Derivace funkce

popisuje chování dané funkce, tj. růst nebo pokles,
ale navíc i rychlost (tempo, míru) růstu, resp. poklesu

Geometrický význam: směrnice tečny ke grafu funkce

Poznámka. Hodnoty funkce tangens

Definice. Derivací funkce f v bodě x_0 nazýváme číslo

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

pokud limita existuje a je konečná.

Poznámka. Je-li limita $+\infty$ nebo $-\infty$, pak mluvíme o nevlastní derivaci.

Poznámka. Jiný zápis limity v definici:

$$\boldsymbol{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Fyzikální aplikace: okamžitá rychlost přímočarého pohybu

Funkce zvaná derivace funkce f:

Značíme ji $\boldsymbol{f'}$, její definiční obor $\boldsymbol{D(f') \subset D(f)}$.

Tato fce přiřazuje bodu $x \in D(f)$ derivaci $f'(x)$, pokud tato existuje.

Jiné značení derivace:

Je-li $\boldsymbol{y = f(x)}$, pak kromě $\boldsymbol{f'}$ používáme též značení $\boldsymbol{y'}$, $\boldsymbol{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}}$, $\boldsymbol{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$

$f'_-(x_0)$ značí derivaci funkce f v bodě x_0 zleva,
$f'_+(x_0)$ značí derivaci funkce f v bodě x_0 zprava,
Věta 5.7. $f'(x_0) = k$ právě tehdy, když $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = k$.

Tečna ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ je přímka daná rovnicí

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)} \quad \doteq f(x) \text{ v okolí } U(x_0).$$

Je-li $f'(x_0) = 0$, pak tečna je rovnoběžka s osou x, a to: $y = f(x_0)$.

Položíme-li $x - x_0 = \mathrm{d}x$, pak pro přibližnou hodnotu $f(x)$ platí:
$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)\,\mathrm{d}x$. Výraz $f'(x_0)\,\mathrm{d}x$ se nazývá diferenciál funkce f v bodě x_0, označujeme ho $\mathrm{d}f$ nebo $\mathrm{d}y$:
$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$. Je to lineární funkce proměnné x.

Normála ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ je přímka o rovnici

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \text{ pokud } f'(x_0) \neq 0.$$

Spojitost a derivace funkce

Věta 5.8 Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, pak je f v bodě x_0 spojitá.

Věta obrácená neplatí !

Derivace některých elementárních funkcí

Tabulka

Příklad. $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$, pak $\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}, \ x \in (0, +\infty)}$

$$\boldsymbol{f'_+(0) = +\infty}, \qquad \text{nevlastní derivace}$$

Další vzorce (věty) pro výpočet derivací

Věta 5.10 Nechť funkce f a g mají derivace v bodě x.

Pak existují derivace:

$(konst \cdot f)'(x) = konst \cdot f'(x)$ **!!!**

Pro kratší zápis vynecháváme v dalších vzorcích (x):

$(f+g)' = f' + g'$, $(f-g)' = f' - g'$

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Věta 5.14 Nechť existují derivace $f'(g(x))$ a $g'(x)$.

Pak existuje derivace složené funkce $f(g(x))$ v bodě x a platí:

$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Derivace vyšších řádů

derivace 2. řádu funkce f je $f'' = (f')'$

derivace n-tého řádu funkce f je $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

Pro def. obory platí:

$$....D(f'') \subset D(f') \subset D(f)$$

Příklad. $f(x) = \mathrm{e}^x$, pak $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x, \; x \in \mathbb{R}$

Příklad. $f(x) = \sin x$,

pak v derivacích se periodicky opakují funkce:

$\cos x, -\sin x, -\cos x, \sin x \; x \in \mathbb{R}$.

Analogicky pro $f(x) = \cos x$.

Příklad. $f(x) = \frac{1}{x}$,

pak $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{(n-1)}}{x^{n+1}}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Příklad. $f(x) = \sqrt{x}$,

pak $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{(n-1)}}{2^n \cdot \sqrt{x^{2n-1}}}$, $x \in (0, +\infty)$.

Leibnizův vzorec

pro výpočet derivace n-tého řádu součinu $f \cdot g$:

pak $[f \cdot g]^{(n)} = \ldots.$

Platí na průniku def. oborů $D(f^{(n)})$ a $D(g^{(n)})$