Tečná rovina, diferenciál, derivace ve směru

Diferencovatelná funkce, diferenciál

Definice. Říkáme, že funkce $\boldsymbol{f}$ (n proměnných) je diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{A = [a_1, .., a_n]}$, jestliže existuje lineární funkce

$L(X) = f(A) + k_1\,(x_1 - a_1) + \ldots + k_n\,(x_n - a_n)$ taková, že

$$\lim_{\boldsymbol{X \to A}} \frac{\boldsymbol{f(X) - L(X)}}{\boldsymbol{\|X - A\|}} = \boldsymbol{0}.$$

Říkáme, že funkce f je diferencovatelná v množině M, je-li diferencovatelná v každém bodě množiny M.

Nutné podmínky pro diferencovatelnost

Věta 4.11 a 4.12.

Je-li funkce $\boldsymbol{f}$ (n prom.) diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{A}$, pak

1. f je v bodě A spojitá,
2. f má v bodě A parc. derivace podle všech proměnných. Pro každé $i = 1, 2, ..., n$ platí: $\boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(A) = k_i}$.

Důkaz (J. Neustupa):

1. Postupujeme podobně jako v analogické větě pro funkci jedné proměnné.

2. Vyjdeme z definice diferencovatelné funkce a upravíme tak, aby limita obsahovala výraz pro parc. derivaci.

Použití věty: Jestliže funkce f není spojitá v daném bodě A nebo parciální derivace podle některé prom. v bodě A neexistuje, pak funkce f není diferencovatelná v bodě A.

Tečnou rovinou ke grafu funkce v bodě $T = [A, f(A)] \in \mathbb{E}_3$, kde $A = [a_1, a_2]$ nazýváme rovinu o rovnici

$$\boxed{\boldsymbol{z = f(A) + \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - a_2).}}$$

(Totálním) diferenciálem funkce $f(x, y)$ v bodě A nazýváme lineární funkci proměnných x, y, kterou značíme $df(A)$:

$$\boldsymbol{df(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - a_2).}$$

Označíme-li přírůstky $\boldsymbol{dx = x - a_1}$, $\boldsymbol{dy = y - a_2}$, pak

$$\boldsymbol{df(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(A)\, dy.}$$

Pro $X = A + \Delta X$ z okolí $U(A)$ přibližně platí $\boldsymbol{f(X) \doteq f(A) + df(A)}$.

Geometrický význam diferenciálu $df(A)$: přírůstek na tečné rovině, což je přibližně přírůstek funkce (při přírůstku ΔX).

V případě funkce obecně n proměnných mluvíme zpravidla o *tečné nadrovině*. Jedná se o množinu v prostoru $\mathbb{E}_{n+1}$.

Poznámka. Uvedené dvě věty a následující Věta 4.16: žádná z nich neplatí ve tvaru věty obrácené.

Příklad 1.*
Funkce $z = f(x, y) = |\mathrm{sign}(xy)|$ má parciální derivace podle obou proměnný v bodě $P = [0, 0]$, a to rovné nule. Není však spojitá v bodě P. Tato funkce tedy není v bodě P diferencovatelná. Rovina $z = 0$ sice prochází bodem P i částí grafu (osy x, y), ale "nepřimyká se" ke grafu dané funkce v prstencovém okolí bodu P.

Postačující podmínka pro diferencovatelnost

Věta 4.16. Má-li funkce $\boldsymbol{f}$ (n prom.) spojité parc. derivace podle všech prom. v bodě $\boldsymbol{A}$, pak je diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{A}$.

Má-li $\boldsymbol{f}$ spojité parc. derivace podle všech proměnných v množině $\boldsymbol{M}$, která je otevřená, pak je $\boldsymbol{f}$ diferencovatelná v $\boldsymbol{M}$.

Příklad 2.* Uvažujme funkci $z = f(x, y)$ definovanou předpisem

$$\boldsymbol{z = f(x, y) = (x^2 + y^2)\, \sin \frac{1}{x^2 + y^2}} \ \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0], \ \boldsymbol{f(0, 0) = 0}.$$

Tato funkce má parciální derivace podle obou proměnných ve všech bodech $D(f) = \mathbb{E}_2$. V bodě $P = [0, 0]$ jsou obě rovné nule (ověřte si podle definice). Daná funkce je diferencovatelná v bodě P.

V tomto bodě však nejsou tyto parc. derivace spojité. Ověřit to lze např. na posloupnosti bodů $\boldsymbol{X_n = [1/\sqrt{2\pi\, n},\, 0]}$, která konverguje k bodu P, ale posloupnost hodnot parciálních derivací podle x, tj. $\boldsymbol{f_x(X_n)}$ diverguje.

Derivace v daném směru - výpočet

Věta 5.5. Je-li funkce $\boldsymbol{f}$ (n prom.) diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{A}$, pak existuje derivace fce $\boldsymbol{f}$ v bodě $\boldsymbol{A}$ ve směru $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{o}}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(A) = \frac{\operatorname{grad} f(A) \cdot \overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$$

Poznámka. "Vážený průměr" parc. derivací, váhy jsou složky vektoru $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$.

Důležité směry v bodě $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{f})$

vektor $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \operatorname{grad} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})$, je-li nenulový, udává směr maximálního růstu funkce f v bodě A,

vektor $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = -\mathrm{gradf}(\mathrm{A})$, je-li nenulový, udává směr maximálního poklesu funkce f v bodě A,

libovolný nenulový vektor $\overrightarrow{\boldsymbol{s}} \perp \mathrm{gradf}(\mathrm{A})$, udává směr, ve kterém je derivace nulová (pohyb po izokřivce v $\mathbb{E}_2$, resp. po izoploše v $\mathbb{E}_3$.

Příklad

Je dána funkce
$f(x,y)=\sqrt{x-y^2+2}$**, bod** $A=[3,-1]$**.**

a) **Množina** $D\subseteq\mathbb{E}_2$**, ve které je tato funkce diferencovatelná.**

b) **Gradient a diferenciál funkce** f **v bodě** A**.**

c) **Derivace funkce** f **v bodě** A **ve směru** $\vec{u}=(2,\ -2)$**.**
Je to směr nejrychlejšího poklesu fce f **v bodě** A **?**

d) **Směr** $\vec{s}$**, ve kterém je derivace funkce** f **v bodě** A **nulová. Ověřte výpočtem.**

e) **(Jednotkový) směr** $\vec{v}$**, ve kterém funkce** f **v bodě** A **nejrychleji roste. Derivace funkce** f **v bodě** A **v tomto směru.**