II.4. Totální diferenciál a tečná rovina

Značení pro funkci $z = f(x, y)$:
(totální) diferenciál funkce f v bodě $A = [x_0, y_0]$:

$$df(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot (y - y_0)$$

Označme $d\,x = x - x_0$, $d\,y = y - y_0$. Pak

$$df(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot d\,x + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot d\,y$$

***Příklad* 91**. Je dána funkce $f(x, y) = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$.

a) Určete a načrtněte oblasti, ve kterých je funkce diferencovatelná.
b) Napište diferenciál funkce v bodě $A = [x_0,\, y_0]$.

Řešení : Postačující podmínkou pro diferencovatelnost je spojitost parciálních derivací

$\Rightarrow$ spojitost funkcí $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{1}{y}$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{y^2}$ $\quad \Rightarrow \quad x \neq 0 \ \wedge \ y \neq 0.$

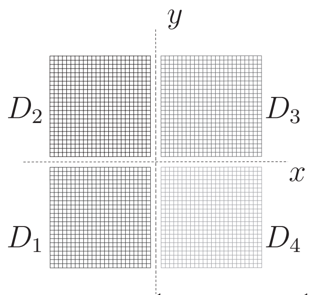
Dostaneme tyto množiny :

$D_1 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x < 0, y < 0\}$,

$D_2 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x < 0, y > 0\}$,

$D_3 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x > 0, y > 0\}$.

$D_4 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x > 0, y < 0\}$,



$$df(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(A)\,dy \quad \text{tj.} \quad df(A) = \left(-\frac{y_0}{x_0^2} - \frac{1}{y_0}\right) dx + \left(\frac{1}{x_0} + \frac{x_0}{y_0^2}\right) dy$$

■

***Příklad* 92**. Určete totální diferenciál a přibližný přírůstek funkce $z = \dfrac{y}{x}$ v bodě $A = [2, 1]$ pro $\triangle x = 0.1$ a $\triangle y = 0.2$. Porovnejte je.

Řešení : Totální diferenciál v bodě A je $dz(A) = \dfrac{\partial z}{\partial x}(A)\,dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}(A)\,dy.$

Přitom $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2} \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x}(A) = -\dfrac{1}{4}$ $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial y}(A) = \dfrac{1}{2}$

$$dz(A) = -\frac{1}{4}\,dx + \frac{1}{2}\,dy.$$

Položíme-li $dx = \triangle x = 0.1$ a $dy = \triangle y = 0.2$, pak obdržíme hledaný diferenciál funkce f v bodě A při daných přírůstcích $\triangle x, \triangle y$:

$$dz(A) = -\frac{1}{4} \cdot 0.1 + \frac{1}{2} \cdot 0.2 = 0.075,$$

přičemž přesný přírůstek $\triangle z = z(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - z(x_0, y_0) =$
$= z(2.1, 1.2) - z(2, 1) = 0.071.$

■

***Příklad* 93**. Pomocí totálního diferenciálu vypočítejte přibližně přírůstek funkce $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ při změně x od $x_0 = 1$ do $x_1 = 1.2$ a y od $y_0 = -3$ do $y_1 = -3.1$.

Řešení : Přírůstek přibližně nahradíme diferenciálem tj.

$\triangle z \doteq dz(A) = \frac{\partial z}{\partial x}(A) \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}(A) \cdot dy,$ kde $A = [1, -3],\ dx = 0.2,\ dy = -0.1.$

Spočítáme

$\frac{\partial z}{\partial x}(A) = \left(\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot (-\frac{y}{x^2}) \right)\Bigg|_A = \frac{3}{10}\ ,\quad \frac{\partial z}{\partial y}(A) = \left(\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{1}{x} \right)\Bigg|_A = \frac{1}{10}.$

Potom $\quad dz(A) = \frac{3}{10} \cdot 0.2 + \frac{1}{10} \cdot (-0.1) = 0.06 - 0.01 = 0.05.$ ■

***Příklad* 94.** Vypočítejte přibližně hodnotu výrazu $\ln(\sqrt{9.03} - \sqrt{0.99} - 1)$ pomocí totálního diferenciálu vhodně zvolené funkce.

Řešení : Položme $z(x, y) = \ln(\sqrt{x} - \sqrt{y} - 1),\ x_0 = 9,\ y_0 = 1,$ pak $dx = 0.03,\ dy = -0.01.$
Použijeme vztah

$$\triangle z = z(x + x_0, y + y_0) - z(x_0, y_0) \doteq \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot dy,$$

ze kterého dostaneme

$$z(x + x_0, y + y_0) \doteq z(x_0, y_0) + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot dy.$$

Připravme si :

$z(x_0, y_0) = \ln(\sqrt{9} - \sqrt{1} - 1) = 0,\quad \frac{\partial z}{\partial x}(A) = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y} - 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)\Bigg|_{[9,1]} = \frac{1}{6},$

$\frac{\partial z}{\partial y}(A) = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y} - 1} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{y}} \right)\Bigg|_{[9,1]} = -\frac{1}{2}.$ Nyní dosadíme a vypočteme hledanou

hodnotu $\quad \ln(\sqrt{9.03} - \sqrt{0.99} - 1) \doteq \frac{1}{6} \cdot 0.03 - \frac{1}{2} \cdot (-0.01) = 0.01\ .$ ■

***Příklad* 95.** Vypočítejte přibližnou hodnotu výrazu $0,98^{3,04}$ pomocí totálního diferenciálu vhodně zvolené funkce.

Řešení : $z(x, y) = x^y,\ x_0 = 1,\ y_0 = 3,$ tj. $A = [1, 3],\ dx = -0.02,\ dy = 0.04,$

$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x,\quad$ takže

$$z(0.98, 3.04) \doteq z(A) + dz(A) = z(A) + \frac{\partial z}{\partial x}(A) \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}(A) \cdot dy =$$
$$= 1 + 3 \cdot (-0.02) + 0 = 0.94.$$ ■

***Příklad* 96.** Najděte rovnici tečné roviny τ a normály n grafu funkce $z = 2x^2 - 4y^2$ v bodě $T = [2, 1, ?]$. Vypočítejte přibližně hodnotu funkce v bodě $[2.2, 1.3]$.

Řešení : Tečná rovina τ má rovnici

$$\tau: \quad z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(A) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(A) \cdot (y - y_0),$$

kde $A = [x_0, y_0] = [2, 1],$ a $z_0 = z(x_0, y_0)$. V daném případě $z_0 = 2 \cdot 4 - 4 \cdot 1 = 4 \quad \Longrightarrow$

$T = [2, 1, 4],\quad \frac{\partial z}{\partial x}(A) = (4x)\Big|_A = 8,\quad \frac{\partial z}{\partial y}(A) = (-8y)\Big|_A = -8 \quad \Longrightarrow$

$$\tau: \quad z - 4 = 8(x - 2) - 8(y - 1) \Longrightarrow 8x - 8y - z - 4 = 0.$$

Normála n je přímka procházející bodem T, jejímž směrovým vektorem je normálový vektor roviny τ. Tedy $\quad n: \quad [x, y, z] = [2, 1, 4] + t(8, -8, -1),\ t \in \mathbb{R}$.

Funkční hodnotu v bodě $[2.2, 1.3]$ vypočteme dosazením souřadnic bodu do rovnice tečné roviny $z = 4+8(x-2)-8(y-1) \quad \Rightarrow \quad z(2.2, 1.3) = 4+8(2.2-2)-$ $-8(1.3-1) = 4 + 1.6 - 2.4 = 3.2$ ■

***Příklad* 97**. Najděte rovnici tečné roviny τ plochy $z = x^2 + xy - y^2 + x + 3$ rovnoběžné s danou rovinou $\varrho : 5x - 3y - z = 0$.

Řešení : Musíme najít bod A , v němž $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 5$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -3$. Z toho dostaneme soustavu rovnic $\left\{ \begin{array}{r} 2x + y + 1 = 5, \\ x - 2y = -3. \end{array} \right.$ Odtud $x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = z(x_0, y_0) = 3$, takže $T = [1, 2, 3]$. Rovnice tečné roviny τ : $\quad 5x - 3y - z + d = 0, \quad T \in \tau$ $\Longrightarrow \quad \tau : 5x - 3y - z + 4 = 0.$ ■

• Vypočítejte přibližně hodnoty daných výrazů pomocí totálního diferenciálu :

98. $\sqrt[3]{7.95} \cdot \sqrt{8.96}$ [5.9742]

99. $\dfrac{\sqrt[4]{0.97}}{1.02^3 \cdot \sqrt[3]{0.99}}$ [0.936]

100. $\sqrt{4.04} \cdot \ln 1.02 \cdot \operatorname{arctg} 0.9$ [0.0314]

• Najděte rovnici tečné roviny τ a rovnici normály n plochy $z = f(x, y)$ v bodě T :

101. $z = 4\sqrt{x^2 + y^2}, \quad T = [3, 4, ?]$ $\quad [12x + 16y - 5z = 0;\ [x, y, z] = [3, 4, 20] + t(12, 16, -5),\ t \in \mathbb{R}]$

102. $z = xy, \quad T = [0, 0, ?]$ $\quad [z = 0;\ [x, y, z] = t(0, 0, 1),\ t \in \mathbb{R}]$

103. $z = x^2 \cdot \cos \dfrac{1}{y}, \quad T = [1, \dfrac{2}{\pi}, ?]$ $\quad \left[z = \frac{\pi^2}{4}\left(y - \frac{2}{\pi}\right);\ [x, y, z] = \left[1, \frac{2}{\pi}, 0\right] + t\left(0, \frac{\pi^2}{4}, -1\right),\ t \in \mathbb{R}\right]$

104. $z = \dfrac{1}{x} \arcsin y, \quad T = \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, ?\right]$ $\quad \left[\begin{array}{r} \pi x - 2\sqrt{2}\, y + z - \pi + 2 = 0; \\ [x, y, z] = \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2}\right] + t(\pi, -2\sqrt{2}, 1),\ t \in \mathbb{R} \end{array}\right]$

• Najděte rovnici tečné roviny τ plochy $z = z(x, y)$ rovnoběžné s rovinou ϱ :

105. $z = 2x^2 - y^2, \quad \varrho : 8x - 6y - z - 15 = 0$ $\quad [\tau : 8x - 6y - z + 1 = 0]$

106. $z = \ln(x^2 + 2y^2), \quad \varrho : 2x - z + 5 = 0$ $\quad [\tau : 2x - z - 2 = 0]$

107. $z = x^2 - y^2 + 6xy + 2x, \quad \varrho : 4x + 6y - z = 0$ $\quad [\tau : 4x + 6y - z - 1 = 0]$

II.5. Derivace a diferenciály vyšších řádů

***Příklad* 108**. Najděte všechny parciální derivace druhého řádu funkce $f(x, y) = xy^3 - y \cdot e^{x+y^2}$.

Řešení : $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = y^3 - y \cdot e^{x+y^2}, \quad f_y = 3xy^2 - e^{x+y^2} - y \cdot e^{x+y^2} \cdot 2y = 3xy^2 - e^{x+y^2}(1+2y^2),$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial x} = -y \cdot \mathrm{e}^{x+y^2},$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial y})}{\partial y} = 6xy - 2y\mathrm{e}^{x+y^2}(1+2y^2) - e^{x+y^2}4y = 6xy - e^{x+y^2}(6y+4y^3),$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial y} = 3y^2 - e^{x+y^2} - ye^{x+y^2} \cdot 2y = 3y^2 - e^{x+y^2}(1+2y^2),$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial y})}{\partial x} = 3y^2 - e^{x+y^2}(1+2y^2).$$

Vidíme, že pro danou funkci f platí $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ ve všech bodech $[x,y] \in \mathbb{E}_2$.

■

***Příklad* 109**. Ukažte, že funkce $u = u(x,t) = \operatorname{arctg}(2x-t)$ vyhovuje parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x} = 0 \ \text{ v } \ \mathbb{E}_2.$$

Řešení :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{1+(2x-t)^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-2\cdot 2(2x-t)\cdot 2}{\left(1+(2x-t)^2\right)^2} = \frac{-8(2x-t)}{\left(1+(2x-t)^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial(\frac{\partial u}{\partial x})}{\partial t} = \frac{-2}{\left(1+(2x-t)^2\right)^2} \cdot 2(2x-t)\cdot(-1) = \frac{4(2x-t)}{\left(1+(2x-t)^2\right)^2}.$$

Po dosazení je zřejmé, že rovnice platí ve všech bodech $[x,t] \in \mathbb{E}_2$.

■

***Příklad* 110**.* Je dána funkce $f(x,y)$

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-2y^2}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

Dokažte, že $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)$.

Řešení : Snadno se přesvědčíme, že funkce f je v bodě $[0,0]$ spojitá :

$\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Derivace $f_x(0,y)$, $f_y(x,0)$, $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$ vypočítáme pomocí příslušných definic :

$$f_x(0,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{hy\frac{h^2-2y^2}{h^2+y^2}-0}{h} = -2y,$$

$$f_y(x,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(x,k)-f(x,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{xk\frac{x^2-2k^2}{x^2+k^2}-0}{k} = x,$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{-2k}{k} = -2,$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1,$$

$$f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0).$$

■

Jsou dána skalární pole $\varphi(x,y,z)$ a vektorové pole $\vec{f}=(U,V,W)$, která mají spojité parciální derivace 2. řádu v oblasti $D\subset\mathbb{E}_3$.

Označme:

$$\nabla=\Big(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\Big),\quad \operatorname{grad}\varphi=\nabla\varphi=\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big),$$

$$\operatorname{div}\vec{f}=\nabla\cdot\vec{f}=\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z},\quad \operatorname{rot}\vec{f}=\nabla\times\vec{f}=\Big(\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z},\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\Big)$$

***Příklad* 111.** Je dáno skalární pole $\varphi(x,y,z)=xy^2+z^3-xyz+3$. Vypočítejte $\operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi$.

Řešení : Funkce $\varphi(x,y,z)=xy^2+z^3-xyz+3$ je diferencovatelná v oblasti $\mathbb{E}_3$. Pak

$$\operatorname{grad}\varphi=\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big)=(y^2-yz,\ 2xy-xz,\ 3z^2-xy)$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi=$$

$$=\Big(\frac{\partial(3z^2-xy)}{\partial y}-\frac{\partial(2xy-xz)}{\partial z},\ \frac{\partial(y^2-yz)}{\partial z}-\frac{\partial(3z^2-xy)}{\partial x},\ \frac{\partial(2xy-xz)}{\partial x}-\frac{\partial(y^2-yz)}{\partial y}\Big)=$$

$$=\big(-x-(-x),\ -y+y,\ 2y-z-(2y-z)\big)=\vec{0}$$

Poznámka: Parciální derivace 2. řádu funkce φ jsou spojité v $\mathbb{E}_3$. ■

***Příklad* 112.** Je dáno vektorové pole $\vec{f}=(U,V,W)=(xy,x^2-z^2,\frac{y}{x+z})$. Vypočítejte $\operatorname{div}\vec{f}$, $\operatorname{rot}\vec{f}$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{f}$.

Řešení : Vektorové pole $\vec{f}=(U,V,W)=(xy,x^2-z^2,\frac{y}{x+z})$ je definováno v množině $D(f)=\{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3 : x+z\neq 0\}$.

Parciální derivace:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial V}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial W}{\partial x}=-\frac{y}{(x+z)^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=x,\quad \frac{\partial V}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial W}{\partial y}=\frac{1}{x+z}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial V}{\partial z}=-2z,\quad \frac{\partial W}{\partial z}=-\frac{y}{(x+z)^2}$$

$$\operatorname{div}\vec{f}=y+0-\frac{y}{(x+z)^2},\quad \operatorname{rot}\vec{f}=\Big(\frac{1}{x+z}+2z;\ \frac{y}{(x+z)^2}-0;\ 2x-x\Big),$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{f}=\operatorname{div}\Big(\frac{1}{x+z}+2z;\ \frac{y}{(x+z)^2};\ x\Big)=-\frac{1}{(x+z)^2}+\frac{1}{(x+z)^2}+0=0$$

Poznámka: Souřadnicové funkce U,V,W mají spojité parciální derivace 2. řádu v D. ■

113.* Nechť v oblasti $D\subset\mathbb{E}_3$ má skalární pole $\varphi(x,y,z)$ spojité parciální derivace 2. řádu. Dokažte, že $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi=\vec{0}$ v D.

114.* Nechť v oblasti $D\subset\mathbb{E}_3$ má vektorové pole $\vec{f}(U,V,W)$ spojité parciální derivace 2. řádu. Dokažte, že $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{f}=0$ v D.

• Najděte diferenciály uvedeného řádu :

Příklad* 115. $z = \sin(2x+y), \quad d^2z = ?$

Řešení : Diferenciál n-tého řádu $d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy\right)^n f$, potom

$$d^2z = \left(dx\,\frac{\partial}{\partial x} + dy\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,(dy)^2 =$$
$$= -4\sin(2x+y)\,(dx)^2 - 4\sin(2x+y)\,dx\,dy - \sin(2x+y)\,(dy)^2 =$$
$$= -\sin(2x+y)\,(2dx+dy)^2.$$ ■

Příklad* 116. $z = x^3 - y^3 - xy + y^2, \quad d^3z = ?$

Řešení : $$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\,(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}\,(dx)^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\,dx\,(dy)^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\,(dy)^3$$

$$z_x = 3x^2 - y, \qquad z_y = -3y^2 - x + 2y,$$
$$z_{xx} = 6x, \qquad z_{yy} = -6y + 2, \qquad z_{xy} = -1,$$
$$z_{xxx} = 6, \qquad z_{yyy} = -6, \qquad z_{xxy} = z_{xyy} = 0,$$
$$d^3z = 6(dx)^3 - 6(dy)^3.$$ ■

Příklad* 117. $u = \mathrm{e}^{2x-3y}, \quad d^2u(A) = ?,\ d^3u(A) = ?,\ d^nu(A) = ?,\ A = [0,0]$

Řešení : $$d^2u(A) = \left(\mathrm{e}^{2x-3y}(2dx-3dy)^2\right)\Big|_A = (2dx-3dy)^2,$$
$$d^3u(A) = \left(\mathrm{e}^{2x-3y}(2dx-3dy)^3\right)\Big|_A = (2dx-3dy)^3,$$
$$d^nu(A) = \left(\mathrm{e}^{2x-3y}(2dx-3dy)^n\right)\Big|_A = (2dx-3dy)^n.$$ ■

Diferenciály lze použít v důležité **Taylorově větě** : *Nechť $f(x,y)$ je funkce $(n+1)$-krát diferencovatelná v každém vnitřním bodě obdélníka* M *se středem v bodě $A = [x_0, y_0]$. Potom ke každému bodu $[x,y] \in$ M existuje bod $[\xi,\eta] \in$ M takový, že*

$$f(x,y) = f(A) + df(A) + \frac{d^2f(A)}{2!} + \cdots + \frac{d^nf(A)}{n!} + R_{n+1},$$

kde $df(A) = df(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(A)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)\cdot(y-y_0),$

$$d^2f(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)\cdot(x-x_0)^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(A)\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)\cdot(y-y_0)^2,$$
$$\vdots$$
$$d^nf(A) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^n f}{\partial x^k\,\partial y^{n-k}}(A)\cdot(x-x_0)^k\cdot(y-y_0)^{n-k},$$
$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\,d^{n+1}f(\xi,\eta).$$

Příklad* 118. Napište Taylorův rozvoj funkce $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y^2 + 4x - 5y$ v okolí bodu $A = [2,-1]$ a výsledek využijte k výpočtu přibližné hodnoty funkce f v bodě $[2.1, -1.1]$.

Řešení :

$$f(A) = 16, \quad dx = x - x_0 = x - 2, \quad dy = y - y_0 = y + 1,$$

$$\left.\begin{aligned} f_x(A) &= (3x^2 - 3y^2 + 4)\Big|_A = 13 \\ f_y(A) &= (-6xy + 2y - 5)\Big|_A = 5 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow dz(A) = 13\,dx + 5\,dy = 13(x-2) + 5(y+1),$$

$$\left.\begin{aligned} f_{xx}(A) &= (6x)\Big|_A = 12 \\ f_{yy}(A) &= (-6x+2)\Big|_A = -10 \\ f_{xy}(A) &= (-6y)\Big|_A = 6 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} & d^2z(A) = 12\,(dx)^2 + 12\,dx\,dy - 10\,(dy)^2 = \\ & = 12(x-2)^2 + 12(x-2)(y+1) - 10(y+1)^2\ , \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} & f_{xxx}(A) = 6 \\ & f_{yyx}(A) = -6 \\ & f_{yxx}(A) = f_{yyy}(A) = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow d^3z(A) = 6\,(dx)^3 - 18\,dx\,(dy)^2 = 6(x-2)^3 - 18(x-2)(y+1)^2,$$

$$f(x,y) = 16+13(x-2)+5(y+1)+6(x-2)^2+6(x-2)(y+1)-5(y+1)^2+(x-2)^3-3(x-2)(y+1)^2,$$

$R_4 = 0$, protože derivace 4. a vyššího řádu jsou nulové

$$\begin{aligned} f(2.1;-1.1) &= 16 + 13\cdot 0.1 + 5\,(-0.1) + 6\cdot 0.1^2 - 6\cdot 0.1^2 - 5\cdot 0.1^2 + 0.1^3 - 3\cdot 0.1^3 = \\ &= 17.3 - 0.552 = 16.748. \end{aligned}$$ ∎

Příklad* 119. Napište Taylorův rozvoj čtvrtého stupně funkce $f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$ v okolí bodu $[0,0]$.

Řešení : Použijeme Taylorův vzorec pro $\cos z \doteq 1 - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^4}{4!}$, do kterého dosadíme

$z = x^2 + y^2$: $\quad \cos(x^2+y^2) \doteq 1 - \dfrac{(x^2+y^2)^2}{2!} + \dfrac{(x^2+y^2)^4}{4!};$

$$T_4(x,y) = 1 - \frac{1}{2}(x^4 + 2x^2y^2 + y^4).$$ ∎

• Najděte parciální derivace druhého řádu dané funkce :

120. $\phi(s,t) = \ln(s^3+t)$ $\quad\left[\phi_{ss} = \dfrac{3s(2t-s^3)}{(s^3+t)^2},\ \phi_{tt} = \dfrac{-1}{(s^3+t)^2},\ \phi_{st} = \phi_{ts} = \dfrac{-3s^2}{(s^3+t)^2}\right]$

121. $\phi(x,t) = \dfrac{\cos x^2}{t}$ $\quad\left[\phi_{xx} = \dfrac{-1}{t}(4x^2\cos x^2 + 2\sin x^2),\ \phi_{tt} = \dfrac{2}{t^3}\cos x^2,\ \phi_{xt} = \phi_{tx} = \dfrac{2x}{t^2}\sin x^2\right]$

122. $f(x,y) = \mathrm{e}^{ax+by}$ $\quad\left[f_{xx} = a^2\mathrm{e}^{ax+by},\ f_{yy} = b^2\mathrm{e}^{ax+by},\ f_{xy} = f_{yx} = ab\,\mathrm{e}^{ax+by}\right]$

123. Ověřte, že funkce $u(x,t) = \sin(x-ct)$ a funkce $u(x,t) = \sin(\omega ct)\cdot\sin(\omega x)$ vyhovují diferenciální rovnici $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (tzv. vlnová rovnice).

124. Ověřte, že funkce $u(x,y) = \mathrm{e}^x\sin y$ vyhovuje diferenciální rovnici $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (Laplaceova rovnice).

• Rozložte funkci $f(x,y)$ podle Taylorovy věty v okolí bodu A:

125.* $f(x,y) = x^3 + 5x^2 - 6xy + 2y^2,\ A = [1,-2]$

$$\left[\begin{aligned} f(x,y) = 26 + 25(x-1) - 14(y+2) + 8(x-1)^2 \\ +2(y+2)^2 - 6(x-1)(y+2) + (x-1)^3 \end{aligned}\right]$$

126.* $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^3 + 1,\ A = [2,-1]$

$$\left[\begin{aligned} f(x,y) = (x-2) + 3(y+1) + (x-2)^2 + \\ +3(y+1)^2 + 3(x-2)(y+1) - (y+1)^3 \end{aligned}\right]$$

II.6. Gradient. Derivace ve směru

• Určete úhel mezi gradienty daných funkcí v bodě A :

***Příklad* 127**. $f(x,y,z) = x^y + yz,\ \ g(x,y,z) = \sin(xz) + x + y - \dfrac{z}{y} - 1,\ \ A = [1,1,0]$

Řešení : $\operatorname{grad} f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right) = (yx^{y-1}, x^y \ln x + z, y) \Longrightarrow \operatorname{grad} f(A) = (1,0,1)$

$$\operatorname{grad} g = \left(z\cos(xz) + 1, 1 + \frac{z}{y^2}, x\cos(xz) - \frac{1}{y}\right) \Longrightarrow \operatorname{grad} g(A) = (1,1,0)$$

Označme $\varphi = \sphericalangle(\operatorname{grad} f(A), \operatorname{grad} g(A))$. Potom

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{grad} f(A)\cdot \operatorname{grad} g(A)}{\|\operatorname{grad} f(A)\| \cdot \|\operatorname{grad} g(A)\|} = \frac{(1,0,1)\cdot(1,1,0)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{3}\ .$$

■

***Příklad* 128**. $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y},\ \ g(x,y) = y\sqrt{x},\ \ A = [1,1]$

Řešení : $\operatorname{grad} f(A) = \nabla f(A) = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right), \qquad \operatorname{grad} g(A) = \left(\dfrac{1}{2}, 1\right),$

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{grad} f(A)\cdot \operatorname{grad} g(A)}{\|\operatorname{grad} f(A)\|\|\operatorname{grad} g(A)\|} = \frac{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\cdot(\frac{1}{2}, 1)}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{5}{4}}} = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}. \quad \Longrightarrow$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right).$$

■

***Příklad* 129**. Určete, ve kterých bodech z $D(f) \equiv \mathbb{E}_3$ je gradient funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ roven nulovému vektoru.

Řešení : $\operatorname{grad} f = (2x - 2yz, 2y - 2xz, 2z - 2xy) = (0,0,0) \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x - yz &= 0 \\ y - xz &= 0 \\ z - xy &= 0 \end{aligned}$

Je zřejmé, že jeden z bodů bude bod $A_1 = [0,0,0]$. Další spočítáme ze soustavy :

$$\left.\begin{aligned} x &= yz \\ y - yz^2 = 0 &\Longrightarrow z = \pm 1 \\ z - y^2 z = 0 &\Longrightarrow y = \pm 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &A_2 = [1,1,1], &&A_3 = [-1,1,-1], \\ &A_4 = [-1,-1,1], &&A_5 = [1,-1,-1]. \end{aligned}$$

■

***Příklad* 130**. Určete, ve kterých bodech z $D(f) \equiv \mathbb{E}_2$ má gradient funkce $f(x,y) = (x^2+y^2)^{3/2}$ velikost 9.

Řešení :

$$\|\operatorname{grad} f(x,y)\| = \|(3x\sqrt{x^2+y^2}, 3y\sqrt{x^2+y^2})\| = \sqrt{9x^2(x^2+y^2) + 9y^2(x^2+y^2)} = 9,$$

$$9x^2(x^2+y^2) + 9y^2(x^2+y^2) = 81,$$

$$(x^2+y^2)^2 = 9 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 3.$$

Hledané body leží tedy na kružnici se středem $[0,0]$ a poloměrem $\sqrt{3}$. ■

• Vypočtěte derivaci funkce f ve směru $\vec{s}$ v bodě A :

***Příklad* 131**. $f(x,y) = 2x^4 + xy + y^3, \quad \vec{s} = (3,-4), \quad A = [1,2]$

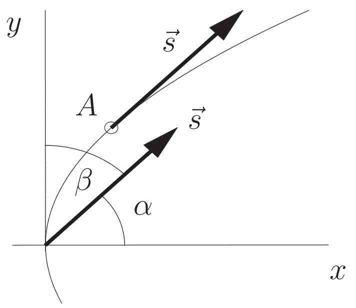
Řešení :
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \operatorname{grad} f(A) \cdot \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|}, \quad \operatorname{grad} f = (8x^3 + y, x + 3y^2),$$
$$\operatorname{grad} f(A) = (10, 13), \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = (10, 13) \cdot \frac{(3, -4)}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{30 - 52}{5} = -\frac{22}{5}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 132.** $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2$, $\quad A = [-3, 2, 4]$; směr $\vec{s}$ je vektor $\overrightarrow{AB}$, kde $B = [-2, 4, 2]$.

Řešení : $\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (1, 2, -2)$, $\quad \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = (2x, 4y, -2z)\Big|_A \cdot \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|} = (-6, 8, -8) \cdot \frac{(1, 2, -2)}{\sqrt{1 + 4 + 4}} =$
$$= \frac{1}{3}(-6 + 16 + 16) = \frac{26}{3}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 133.** Určete derivace funkce $z = x^2 + \ln(x + y^2)$ v bodě $A = [3, 2\sqrt{3}]$ ve směru tečny k parabole $y^2 = 4x$. Uvažujte vektor svírající ostrý úhel s vektorem $\vec{i}$.

Řešení : Souřadnice směrového vektoru tečny získáme z její směrnice



$$y = 2\sqrt{x}, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{x}},$$
$$\mathrm{k}_A = y'(A) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg}\alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{6},$$
$$\vec{s} = (\cos\alpha, \sin\alpha) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \ \|\vec{s}\| = 1.$$

Nyní si připravíme $\operatorname{grad} z(A) = \left(2x + \frac{1}{x + y^2}, \frac{2y}{x + y^2}\right)\Big|_A = \left(\frac{91}{15}, \frac{4\sqrt{3}}{15}\right)$, takže hledaná derivace bude
$$\frac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A) = \operatorname{grad} f(A) \cdot \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|} = \left(\frac{91}{15}, \frac{4\sqrt{3}}{15}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{95\sqrt{3}}{30}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 134.** Určete v jakém směru je derivace funkce $f(x, y) = x^3 y + \frac{x}{y^2} + 2y$ v bodě $A = [-1, 1]$ maximální a vypočítejte tuto derivaci.

Řešení : Z obecné teorie víme, že derivace je maximální ve směru gradientu.
$$\operatorname{grad} f(A) = \left(3x^2 y + \frac{1}{y^2}, x^3 - \frac{2x}{y^3} + 2\right)\Big|_A = (4, 3) \implies \vec{s} = (4, 3).$$
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \operatorname{grad} f(A) \cdot \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|} = \frac{16 + 9}{5} = 5 \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 135.** Je dána funkce $z = \sqrt{2x + y}$, bod $A = [1, 2]$, vektor $\vec{s} = (-1, 1)$. Určete
a) ve kterých bodech je funkce z diferencovatelná, $\quad$ b) $\frac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A)$,
c) tečnou rovinu ke grafu funkce z v bodě $T = [1, 2, ?]$.

Řešení : a) $\quad z_x = \frac{1}{\sqrt{2x + y}}, \quad z_y = \frac{1}{2\sqrt{2x + y}} \quad \Longrightarrow \quad 2x + y > 0 \Longrightarrow y > -2x,$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right) \cdot \dfrac{(-1,1)}{\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{4\sqrt{2}},$

c) $T = [1,2,2], \quad \tau : z - 2 = \dfrac{1}{2}(x-1) + \dfrac{1}{4}(y-2).$ ■

***Příklad* 136**. Určete vektor $\vec{s}$, v jehož směru je rychlost změny funkčních hodnot funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ v bodě $A = [1,-1,2]$ maximální a tuto maximální rychlost vypočítejte.

Řešení : Funkce maximálně roste, resp. klesá, ve směru $\vec{s}$, resp. $(-\vec{s})$, kde

$$\vec{s} = \operatorname{grad} f(A) = (6,-6,6) \quad \Longrightarrow \quad \vec{s}^{\,o} = \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|} = \frac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = (6,-6,6) \cdot \frac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3} \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial(-\vec{s})}(A) = -6\sqrt{3}.$$ ■

***Příklad* 137**. Určete, ve kterých bodech je gradient funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ kolmý k ose x.

Řešení : $\vec{i} = (1,0,0)$ je směrovým vektorem osy x, $\operatorname{grad} f = (2x-2yz, 2y-2xz, 2z-2xy)$,

$\vec{i} \perp \operatorname{grad} f$ znamená $\vec{i} \cdot \operatorname{grad} f = 0$. Odtud $2x - 2yz = 0$

takže hledané body leží na ploše $x = yz$. ■

***Příklad* 138**. Určete úhel vektorů $\operatorname{grad} f(A)$ a $\operatorname{grad} g(A)$, kde $f(x,y,z) = x - 3y + \sqrt{3xy} + z^3$, $g(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2} + xyz$, $A = [3,4,0]$.

Řešení :

$$\operatorname{grad} f(A) = \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3y}{x}}, -3 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3x}{y}}, 3z^2\right)(A) = (2, -\frac{9}{4}, 0)$$

$$\operatorname{grad} g(A) = \left(\frac{zx}{\sqrt{x^2+y^2}} + yz, \frac{zy}{\sqrt{x^2+y^2}} + xz, \sqrt{x^2+y^2} + xy\right)(A) = (0,0,17)$$

$$\cos\varphi = \frac{(2,-\frac{9}{4},0)\cdot(0,0,17)}{\|(2,-\frac{9}{4},0)\|\,\|(0,0,17)\|} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \operatorname{grad} f(A) \perp \operatorname{grad} g(A)$$

■

- Určete gradienty daných funkcí

139. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ $\left[\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\dfrac{-3x}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}, \dfrac{-3y}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}\right)\right]$

140. $f(x,y) = \sin(x^2 y) + \dfrac{x^2}{3}$ $\left[\operatorname{grad} f(x,y) = \left(2xy\cos(x^2 y) + \dfrac{2x}{3}, \; x^2\cos(x^2 y)\right)\right]$

141. $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$

$\left[\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right]$

142. $f(x,y,z) = x^2 yz + \ln y - 15$ $\left[\operatorname{grad} f(x,y,z) = \left(2xyz, \; x^2 z + \dfrac{1}{y}, \; x^2 y\right)\right]$

143. $f(u,v,t) = t\sqrt{u^2+v^2}$ $\left[\operatorname{grad} f(u,v,t) = \left(\dfrac{tu}{\sqrt{u^2+v^2}}, \dfrac{tv}{\sqrt{u^2+v^2}}, \sqrt{u^2+v^2}\right)\right]$

• Určete gradienty daných funkcí v bodě A

144. $f(x,y) = \operatorname{arccotg}(x-2y), \quad A = [4,1]$ $\left[\operatorname{grad} f(A) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)\right]$

145. $(x,y,z) = x\sqrt{yz}, \quad A = [-2,1,4]$ $\left[\operatorname{grad} f(A) = \left(2, -2, -\frac{1}{2}\right)\right]$

146. $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{z} + \dfrac{z^2}{2y} - \dfrac{4}{x}, \quad A = [1,2,-3]$ $\left[\operatorname{grad} f(A) = \left(\frac{10}{3}, -\frac{9}{8}, -\frac{29}{18}\right)\right]$

147. Ve kterých bodech je gradientem funkce $f(x,y) = \ln\left(x + \dfrac{1}{y}\right)$ vektor $\left(1, -\dfrac{16}{9}\right)$?
$\left[\text{v bodech } \left[-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right] \text{ a } \left[\frac{7}{3}, -\frac{3}{4}\right]\right]$

148. Ve kterém bodě je gradient funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + xy + 3y + 8z$
a) kolmý k ose z; b) rovnoběžný s osou z; c) roven nulovému vektoru?
[a) v bodech roviny $z = 2$ tj. $[x,y,2]$
b) v bodech přímky $x = 1,\ y = -2,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$
c) $[1,-2,2]$]

149. Nalezněte úhel φ gradientů funkce $f(x,y) = \arcsin \dfrac{x-1}{y}$, $y \neq 0$, v bodech
$A = [1,1], B = [3,4]$. $\left[\varphi = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}\right]$

• Je dána funkce $f(x,y)$, bod A a vektor $\vec{s}$. Určete, ve kterých bodech je funkce f diferencovatelná, spočítejte $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A)$ a napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $T = [A,\ f(A)]$:

150. $f(x,y) = |x| + y,\ A = [1,0],\ \vec{s} = (-1,1)$ $\left[\{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x \neq 0\},\ \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = 0,\ x + y - z = 0\right]$

151. $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2,\ A = [1,0],\ \vec{s} = (1,2)$ $\left[\mathbb{E}_2,\ \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \frac{8}{\sqrt{5}},\ 2x + 3y - z - 1 = 0\right]$

152. Určete v jakém směru je derivace funkce $f(x,y) = \ln \dfrac{x+y}{x-y}$, v bodě $A = [3,0]$
maximální a vypočítejte tuto derivaci. $\left[\vec{s} = \operatorname{grad} f(A) = \left(0, \frac{6}{9}\right), \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \frac{2}{3}\right]$

153. Určete derivaci funkce $f(x,y) = x^2 - y^2$ v bodě $A = [2,3]$ ve směru $\vec{s}$, svírající s vektorem $\vec{i}$ úhel $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$. ($\alpha = \frac{\pi}{3}$ je směrový úhel) $\left[\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = 2 - 3\sqrt{3}\right]$

154.* Určete derivaci funkce $f(x,y,z) = x^2 - 3xy + y^2 z - 5z$ v bodě $A = [1,-2,-1]$ ve směru $\vec{s}$, jehož směrové úhly jsou $\alpha = \dfrac{\pi}{3}, \beta = \dfrac{3\pi}{4}, \gamma \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. $\left[\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \frac{7 - \sqrt{2}}{2}\right]$

***Příklad* 155**. Je dána funkce $z = f(x, y) = \sqrt{18 - x^2 - 2y^2}$

a) Napište postačující podmínku pro diferencovatelnost funkce n-proměnných v otevřené množině $M \subset \mathbb{E}_n$. Určete a načrtněte v $\mathbb{E}_2$ množinu D, ve které je funkce $z = f(x, y)$ diferencovatelná. Zdůvodněte!

b) Určete a načrtněte graf funkce $z = \sqrt{18 - x^2 - 2y^2}$.

c) Vypočítejte derivaci funkce f v bodě $A = [1, -2]$ ve směru, který je určen vektorem $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$, kde bod $B = [0, 0]$. Popište chování funkce f v bodě A v daném směru (funkce roste, resp. klesá, jak rychle (odhad)).

d) Napište rovnici tečné roviny a parametrické vyjádření normály ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě dotyku $T = [1, -2, ?]$.

e) Napište rovnice izokřivek (tj. $f(x, y) = k$) této funkce pro $k = 0, k = 3$. Izokřivky načrtněte.

Řešení:

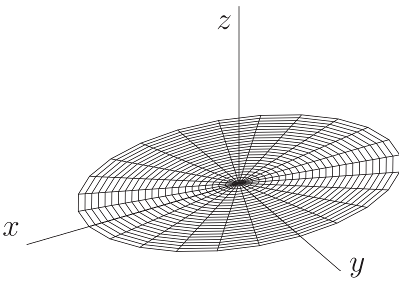
a) $f_x = \dfrac{1}{2\sqrt{18 - x^2 - 2y^2}} \cdot (-2x), \quad f_y = \dfrac{1}{2\sqrt{18 - x^2 - 2y^2}} \cdot (-4y) \quad \Rightarrow$

$18 - x^2 - 2y^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : 18 - x^2 - 2y^2 > 0\}$,

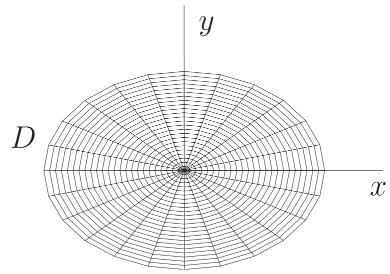
tj. vnitřek elipsy se středem v počátku, poloosy: $a = 3\sqrt{2}$, $b = 3$,

ZDŮVODNĚNÍ: v oblasti D má daná funkce spojité parciální derivace

Promítnutí plochy do průmětny (xy)

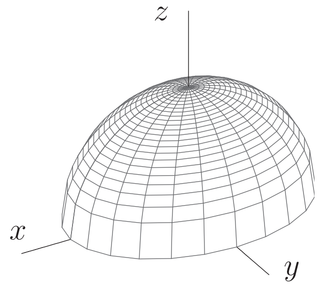


$\Rightarrow$



b)

Grafem je "horní" polovina (tj. $z \geq 0$) elipsoidu $x^2 + 2y^2 + z^2 = 18$



c) $\operatorname{grad} f(A) = (-1/3, 4/3)$, $\vec{s} = (-1, 2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = 3\sqrt{5}/5$, daná funkce je v bodě A v daném směru rostoucí, směr tečny svírá se směrem $\vec{s}$ úhel asi $50°$

d) $A = [1, -2] \in D(f)$, $T = [1, -2, ?]$ leží na ploše $\Rightarrow z_T = f(A) = 3$

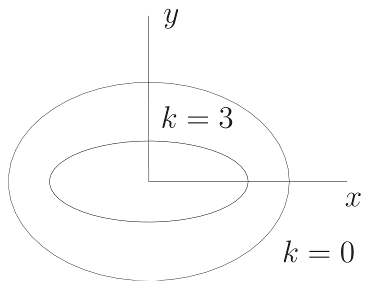
Tečná rovina τ má rovnici $\quad z - z_0 = \dfrac{\partial z}{\partial x}(A) \cdot (x - x_0) + \dfrac{\partial z}{\partial y}(A) \cdot (y - y_0)$,

$\dfrac{\partial z}{\partial x}(A) = -\dfrac{1}{3}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}(A) = \dfrac{4}{3} \quad \Rightarrow$

$\tau : z = 3 - \dfrac{1}{3}(x - 1) + \dfrac{4}{3}(y + 2)$, po úpravě na obecný tvar $x - 4y + 3z = 18$, normála $n: \; [x,y,z] = [1,-2,3] + t\,(1,-4,3),\; t \in \mathbb{R}$

e)

Izokřivky jsou elipsy:
$x^2 + 2y^2 = k$
$x^2+2y^2 = 18$ (hranice $D(f)$, pro k=0),
$x^2 + 2y^2 = 9$ (pro $k=3$).



***Příklad* 156**. Je dána funkce $z = f(x,y) = -\sqrt{5y - x^2}$.

a) Napište (a <u>zdůvodněte</u>), ve kterých bodech $[x,y] \in \mathbb{E}_2$ je funkce $z = f(x,y)$ diferencovatelná. Množinu těchto bodů načrtněte.

b) Vypočítejte parciální derivace 1. řádu dané funkce v bodě $A = [4,5]$. Popište chování dané funkce v bodě A (funkce roste, resp. klesá, v jakém směru a odhadněte, jak rychle).

c) Určete směr $\vec{s}$, ve kterém funkce f v bodě A nejrychleji klesá. Vypočítejte derivaci funkce f v bodě A v tomto směru $\vec{s}$.

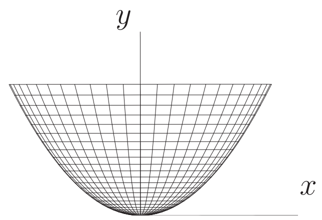
d) Napište diferenciál funkce f v bodě $A = [4,\,5]$. Jeho užitím vypočítejte přibližnou hodnotu funkce f v bodě $[4.3,\,5.3\,]$.

e)Načrtněte graf funkce $z = f(x,y)$.

Řešení :

a) Na množině $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : 5y - x^2 > 0\}$ má daná funkce spojité parciální derivace.

D je "vnitřek"paraboly s vrcholem v počátku a osou v ose y



b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) = \dfrac{4}{3}$, daná funkce je v bodě A v kladném směru osy x rostoucí, a to pod úhlem asi $50^\circ - 55^\circ$,

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = -\dfrac{5}{6}$, daná funkce je v bodě A v kladném směru osy y klesající, úhel mezi vektorem tečny a vektorem $\vec{\jmath}$ je asi 40°.

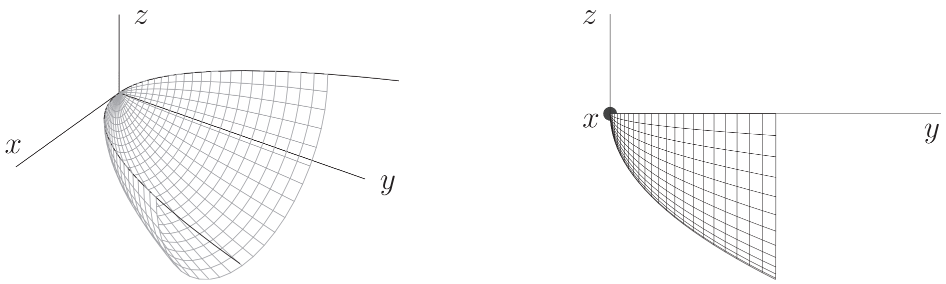
c) $\overrightarrow{s} = -\text{grad} f(A) = (-4/3, 5/6)$,

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{s}}(A) = \frac{\text{grad} f(A) \cdot (-\text{grad} f(A))}{\| -\text{grad} f(A)\|} = -\|\text{grad} f(A)\| = -\sqrt{89}/6 \doteq -1.6,$$

funkce je v bodě A ve směru vektoru $\vec{s}$ klesající a úhel mezi tečnou a vektorem $\vec{s}$ je asi 60°

d) $df(A) = \dfrac{4}{3}\,dx - \dfrac{5}{6}\,dy$, $f(4.3,\,5.3\,) \doteq f(A) + \frac{4}{3}\,0.3 - \frac{5}{6}\,0.3 = -2.85.$

e) Graf je "dolní" polovina ($z \le 0$) rotačního paraboloidu $y = (x^2 + z^2)/5$, osa rotace je v ose y.



157. a) Určete a načrtněte v $\mathbb{E}_2$ oblasti, ve kterých je funkce $z = \ln(xy - 4)$ diferencovatelná a zdůvodněte.
b) Určete gradient této funkce f v bodě $A = [-2, -4]$. Popište, co vypočtený vektor udává.
c)Určete velikost derivace zadané funkce v bodě A ve směru gradientu.
d) Určete vektor $\vec{s}$, v jehož směru je derivace dané funkce v bodě A nulová. Ověřte výpočtem.
e) Napište rovnice izokřivek této funkce pro $k = 0$ a pro $k = \ln 4$.

[a)$D_1 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x < 0, y < 4/x\}$, $D_2 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x > 0, y > 4/x\}$,]
[b)grad$f(A) = (-1, -1/2)$ udává směr maximálního růstu dané funkce v bodě A]
[c)$\overrightarrow{s} \cdot \mathrm{grad} f(A) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{s} \perp \mathrm{grad} f(A)$, např. $\overrightarrow{s} = (1/2, -1)$, d)$y = 5/x$, $y = 8/x$.]

158. Je dána funkce $f(x, y) = x^2 - y^2 + 6xy + 2x$, bod $A = [-1, 2]$ a směr $\overrightarrow{s} = (2, -2)$.
a) Vypočítejte $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{s}}(A)$. Je to směr maximálního růstu funkce f v bodě A?
b) Určete všechny body, v nichž je grad $f(x, y) = \overrightarrow{0}$.
c) Najděte bod dotyku a rovnici tečné roviny τ ke grafu funkce f rovnoběžné s rovinou $\varrho: \;\; 4x + 6y - z + 3 = 0$.

$\left[a)\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{s}}(A) = 11\sqrt{2}, \;\; \mathrm{NE}\right]$
[b)$x = -1/10$, $y = -3/10$, c)$T = [1, 0, 3]$, $4x + 6y - z - 1 = 0$.]

159. Je dána funkce $z = f(x, y) = y^2 \sin(x^2 - y^2)$.
a) Určete, kde je funkce diferencovatelná a vypočítejte f_x, f_y.
b) Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě dotyku [1, 1, ?].
c) Užitím diferenciálu vypočítejte přibližnou hodnotu funkce f v bodě [0.9, 1.1].

[a)$f_x = 2xy^2 \cos(x^2 - y^2)$, $f_y = 2y \sin(x^2 - y^2) - 2y^3 \cos(x^2 - y^2)$]
[b) $z = 2x - 2y$, c)$f(0.9,\, 1.1) \doteq -0.4$.]