$, kde $\mathrm{M} = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\ ;\ x - y \neq 0\}$

Řešení : Jde o neučitý výraz "$\frac{0}{0}$", ale nabízí se elementární úprava, kterou provedeme

$$= \lim_{\substack{[x,y]\,\to\,[1,1]\\ [x,y]\,\in\,\mathrm{M}}} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4} = \lim_{\substack{[x,y]\,\to\,[1,1]\\ [x,y]\,\in\,\mathrm{M}}} \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)} =$$

$$\lim_{\substack{[x,y]\,\to\,[1,1]\\ [x,y]\,\in\,\mathrm{M}}} \frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{3}{4}.$$ ■

55. $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\mathrm{e}^{2(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2}$ $[2]$

56. $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\mathrm{tg}\,(x^2+y^4)}{3(x^2+y^4)}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

***Příklad* 57**. Vyšetřete spojitost funkce $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^2y^2+1}-1}, & [x,y] \neq [0,0] \\ 2, & [x,y] = [0,0] \end{cases}$

v bodě $[0,0]$.

Řešení : Funkce $f(x,y)$ je spojitá v bodě $[x_0,y_0]$, právě když $\lim\limits_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

V našem případě $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^2y^2+1}-1} = „\frac{0}{0}" = \left| \begin{matrix} \text{substituce} \\ x^2y^2 = t \end{matrix} \right| = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{\sqrt{t+1}-1} \overset{\ell'\mathrm{H}}{=}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{\frac{1}{2\sqrt{t+1}}} = 2 = f(0,0) \Longrightarrow$ daná funkce $f(x,y)$ je spojitá v bodě $[0,0]$. ■

• Určete množiny, na nichž jsou dané funkce definované :

58. $f(x,y) = \dfrac{x^2+x-12}{x^2+y^4+1}$ $[\mathbb{E}_2]$

59. $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{z^2+x} \cdot \sin(x+y)$ $[\mathbb{E}_3]$

60. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2-2y}$ $[D(f) = \mathbb{E}_2 \setminus \{y = \frac{x^2}{2}\}]$

61. $f(x,y) = \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$ $[D(f) = \mathbb{E}_2 \setminus [0,0]$, lze spojitě dodefinovat $f(0,0) = \lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0]$

62. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\ln\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$ $[D(f) = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : x^2+y^2+z^2 \neq 1\} \setminus \{[0,0,0]\}]$

63. $f(x,y,z) = \dfrac{\sin{(x^2+y^2+z^2)}^2}{x^2+y^2+z^2}$ $[D(f) = \mathbb{E}_3 \setminus [0,0,0]$, lze spojitě dodefinovat $f(0,0,0) = 0$]

64. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{|xy|+|z|}$ $[D(f) = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : xy \neq 0 \wedge z \neq 0]$

65. $f(x,y,z) = \dfrac{y+4}{x^2y-xy+4x^2-4x}$ $\Big[D(f) = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : x \neq 0, x \neq 1, y \neq -4\}]$

II.3. Parciální derivace funkce

Značení pro funkci $z = f(x,y)$:

1. parciální derivace : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y) = z_x = \dfrac{\partial z}{\partial x}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_y(x,y) = z_y = \dfrac{\partial z}{\partial y}$

1. parciální derivace v bodě $[a,b]$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{[a,b]} = f_x(a,b); \quad \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{[a,b]} = f_y(a,b)$$

2. parciální derivace : $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}; \quad \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = (f_x)_y; \quad \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = (f_y)_x$$

• Najděte parciální derivace prvního řádu daných funkcí podle jejich proměnných .

***Příklad* 66**. $f(x,y) = (2x-3y)^4$

Řešení : $f_x = 4(2x-3y)^3 \cdot 2 \quad , \quad f_y = 4(2x-3y)^3 \cdot (-3)$ ■

***Příklad* 67**. $f(x,y) = 5x^4y^2 + \dfrac{x}{y} + 2x^2 - 3y$

Řešení : $f_x = 20x^3y^2 + \dfrac{1}{y} + 4x \quad , \quad f_y = 10x^4y - \dfrac{x}{y^2} - 3$ ■

***Příklad* 68**. $f(x,y) = y^{x^2+3}, \quad y > 0$

Řešení : $f_x = y^{x^2+3} \cdot \ln y \cdot 2x \quad , \quad f_y = (x^2+3) \cdot y^{x^2+2}$ ■

***Příklad* 69**. $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}, \quad \text{pro } |x| > |y|$

Řešení : $f_x = y \cdot \dfrac{-2x}{2(x^2-y^2)^{3/2}} = \dfrac{-xy}{(x^2-y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$

$$f_y = \frac{\sqrt{x^2-y^2} - y \cdot \dfrac{-2y}{2\sqrt{x^2-y^2}}}{x^2-y^2} = \frac{x^2-y^2+y^2}{(x^2-y^2)\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{x^2}{(x^2-y^2)\sqrt{x^2-y^2}}.$$ ■

***Příklad* 70**. $f(x,y,z) = (x^y)^z$

Řešení : $f(x,y,z) = x^{yz}, \quad f_x = yzx^{yz-1}, \quad f_y = x^{yz} \cdot \ln x \cdot z, \quad f_z = x^{yz} \cdot \ln x \cdot y\ .$ ■

• Vypočítejte parciální derivace dané funkce podle všech proměnných:

71. $f(x,y) = \ln(3x-y+2)$ $\quad [f_x = \dfrac{3}{3x-y+2},\ f_y = \dfrac{-1}{3x-y+2}]$

72. $f(x,y) = \dfrac{3x-2y}{y}$ $\quad [f_x = \dfrac{3}{y},\ f_y = -\dfrac{3x}{y^2}]$

73. $f(x,y) = \ln(xy^2)$ $\quad [f_x = \dfrac{1}{x},\ f_y = \dfrac{2}{y}]$

74. $f(x,y) = \cos x + \dfrac{1}{2}\sin y - 3$ $\quad [f_x = -\sin x,\ f_y = \dfrac{1}{2}\ \cos y]$

75. $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x}} - x\,\sqrt{y}$ $\quad [f_x = \dfrac{-y}{2\cdot\sqrt{x^3}} - \sqrt{y},\ f_y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{x}{2\cdot\sqrt{y}}]$

76. $f(x,y) = (x^2+y)\,\mathrm{e}^{-2x}$ $\quad [f_x = 2x\,\mathrm{e}^{-2x} - 2(x^2+y)\,\mathrm{e}^{-2x},\ f_y = \mathrm{e}^{-2x}]$

77. $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{2} + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ $\quad [f_x = \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{y}{x^2+y^2},\ f_y = xy + \dfrac{x}{x^2+y^2}]$

78. $f(x,y) = \ln(xy) - \sqrt{x^2+y^2-20}$ $\quad [f_x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2-20}},\ f_y = \dfrac{1}{y} - \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2-20}}]$

79. $f(x,y) = x^3 + \dfrac{y^3}{3} - \dfrac{1}{6}\,x^2y^4 - 15x$ $\quad [f_x = 3x^2 - \dfrac{1}{3}\,xy^4 - 15,\ f_y = y^2 - \dfrac{2}{3}\,x^2y^3]$

80. $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ $\quad [f_x = \dfrac{-2xy^2}{(x^2+y^2)^2},\ f_y = \dfrac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}]$

81. $f(\varphi,\psi)=\sin\varphi\cdot\cos\psi$ $\quad[f_\varphi=\cos\varphi\,\cos\psi,\ f_\psi=-\sin\varphi\,\sin\psi]$

82. $g(u,v)=v\cdot\operatorname{tg}(u^2v^3)$ $\quad[g_u=\dfrac{2u\,v^4}{\cos^2(u^2v^3)},\ g_v=\operatorname{tg}(u^2\,v^3)+\dfrac{3u^2\,v^3}{\cos^2(u^2v^3)}]$

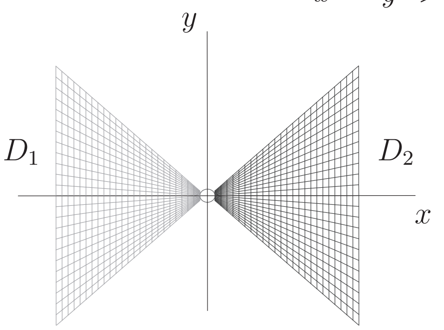
83. $f(t,u,v)=\ln(tu)-\mathrm{e}^{uv}+\cos(tv)$ $\quad[f_t=\dfrac{1}{t}-v\,\sin(tv),\ f_u=\dfrac{1}{u}-v\,\mathrm{e}^{uv},\ f_v=-u\,\mathrm{e}^{uv}-t\,\sin(tv)]$

***Příklad* 84**. Určete obor diferencovatelnosti funkce $f(x,y)=x\sqrt{x^2-y^2}$.

Řešení : $\quad f_x=\sqrt{x^2-y^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-y^2}},\qquad f_y=\dfrac{-xy}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

Z teorie víme, že spojitost parciálních derivací je postačující pro diferencovatelnost funkcí. V tomto příkladě je to podmínka:

$$x^2-y^2>0\implies |y|<|x|.$$



$$D_1=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2: x<0, y\in(x,-x)\},$$
$$D_2=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2: x>0, y\in(-x,x)\}\ .$$

■

***Příklad* 85**. Je dána funkce $f(x,y)=\ln(|x|+y)+\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$. Určete

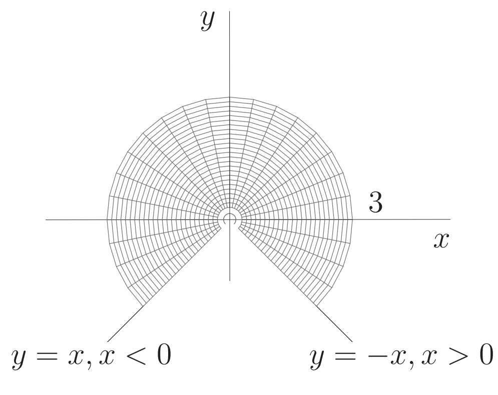
a) podmínky pro definiční obor a defiční obor graficky znázorněte,

b) hodnotu $f(A)$, kde $A=[-1,2]$, $\qquad$ c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)$.

Řešení :

a) podmínky pro definiční obor:

$$|x|+y>0\Longrightarrow y>-|x|$$
$$9-x^2-y^2>0\Longrightarrow x^2+y^2<9$$



b) $f(-1,2)=\ln(|-1|+2)+\dfrac{1}{\sqrt{9-1-4}}=\ln 3+\dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)=\Big(\dfrac{(-x)'}{|x|+y}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-2x}{\sqrt{(9-x^2-y^2)^3}}\Big)\Big|_A=-\dfrac{11}{24}.$ ■

86. Dokažte, že funkce $z=f(x,y)=y^2\sin(x^2-y^2)$ vyhovuje diferenciální rovnici $y^2z_x+xyz_y=2xz$ $\;$ pro všechna $[x,y]\in\mathbb{E}_2$.

[*Návod :* Stačí spočítat z_x, z_y a do rovnice dosadit]

• Vypočtěte parciální derivace dané funkce v bodě A :

87. $z = \sqrt{x^2 - y^2}, \quad A = [2, 0]$ $\quad [z_x(A) = 1,\ z_y(A) = 0]$

88. $z = \dfrac{y}{x}, \quad A = [3, 2]$ $\quad [z_x(A) = -2/9,\ z_y(A) = 1/3]$

89. $f = x^2 \mathrm{e}^y \sin z, \quad A = [1, 0, \pi/6]$ $\quad [f_x(A) = 1,\ f_y(A) = 1/2,\ f_z(A) = \sqrt{3}/2]$

90. $f = \ln(x^2 - y + 3z), \quad A = [2, 1, 1]$ $\quad [f_x(A) = 2/3,\ f_y(A) = -1/6,\ f_z(A) = 1/2]$