Extrémy funkcí více proměnných.

Lokální extrémy

Definice.
Říkáme, že funkce f, n proměnných má v bodě $A \in D(f)$ lokální maximum, jestliže existuje prstencové okolí $P(A) \subset D(f)$ takové, že po každé $X \in P(A)$ platí: $f(X) \leq f(A)$. Podobně, funkce f má v bodě A lokální minimum, existuje-li prstencové okolí $P(A) \subset D(f)$ takové, že pro každé $X \in P(A)$ platí: $f(X) \geq f(A)$.
Platí-li ostré nerovnosti, pak mluvíme o ostrém lokálním maximu, resp. minimu.

Věta 6.4 (nutná podmínka pro lokální extrém).
Nechť funkce f, n proměnných, je diferencovatelná v bodě A.
Má-li funkce f v bodě A lokální extrém, pak $\operatorname{grad} f(A) = \overrightarrow{0}$.

Poznámka. Kritické body, stacionární body

Pro formulaci postačující podmínky v případě funkce dvou proměnných zavedeme matici

$$\mathcal{M}(A) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A), & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(A) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(A), & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix}$$

a dále dvě hodnoty: $\Delta_1(A) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)$, $\Delta_2(A) = \det \mathcal{M}(A)$.

Věta 6.8
(postačující podmínky pro lokální extrém funkce $z = f(x, y)$)

Nechť funkce $z = f(x, y)$ má parciální derivace 1. i 2. řádu spojité v bodě A. Nechť $\operatorname{grad} f(A) = \vec{o}$. Pak platí:

Je-li $\Delta_2(A) < 0$, pak f nemá v bodě A lokální extrém.

Je-li $\Delta_2(A) > 0$ a $\Delta_1(A) > 0$, pak f má v bodě A ostré lokální minimum.

Je-li $\Delta_2(A) > 0$ a $\Delta_1(A) < 0$, pak f má v bodě A ostré lokální maximum.

Postup při výpočtu lokálních extrémů (funkce dvou prom.)

1. krok: Určíme všechny body, které jsou řešením soustavy rovnic
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ a funkce f je v nich diferencovatelná.

2. krok: V každém z těchto bodů postupujeme podle postačující podmínky.

Poznámka. ? Další postup, jestliže v kritickém bodě není splněna některá z postačujících podmínek: podle definice.

Příklad. Vyšetřete lokální extrémy

$z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, Sbírka, řešený př. 197

$z = f(x, y) = \sqrt{4 - y^2}$, neostré lok. max. v bodech $[\boldsymbol{x},\ \mathbf{0}]$, viz graf

Výsledky následujících úloh s grafy funkcí jsou v souboru
”Lokální extrémy-příklady”

0. (Beta) $f(x, y) = 2xy - x + 3y$

1. (Beta) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7x$

2. $f(x, y) = 2xy - 2x^3 - 4x^2 - y^2$

3. (Beta) $f(x, y) = x\,\mathrm{e}^x + y^2$

4. $f(x, y) = \dfrac{1}{2}x^2 + xy + y^2 - 4\,\ln y$

5. $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$

6. (Beta) $f(x, y) = x^2 + y^3 + 4x - 3y + 2$

7. $f(x, y) = x^4 + 4xy + y^2$

8. $f(x, y) = 4x^2 - y^2 - \dfrac{y}{x}$

9. $f(x,y) = y\,\sqrt{x} - y^2 - x + 9y$

10. (Alfa) $f(x,y) = \mathrm{e}^{2x}(x + y^2 + 2y)$

11. (Beta) $f(x,y) = \mathrm{e}^{y}\,(x^2 + y)$

12. (Alfa) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x}\,(x^2 + y^2)$

13. (Alfa) $f(x,y) = 3\,\ln(x^2\,y) - y^3 - 3x^2 + 4$

14. (Alfa) $f(x,y) = (x^2 + y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2},$ lok. min. v $[0,0]$, neostré lok. max v bodech $[x,y]:\; x^2 + y^2 = 1$ (jednotková kružnice)

Absolutní (globální) extrémy

Definice. Nechť f je funkce n proměnných a $M \subset D(f)$.
Říkáme, že funkce f nabývá v bodě $A \in M$ svého maxima na množině M, jestliže pro každé $X \in M$ platí: $f(X) \leq f(A)$.
Zapisujeme $f(A) = \max\{f(x) : x \in M\}$, stručně $f(A) = \max_M f$.
Analogicky definujeme minimum funkce f na množině M. Značíme je stručně $\min_M f$.
Maximum, resp. minimum funkce f na celém definičním oboru $D(f)$ značíme stručně $\max f$, resp. $\min f$.

Věta 6.14
(postačující podmínky pro existenci absolutních extrémů)
Nechť $M \subset \mathbb{E}_n$ je neprázdná, omezená a uzavřená množina, nechť funkce f je spojitá na M.
Pak funkce f nabývá na množině M maxima a minima.

Speciálním případem jsou tzv. **vázané extrémy**, a to když množina $M = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 : g(x, y) = 0\}$, kde g je daná funkce.
Pokud lze, pak z vazební podmínky $g(x, y) = 0$ vyjádříme jednu proměnnou, kterou dosadíme do dané funkce f. Získáme tak úlohu určit absolutní extrémy funkce jedné proměnné.

Postup při výpočtu absolutních extrémů.
Připomeňme, že M^0 je vnitřek a ∂M je hranice množiny M.
1. Ověříme splnění předpokladů právě uvedené věty, čímž zdůvodníme existenci absolutních extrémů.
2. Určíme všechny kritické body X funkce f v otevřené množině M^0.
3. Určíme všechny body $X \in \partial M$, ve kterých může funkce f nabývat vázaných extrémů na hranici množiny M. Nezapomeňme na průsečíky křivek, které tvoří hranici ∂M (pokud průsečíky existují).
4. Určíme hodnoty funkce f ve všech vypočítaných bodech. Největší hodnota je rovna $\max_M f$ a nejmenší hodnota je rovna $\min_M f$.

Příklad. Zdůvodněte existenci absolutních extrémů a určete je (tj. určete jejich polohu a odpovídající funkční hodnotu).

1. $z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y$
a) na úsečce $\overline{AB}$, $A = [3,\ 0],\ B = [0,\ 3]$,
b) na hranici ∂M množiny $M = \{[x, y]; x + y \leq 3,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

2. $z = f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ na $M = \{[x, y]; x + y = 1,\ x \in \langle 1/4,\ 9/10 \rangle\}$.

3. $z = f(x, y) = x^2 - y^2 + 18$ na $M = \{[x, y]; x^2 + y^2 \leq 9\}$.