II.10. Extrémy funkcí

Věta (nutná podmínka pro lokální extrém). Nechť funkce $f(x,y)$ je diferencovatelná v bodě A. Má-li funkce f v bodě A lokální extrém, pak $\operatorname{grad} f(A) = \vec{0}$.

Označme hlavní minory matice druhých derivací

$$\Delta_1(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A), \qquad \Delta_2(A) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A), & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(A) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(A), & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{vmatrix}$$

Věta (postačující podmínky pro lokální extrém funkce dvou proměnných). Nechť funkce $f(x,y)$ má spojité parciální derivace 2. řádu v bodě A. Nechť je v bodě A splněna nutná podmínka $\operatorname{grad} f(A) = \vec{0}$.
Pak platí:

Je-li $\Delta_1(A) > 0$ a $\Delta_2(A) > 0$, pak funkce f má v bodě A ostré lokální minimum.
Je-li $\Delta_1(A) < 0$ a $\Delta_2(A) > 0$, pak funkce f má v bodě A ostré lokální maximum.
Je-li $\Delta_2(A) < 0$, pak funkce f nemá v bodě A lokální extrém.

Postup při výpočtu lokálních extrémů

1. krok: Podle nutné podmínky určíme tzv. kritické body, tj.

a) body, v nichž funkce $f(x,y)$ není diferencovatelná,

b) body, které jsou řešením soustavy rovnic $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0.$

2. krok:

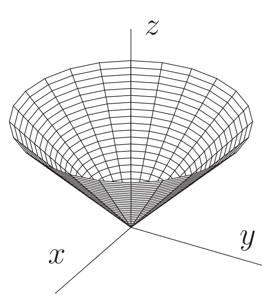
V bodech **b)** postupujeme podle postačující podmínky.

• Najděte **lokální** extrémy funkce :

***Příklad* 197**. $z(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Řešení : Daná funkce je definovaná v $\mathbb{E}_2$. Parciální derivace $z_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ neexistují v bodě $A = [0,\,0]$, který je jediným kritickým bodem. V bodě A tedy může být lokální extrém, neboť funkce f není v bodě A diferencovatelná. Nelze však rozhodnout podle výše uvedené postačující podmínky, proto použijeme definici lokálního extrému.Pro každý bod z prstencového okolí $P(A)$ bodu A ale platí, že $f(X) > f(A)$. Funkce f tedy má v bodě $A = [0,\,0]$ ostré lokální minimum s hodnotou $f(0,0) = 0$.

Poznámka. Nerovnost $f(X) > f(A)$ je splněna v libovolném prstencovém okolí $P(A)$. Funkce f tedy má v bodě $A = [0,\,0]$ i ostré globální minimum.



Příklad má názornou geometrickou interpretaci. Stačí si uvědomit, jaká plocha je grafem funkce $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

■

***Příklad* 198**. $f(x,y) = x^3 - x^2 + \dfrac{1}{2}y^2 - xy - 6x$

Řešení : Funkce $f(x,y)$ má spojité parciální derivace 1. a 2. řádu.
1) Podle nutné podmínky $f_x = 0, \quad f_y = 0$ dostaneme soustavu:

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 3x^2 - 2x - y - 6 \\ f_y &= y - x \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} 3x^2 - 2x - y - 6 &= 0 \\ y - x &= 0 \end{aligned}\right\} \text{dosadíme}$$

$$\left.\begin{aligned} 3(x^2 - x - 2) &= 0 \\ y &= x \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} (x-2)(x+1) &= 0 \\ y &= x \end{aligned}\right\} \implies$$

a dostaneme dva kritické body $[2,2]$, $[-1,-1]$.

Připravíme si druhé derivace

$$\left.\begin{aligned} f_{xx} &= 6x - 2 \\ f_{xy} &= -1 = f_{yx} \\ f_{yy} &= 1 \end{aligned}\right\} \implies \Delta_1(x,y) = 6x - 2,\ \Delta_2(x,y) = \begin{vmatrix} 6x-2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 6x - 3$$

2) Z postačující podmínky

	Δ_2	Δ_1	závěr
$[2,2]$	9	10	ostré lok. minimum, $f(2,2) = -10$
$[-1,-1]$	-9		není extrém

■

***Příklad* 199**. $z(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

Řešení : Zde máme funkci dvou proměnných v explicitním tvaru. Funkce z je diferencovatelná v $\mathbb{E}_2$, proto nutná podmínka existence lokálních extrémů je : $z_x = 0,\ z_y = 0$.

$$z_x = 6x^2 + y^2 + 10x \implies 6x^2 + y^2 + 10x = 0$$
$$z_y = 2xy + 2y \implies y(x+1) = 0 \implies \text{buď } y = 0 \text{ nebo } x = -1$$

$$y = 0: \quad 6x^2 + 10x = 0 \implies \begin{cases} x_1 = 0 \implies A_1 = [0,0] \\ x_2 = -\dfrac{5}{3} \implies A_2 = \left[-\dfrac{5}{3}, 0\right] \end{cases}$$

$$x = -1: \quad y^2 + 6 - 10 = 0 \implies y^2 = 4 \implies \begin{cases} y = 2 \implies A_3 = [-1,2] \\ y = -2 \implies A_4 = [-1,-2] \end{cases}$$

Nyní si připravíme derivace druhého řádu :

	A_1	A_2	A_3	A_4
$z_{xx} = 12x + 10$	10	-10	-2	-2
$z_{yy} = 2x + 2$	2	$-4/3$	0	0
$z_{xy} = 2y = z_{yx}$	0	0	4	-4

$$\text{Je-li } \Delta_2(A_i) = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} \left\langle \begin{array}{ll} > 0, & \text{pak existuje lokální extrém v bodě } A_i. \\ < 0, & \text{pak neexistuje lokální extrém v bodě } A_i\ . \end{array}\right.$$

Pro $A_1 : \Delta_2(A_1) = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0$, $\Delta_1(A_1) = z_{xx}(A_1) > 0$, obdržíme lokální minimum

$z(A_1) = 0.$

Pro $A_2 : \Delta_2(A_2) = \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\dfrac{4}{3} \end{vmatrix} > 0$, $\Delta_1(A_2) = z_{xx}(A_2) < 0$, je lokální maximum

$z(A_2) = \dfrac{125}{27}.$

Pro A_3, A_4 je $\Delta_2(A_3) = \Delta_2(A_4) = -16 < 0$, a proto v bodech A_3 a A_4 lokální extrémy neexistují.

■

***Příklad* 200**. Funkce $y = f(x)$ je vyjádřena v implicitním tvaru
$F(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 + 8 = 0$.

Řešení : Spočítáme y' :

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{x+y}{y-x} \quad \text{pro } x \neq y.$$

Položíme $y' = 0$, tedy $x + y = 0 \implies y = -x$. Dosadíme do zadání, abychom určili souřadnice případných lokálních extrémů

$$x^2 - 2x^2 - x^2 + 8 = 0 \implies 2x^2 = 8 \implies x_{1,2} = \pm 2, \quad y_{1,2} = \mp 2.$$

Dostali jsme dva body $A = [2, -2]$ a $B = [-2, 2]$. Nyní spočítáme

$$y'' = \frac{(1+y')(y-x) - (x+y)(y'-1)}{(y-x)^2}, \quad \text{takže}$$

$$y''(A) = \frac{-4}{16} < 0 \implies f(2) = -2 \text{ je lokální maximum a}$$

$$y''(B) = \frac{4}{16} > 0 \implies f(-2) = 2 \text{ je lokální minimum.}$$

■

***Příklad* 201**.* $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

Řešení :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = f_{xx}$$

Podle **Sylvestrovy** věty o kvadratických formách platí :

Je-li $\Delta_2(P) > 0$, $\begin{cases} \Delta_3(P) > 0, \Delta_1(P) > 0, \textit{pak } f(P) \textit{ je ostré lokální minimum.} \\ \Delta_3(P) < 0, \Delta_1(P) < 0, \textit{ pak } f(P) \textit{ je ostré lokální maximum.} \end{cases}$

Je-li $\Delta_2(P) < 0$, *pak v bodě* P *neexistuje lokální extrém.*

Výpočet vypadá následovně :

$$\left.\begin{array}{lll} f_x = 3x^2 + 12y = 0 & \text{neboli} & x^2 + 4y = 0, \\ f_y = 2y + 12x = 0 & \text{neboli} & y = -6x, \end{array}\right\}, \quad \begin{array}{l} \text{pak } x^2 - 24x = 0 \quad \Rightarrow \text{a} \\ x_1 = 0,\ x_2 = 24, \end{array}$$

$$f_z = 2z + 2 = 0, \quad \text{neboli} \quad z = -1$$

$$A = [0, 0, -1], \quad B = [24, -144, -1]$$

$f_{xx} = 6x$, $f_{yy} = 2, f_{zz} = 2$, $f_{xy} = 12$, $f_{xz} = 0$, $f_{yz} = 0$.

Protože $\Delta_2(A) = \begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} < 0$, v bodě A nenastává lokální extrém.

Protože $\Delta_2(B) = \begin{vmatrix} 144 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 144 > 0$, $\Delta_3(B) = \begin{vmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 288 > 0$ a

$\Delta_1(B) = 144 > 0$, je $f(B) = f(24, -144, -1) = -6913$ lokální minimum.

Můžeme se též přesvědčit přímo, že kvadratická forma $d^2f(B)$ je pozitivně definitní :
$d^2f(B) = 144\,(dx)^2 + 24\,dx\,dy + 2\,(dy)^2 + 2\,(dz)^2 = (12\,dx + dy)^2 + (dy)^2 + 2\,(dz)^2 > 0$

■

• Najděte lokální extrémy daných funkcí s danou podmínkou:

***Příklad* 202**. $z = 2(x^2 + y^2)$, jestliže $x + y = 2$.

Řešení : Geometricky se jedná o nalezení extrémů z-ové souřadnice na průsečné křivce **rotačního paraboloidu** $z = 2(x^2 + y^2)$ s **rovinou** $x + y = 2$.

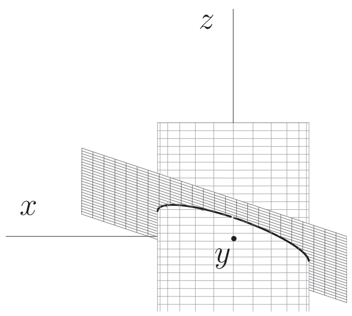
Z podmínky $x + y = 2$ vyjádříme např. $y = 2 - x$ a dosadíme do dané funkce $z(x, y) = 2(x^2 + y^2)$. Tím dostaneme $\tilde{z}(x) = z(x, 2 - x) = 2(x^2 + (2 - x)^2)$, takže $\tilde{z}(x) = 4(x^2 - 2x + 2)$.

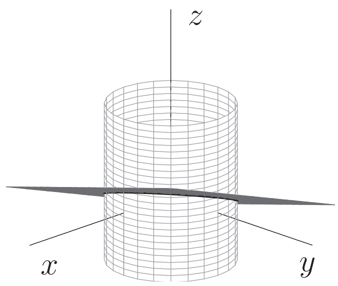
Pro funkci jedné proměnné $\tilde{z}(x)$ hledáme lokální extrém. Je tedy
$\tilde{z}'(x) = 4(2x - 2) = 0$. Odtud $x_1 = 1, y_1 = 2 - 1 = 1$ a $\tilde{z}''(x) = 8 > 0 \quad \Rightarrow$
$z(1, 1) = 4$ je lokální minimum.

■

***Příklad* 203**. $z = \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4}$, jestliže $x^2 + y^2 = 1$.

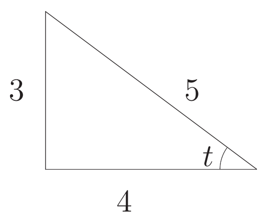
Řešení : Geometricky se jedná o nalezení extrémů z-ové souřadnice na průsečné křivce **roviny** $z = \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4}$ s **rotační válcovou plochou** $x^2 + y^2 = 1$.





Jelikož z podmínky $x^2 + y^2 = 1$ nelze jednoznačně vyjádřit ani x ani y, přejdeme do polárních souřadnic $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$, kde $r = 1$, tedy $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$.

Potom $\tilde{z} = z(\cos t, \sin t) = \dfrac{\cos t}{3} + \dfrac{\sin t}{4}$ a dále $\quad \tilde{z}' = \dfrac{d\,z}{d\,t} = \dfrac{-\sin t}{3} + \dfrac{\cos t}{4} = 0$, takže
$\operatorname{tg} t = \dfrac{3}{4}$.



Jak vidíme na obrázku je $\sin t = \pm\dfrac{3}{5}$, $\cos t = \pm\dfrac{4}{5}$.
Pro $\sin t_1 = \dfrac{3}{5}$, $\cos t_1 = \dfrac{4}{5}$ je $\quad t_1 \in (0, \dfrac{\pi}{2})$
a pro $\sin t_2 = -\dfrac{3}{5}$, $\cos t_2 = -\dfrac{4}{5}$ je $\quad t_2 \in (\pi, \dfrac{3\pi}{2})$.

Dále je $\tilde{z}'' = \dfrac{d^2\tilde{z}}{d\,t^2} = -\dfrac{\cos t}{3} - \dfrac{\sin t}{4} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{z}''(t_1) < 0,\ \tilde{z}''(t_2) > 0.$

Dospěli jsme k lokálnímu maximu $\tilde{z}(t_1) = z\Big(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\Big) = \dfrac{4}{15} + \dfrac{3}{20} = \dfrac{5}{12}$

a lokálnímu minimu $\tilde{z}(t_2) = z\Big(-\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}\Big) = -\dfrac{5}{12}.$

■

***Příklad* 204**. $z = \sin^2 x + \sin^2 y$, jestliže $y = x - \dfrac{\pi}{4}$.

Řešení :

$\tilde{z}(x) = z(x, x-\pi/4) = \sin^2 x + \sin^2(x - \frac{\pi}{4}), \quad \tilde{z}'(x) = 2\sin x\cos x + 2\sin(x-\frac{\pi}{4})\cos(x-\frac{\pi}{4}) =$

$= \sin 2x + \sin(2x - \frac{\pi}{2}) = \sin 2x + \sin 2x \cos\frac{\pi}{2} - \cos 2x \sin\frac{\pi}{2} = \sin 2x - \cos 2x$

Položíme-li $\tilde{z}'(x) = 0$, dostaneme $\sin 2x = \cos 2x$ a dále

$$2x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad x = \frac{\pi}{8} + k\,\frac{\pi}{2}, \text{ takže } \quad k_1 = 2n,\ k_2 = 2n+1.$$

Vypočteme druhou derivaci : $\tilde{z}''(x) = 2\cos 2x + 2\sin 2x$,

$$\tilde{z}''\left(\frac{\pi}{8} + 2n\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} > 0,$$

$$\tilde{z}''\left(\frac{\pi}{8} + (2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right) = -2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2} < 0.$$

Tedy $\tilde{z}\Big(\dfrac{\pi}{8} + n\pi\Big) = 2\sin^2\dfrac{\pi}{8} = 1 - \cos\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ je lokální minimum

a $\tilde{z}\Big(\dfrac{\pi}{8} + (2n+1)\dfrac{\pi}{2}\Big) = \sin^2\dfrac{5\pi}{8} + \sin^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1}{2}\Big(1 - \cos\dfrac{5\pi}{4} + 1 - \cos\dfrac{\pi}{4}\Big) =$

$= \dfrac{1}{2}\Big(2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big) = 1$ je lokální maximum.

■

***Příklad* 205**.* $z = x^2 + 2y^2$, jestliže $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$.

Řešení : Zde použijeme **Lagrangeovu funkci** : *Je-li dána funkce* $z = f(x,y)$ *a podmínka* $g(x,y) = 0$, *potom Lagrangeova funkce má vyjádření*

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y).$$

Její stacionární body získáme řešením soustavy $\left.\begin{aligned} L_x &= 0 \\ L_y &= 0 \\ L_\lambda = g(x,y) &= 0. \end{aligned}\right\}$

Funkce $z = f(x,y)$ může mít za podmínky $g(x,y) = 0$ extrémy pouze v bodech $[x,y]$, ke kterým existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že $[x,y,\lambda]$ je kritickým bodem funkce $L(x,y,\lambda)$.

V našem příkladě máme $\quad L(x,y,\lambda) = x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 - 2x + 2y^2 + 4y)$

$L_x = 2x + \lambda(2x - 2) = 0 \quad$ a odtud $\quad x = \dfrac{\lambda}{1+\lambda}$,

$L_y = 4y + \lambda(4y + 4) = 0 \quad$ a odtud $\quad y = \dfrac{-\lambda}{1+\lambda}$.

Tedy $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$, takže $\dfrac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} - \dfrac{2\lambda}{1+\lambda} + \dfrac{2\lambda^2}{(1+\lambda)^2} - \dfrac{4\lambda}{1+\lambda} = 0$,

$\dfrac{3\lambda^2}{(1+\lambda)^2} = \dfrac{6\lambda}{1+\lambda}$, $\quad \lambda \neq -1$ a následně $\dfrac{3\lambda^2}{1+\lambda} = 6\lambda$, $3\lambda^2 + 6\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda\cdot(\lambda+2) = 0.$

Zde máme $\lambda_1 = -2$, takže $x_1 = 2,\ y_1 = -2$, $A_1 = [2, -2]$ anebo
$\lambda_2 = 0$ takže $x_2 = 0,\ y_2 = 0$, $A_2 = [0, 0]$. Dále je
$L_{xx} = 2 + 2\lambda,\ L_{yy} = 4 + 4\lambda,\ L_{xy} = 0$ a odtud

$$\Delta(A_1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} > 0,\ L_{xx}(A_1) < 0, \quad L(A_1) = 12 \text{ je lokálním maximem,}$$

$$\Delta(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} > 0,\ L_{xx}(A_2) > 0, \quad L(A_2) = 0 \text{ je lokálním minimem.}$$

■

***Příklad* 206**. V rovině $x + 2y - z + 3 = 0$ najděte bod, jehož součet čtverců vzdáleností od bodů $A = [1, 1, 1]$ a $B = [2, 2, 2]$ je nejmenší.

Řešení : Hledaný bod označíme $P = [x, y, z]$ a sestavíme součet $|\overrightarrow{AP}|^2 + |\overrightarrow{BP}|^2$, který zapíšeme pomocí souřadnic bodů

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 + (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2.$$

Bod P musí ležet v rovině $x + 2y - z + 3 = 0$. Tedy tato rovnice roviny představuje vazební podmínku, která musí být splněna.

Vyjádříme-li si např. $z = x + 2y + 3$ a dosadíme-li do $f(x, y, z)$, potom funkce $f(x, y, x + 2y + 3)$ bude funkcí dvou proměnných x a y :

$$\tilde{f}(x, y) = f(x, y, x{+}2y{+}3) = (x{-}1)^2{+}(y{-}1)^2{+}(x{+}2y{+}2)^2{+}(x{-}2)^2{+}(y{-}2)^2{+}(x{+}2y{+}1)^2,$$

$$\tilde{f}_x = 2(x - 1) + 2(x + 2x + 2) + 2(x - 2) + 2(x + 2y + 1) = 8(x + y),$$
$$\tilde{f}_y = 2(y - 1) + 4(x + 2y + 2) + 2(y - 2) + 4(x + 2y + 1) = 4(2x + 5y) + 6.$$

$$\text{Položíme} \quad \left.\begin{array}{ll} \tilde{f}_x = 0, \text{ pak} & x + y = 0 \Longrightarrow y = -x, \\ \tilde{f}_y = 0, \text{ takže} & 4x + 10y = -3 \Longrightarrow -6x = -3, \end{array}\right\} x_1 = \frac{1}{2},\ y_1 = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Máme tedy } z_1 = \frac{5}{2}, \quad P = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right].$$

$$\text{Dále je} \quad \left.\begin{array}{l} \tilde{f}_{xx}(P) = 8 \\ \tilde{f}_{xy}(P) = 8 \\ \tilde{f}_{yy}(P) = 20 \end{array}\right\} \quad \text{takže } \Delta_2(P) = \begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 20 \end{vmatrix} > 0, \Delta(P)\tilde{f}_{xx} > 0$$

$$\text{a } f(P) = \frac{27}{2} \quad \text{je lokální minimum.}$$

■

Věta (Postačující podmínka existence absolutních extrémů funkce na dané množině). Je-li funkce $f(x, y)$ spojitá na neprázdné množině M, která je omezená a uzavřená, pak f nabývá maxima a minima na množině M.

Speciální případ je tzv. **vázaný extrém**, a to když $M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : g(x, y) = 0\}$, kde g je daná funkce. Pokud lze, pak z vazební podmínky $g(x, y) = 0$ vyjádříme jednu proměnnou, kterou dosadíme do dané funkce f. Získáme tak úlohu určit extrémy funkce jedné proměnné.

Postup při výpočtu absolutních extrémů.

Připomeňme, že M^0 je vnitřek a ∂M je hranice množiny M.

1. krok: Ověříme splnění předpokladů právě uvedené věty, čímž zdůvodníme existenci absolutních extrémů.
2. krok: Určíme všechny kritické body X funkce f v M^0.
3. krok: Určíme všechny body $X \in \partial M$, ve kterých může funkce f nabývat absolutních extrémů.
4. krok: Určíme hodnoty funkce f ve všech vypočítaných bodech. Největší hodnota je rovna $\max_M f$ a nejmenší hodnota je rovna $\min_M f$.

• Určete **absolutní (globální)** extrémy funkce $z = f(x, y)$ na množině M :

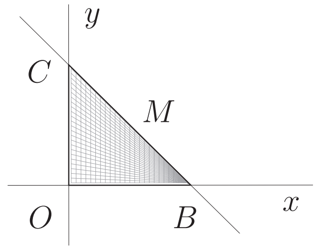
***Příklad* 207**. $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - x - y,\ M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x \geq 0, y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$

Řešení : Ověříme existenci absolutních extrémů: Daná množina M je uzavřená a omezená. Daná funkce f je spojitá v $\mathbb{E}_2$, tedy též v M. To je postačující pro existenci absolutních extrémů.

1) určíme stacionární body na vnitřku množiny M a jejich funkční hodnoty :

$$\left.\begin{array}{l} f_x \equiv 2x + y - 1 = 0 \\ f_y \equiv 2y + x - 1 = 0 \end{array}\right\} \ x = y = \frac{1}{3} \Longrightarrow$$

$$A_1 = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \in M, \quad f(A_1) = -\frac{1}{3}\ ;$$



2) určíme podezřelé body na hranici M, tj. na jednotlivých stranách $\triangle\ OBC$

$$OB : y = 0 \Longrightarrow \quad h_1(x) = f(x, 0) = x^2 - x,\ h_1'(x) = 2x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow x = \frac{1}{2},$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{2}, 0\right] \in M,\ f(A_2) = -\frac{1}{4},$$

$$OC : x = 0 \Longrightarrow \quad h_2(y) = f(0, x) = y^2 - y,\ h_2'(y) = 2y - 1 = 0 \quad \Longrightarrow y = \frac{1}{2},$$

$$A_3 = \left[0, \frac{1}{2}\right] \in M,\ f(A_3) = -\frac{1}{4},$$

$$BC : y = 1-x \Longrightarrow h_3(x) = f(x, 1-x) = x^2 + (1-x)^2 + x(1-x) - x - 1 + x = -x^2 - x,$$

$$h_3'(x) = -2x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}, \qquad \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \notin M\ ;$$

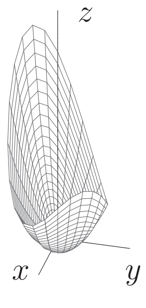
3) určíme hodnoty funkce $f(x, y)$ ve vrcholech O, B, C

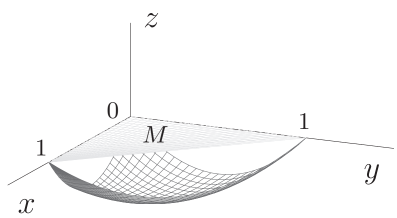
$f(O) = f(0, 0) = 0, \quad f(B) = f(1, 0) = 0, \quad f(C) = f(0, 1) = 0.$

Ze všech spočítaných funkčních hodnot vybereme nejmenší a největší .

Globální maximum nastává v bodech $O, B, C,\ f_{\max}(O) = f_{\max}(B) = f_{\max}(C) = 0$

a podobně globální minimum v bodě $A_1,\ f_{\min}(A_1) = -\dfrac{1}{3}.$





■

***Příklad* 208**. $z = x^2 + y^2 - 6x + 6y, \ M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$

Řešení : Geometricky se jedná o nalezení extrémů z-ové souřadnice na paraboloidu, která je ohraničena průnikem paraboloidu $z = x^2 + y^2 - 6x + 6y$ s válcovou plochou $x^2 + y^2 = 4$.

1) Stacionární body ve vnitřku množiny M:

$$\begin{aligned} z_x &= 2x - 6 = 0 \Longrightarrow x_1 = 3 \\ z_y &= 2y + 6 \qquad \Longrightarrow y_1 = -3 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad A = [3, -3], \quad A \notin M.$$

2) Body na hranici množiny M zapíšeme v parametrickém tvaru :

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\cos t \\ y &= 2\sin t \end{aligned}\right\}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

Pak postupně :

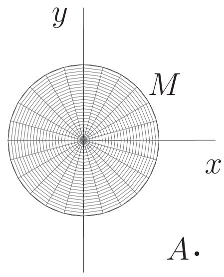
$$\tilde{z} = z(2\cos t, 2\sin t) = 4 - 12\cos t + 12\sin t,$$

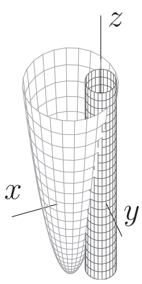
$$\frac{d\,\tilde{z}}{d\,t} = 12\sin t + 12\cos t = 0,$$

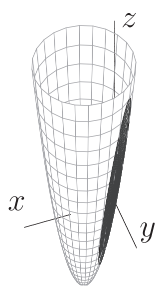
$$\Longrightarrow \qquad \sin t = -\cos t, \qquad t_1 = \frac{3}{4}\pi, \quad t_2 = \frac{7}{4}\pi,$$

$t_1 = \frac{3}{4}\pi \Longrightarrow B = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], \quad z(B) = 4 + 12\sqrt{2}$ je globální maximum a

$t_2 = \frac{7}{4}\pi \Longrightarrow C = [\sqrt{2}, -\sqrt{2}], \quad z(C) = 4 - 12\sqrt{2}$ je globální minimum.







$\blacksquare$

- Je dána funkce $f = f(x, y)$.
  - a) Napište nutnou podmínku pro lokální extrém diferencovatelné funkce n-proměnných v bodě A.
  - b) Napište postačující podmínky pro lokální minimum (resp. maximum) funkce $f(x, y)$ v bodě A.
  - c) Vyšetřete lokální extrémy dané funkce f, tj. určete jejich polohu, typ a funkční hodnotu.

209. $f(x, y) = x^2 + 12y^2 - 6xy + 4x$ [Ostré lok. min. v bodě $[-8, -2]$, $f(-8, -2) = -16$]

210. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 12x + 6y$ [Ostré lok. min. v bodě $[2, -3]$, $f(2, -3) = -25$, v bodě $[-2, -3]$ není extrém.]

211. $f(x, y) = 2y - y^2 - x\,\mathrm{e}^x$ [Ostré lok. max. v bodě $[-1, 1]$, $f = 1 + 1/\mathrm{e}$]

212. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2x^2 - 2xy + 6$ [Ostré lok. min. v bodě $[2, 2]$, $f(2, 2) = 2$, v bodě $[0, 0]$ není extrém.]

213. $f(x, y) = x^3 + 3y^2 - 6xy - 9x + 8$ [Ostré lok. min. v bodě $[3, 3]$, $f(3, 3) = -19$, v bodě $[-1, -1]$ není extrém.]

214. $f(x, y) = x^2 + 2x + y^4 - 4y + 7$ [Ostré lok. min. v bodě $[-1, 1]$, $f(-1, 1) = 3$]

215. $f(x,y) = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$ [Ostré lok. min. v bodě $[5,2]$, $(f(5,2) = 30)$]

216. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6\ln x$ $\left[f_{\min}(2,-1) = 3 - 6\ln 2, \text{ bod } [-2,1] \notin D(f) \right]$

• Určete lokální extrémy funkce :

217. $z = x^2 + y - x\sqrt{y} - 6x + 12$ $[z_{\min}(4,4) = 0]$

218. $z = x^2 + y^2 + 6x - 4y$ $[z_{\min}(-3,2) = -13]$

219. $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$ $[z_{\max}(0,0) = 0]$

220. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$ $[z_{\min}\left(1, \frac{1}{2}\right) = 4$, v bodě $[0,0]$ není extrém$]$

221. $z = \mathrm{e}^{x/2}(x + y^2)$ $\left[z_{\min}(-2,0) = -\frac{2}{e} \right]$

222. $z = x^3 + y^3 + \dfrac{9}{2}x^2 - 3y - 12x$ $\left[z_{\min}(1,1) = -\frac{17}{2},\ z_{\max}(-4,-1) = 58 \right.$ v bodech$[1,-1], [-4,1]$ neexistují extrémy$]$

223.* $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 13 = 0$ $[z_{\min}(2,-3) = 0,\ z_{\max}(2,-3) = 2]$

224.* $x^2 + xy - z^2 + z + y + 5 = 0$ [ve stac.bodech $[-1,2,3]$, $[-1,2,-2]$ neexistují extrémy]

225.* $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y + 6z$ $[f(2,-1,-3)) = -14$, lok.min.$]$

226.* $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^3 - 12yz - 6x$ $[f(3,36,12) = -873$, lok.min., v bodě $[3,0,0]$ není extrém$]$

227.* $z = \ln(xy) + x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7$

[lok.max. v bodě $A_1 = \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$,
lok.min. v bodě $A_2 = \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$,
další stac.b. $A_3 = \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $A_4 = \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$]

228. a) Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy + 3x + y + 1$.
b) Zdůvodněte existenci a najděte absolutní extrémy této funkce na úsečce AB, kde $A = [0,2], B = [1,1]$.

[a) lokální $f_{\min}(-1,-1) = -1$,
b) $\mathrm{f}_{\min}(1/2, 3/2) = 6$, $\mathrm{f}_{\max}(0,2) = \mathrm{f}_{\max}(1,1) = 7$]

• Je dána funkce f a množina M.
a) Zdůvodněte existenci absolutních extrémů funkce f na dané množině M.
b) Absolutní extrémy vyšetřete, tj. stanovte jejich polohu a vypočítejte hodnotu maxima i minima funkce f na množině M.

229. $f(x,y) = x + \ln x - y^2$, $M = \{ [x,y] \in \mathbb{E}_2 ;\ y = x + 1,\ 1/4 \leq x \leq 1 \}$

$[f_{\min}(1,2) = -3,\ f_{\max}(1/2, 3/2) = -7/4 - \ln 2 \doteq -2{,}4,$
$f(1/4, 5/4) = -21/16 - \ln 4 \doteq -2{,}7$ není extrém$]$

230. $f(x,y) = x^2 + xy - 3x - y$, $M = \{ [x,y] \in \mathbb{E}_2 ;\ x + y \leq 3,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \}$.

$[f_{\min}(0,3) = -3,\ f_{\max}(0,0) = f_{\max}(3,0) = 0]$

231. $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2$, $M = \{ [x,y] \in \mathbb{E}_2 ;\ x^2 + y^2 \leq 9,\ y \geq 0 \}$

$[f_{\min}(1,0) = -1,\quad f_{\max}(-3,0) = 15$
Pro vyšetření bodů na hranici můžete užít polárních souřadnic, úlohu však lze řešit i bez nich.]

• Určete globální extrémy funkce $z = f(x, y)$ na množině M :

232. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy,\ M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : |x| + |y| \leq 1\}$

$$\left[\begin{array}{r} \text{glob.min. } f(0,0) = 0 \\ \text{glob.max. } f(1,0) = f(0,1) = \\ = f(-1,0) = f(0,-1) = 1 \end{array}\right]$$

233. $f(x, y) = x^2 - y^2,\ M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ (použijte polární souřadnice)

$$\left[\begin{array}{r} \text{glob.min. } f(0,\pm 2) = -4 \\ \text{glob.max. } f(\pm 2, 0) = 4 \end{array}\right]$$

234. $f(x, y) = xy(x - a)(y - b),\ M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b\}$

$$\left[\begin{array}{r} \text{glob.max. } f(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) = \frac{a^2b^2}{16} \\ \text{glob.min. } f(0,0) = f(a,0) = f(0,b) = f(a,b) = 0 \end{array}\right]$$

235. $f(x, y) = xy(2 - x - y),\ M = \{[x, y] \in E_2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$

$$\left[\begin{array}{r} \text{glob.max. } f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \\ \text{glob.min. } f(x,0) = f(0,y) = 0 \end{array}\right]$$

236. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 1,\ M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x \leq 0,\ y \geq 0, x - y + 3 \geq 0\}$

$$\left[\begin{array}{r} \text{glob.min. } f(-\frac{1}{2}, 0) = -\frac{5}{4} \\ \text{glob.max. } f(0,3) = 11 \end{array}\right]$$

III. Dvojný a trojný integrál

III.1. Existence

***Příklad* 237**. Rozhodněte, zda daný integrál $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ existuje, jestliže :

a) $D : x^2 + (y-1)^2 \le \dfrac{1}{4}$;

b) $D : x^2 + y^2 \le 1$;

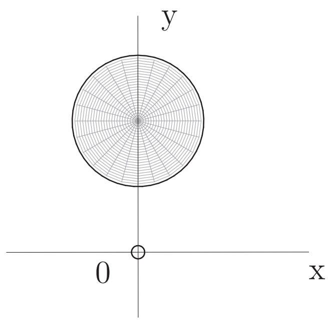
c) $D : x^2 + (y-1)^2 \le 2$.

Řešení : Budeme vycházet z toho, že dvojný a trojný integrál je definován pouze pro funkce omezené na D a dále budeme používat větu o existenci:

Nechť D je měřitelná (v Jordanově smyslu) množina v $\mathbb{E}_2$ (resp. $\mathbb{E}_3$) a funkce f je omezená na D. Nechť množina bodů nespojitosti funkce f v D má míru 0. Potom f je integrovatelná v D, tj. integrál

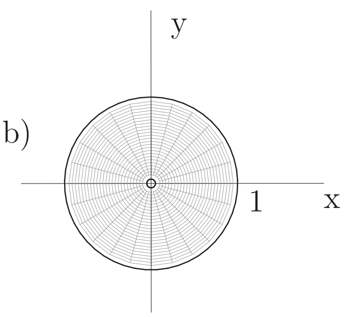
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{(resp. } \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz) \qquad \textit{existuje.}$$

a)



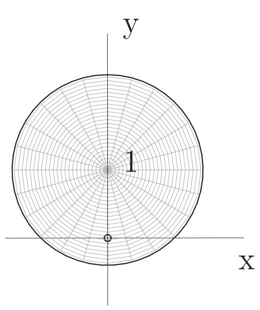
Množina D je měřitelná (je omezená a její hranice má míru 0) a $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ je spojitá a omezená na D. Integrál existuje.

b)



Množina D je měřitelná, ale $f(x,y)$ není omezená v D, protože $[0,0] \in D$ a $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1}{x^2+y^2} = \infty$. Integrál neexistuje.

c)



$f(x,y)$ opět není omezená na D $\quad ([0,0] \in D)$, integrál neexistuje.

■

***Příklad* 238**. Je dána množina $D : x^2 + y^2 \le 4$. Vyšetřete, zda existují integrály :

$$\text{a)}\ \iint_D \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy, \quad \text{b)}\ \iint_D \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}, \quad \text{c)}\ \iint_D \frac{dx\,dy}{x^2+y^2+1},$$

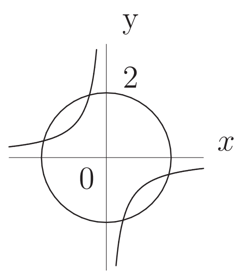
$$\text{d)}\ \iint_D \frac{1}{1+xy}\,dx\,dy, \quad \text{e)}\ \iint_D \frac{e^{xy}-1}{xy}\,dx\,dy, \quad \text{f)}\ \iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy.$$

Řešení :

a) existuje, $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1,$

b) neexistuje, $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x}{x^2+y^2} = \infty,$

c) existuje, $\displaystyle\frac{1}{x^2+y^2+1}$ je spojitá v celém $\mathbb{E}_2$,



d) neexistuje, protože např. $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[-1,1]} \left|\frac{1}{1+xy}\right| = \infty,$

e) existuje, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{xk}-1}{xk} = \lim_{y\to 0} \frac{e^{yk}-1}{yk} = 1,$ kde $k \in \langle -2, 2\rangle$

f) neexistuje, protože např. $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[1,-1]} \frac{1}{(x+y)^2} = \infty.$

■

***Příklad* 239**. Vyšetřete, zda existují integrály :

$$\text{a)}\ \iiint_W \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+z)^3}, \quad W : 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 0,\ -2 \le z \le 2,$$

$$\text{b)}\ \iiint_W (x+yz)\,dx\,dy\,dz, \quad W : x^2 \le y \le 2,\ z \ge 3,$$

$$\text{c)}\ \iiint_W \frac{1}{x^2+y^2+z^2-9}\,dx\,dy\,dz, \quad W : 1 < x^2+y^2+z^2 < 4.$$

Řešení :

a) neexistuje, protože funkce $\displaystyle\frac{1}{(1+x+z)^3}$ není omezená v W, $\{1+x+z=0\} \cap W \ne \emptyset$,

b) neexistuje, protože W není měřitelná v $\mathbb{E}_3$,

c) existuje, $x^2+y^2+z^2-9 \ne 0$ v W.

■

III.2. Fubiniova věta pro dvojný integrál

• Vypočítejte dvojné integrály na daných obdélníkových množinách :

***Příklad* 240**. $I = \displaystyle\iint_D y^2 \sin^2 x\,dx\,dy, \quad D : 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 1 \le y \le 2$

Řešení : $\quad I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx \cdot \int_1^2 y^2\,dy = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx \cdot \Big[\frac{y^3}{3}\Big]_1^2 =$

$= \frac{1}{2}\Big[x - \frac{\sin 2x}{2}\Big]_0^{\pi/2} \cdot \Big(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\Big) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{7}{3} = \frac{7\pi}{12}.$

■

Příklad 241. $I = \iint_D \frac{xye^{x^2}}{y^2+3}\,dx\,dy, \quad D: 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3$

Řešení :

$$I = \int_0^2 xe^{x^2}\,dx \cdot \int_0^3 \frac{y}{y^2+3}\,dy = \left| \begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_0^4 e^t\,dt \cdot \frac{1}{2}\Big[\ln|y^2+3|\Big]_0^3 =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[e^t\Big]_0^4 \cdot \frac{1}{2}\Big(\ln 12 - \ln 3\Big) = \frac{1}{2}(e^4-1)\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{12}{3} = \frac{1}{4}(e^4-1)\ln 4 = \frac{1}{2}(e^4-1)\ln 2.$$

■

Příklad 242. $I = \iint_D \frac{dx\,dy}{x^2-2xy+y^2}, \quad D: 3 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 2$

Řešení :

$$I = \int_0^2 \Big(\int_3^4 \frac{dx}{(x-y)^2}\Big)\,dy = \int_0^2 \Big[\frac{-1}{x-y}\Big]_3^4 dy = \int_0^2 \Big(\frac{-1}{4-y} + \frac{1}{3-y}\Big)\,dy =$$

$$= \int_0^2 \Big(\frac{1}{y-4} - \frac{1}{y-3}\Big)\,dy = \Big[\ln|y-4| - \ln|y-3|\Big]_0^2 = \ln 2 - \ln 1 - \ln 4 + \ln 3 =$$

$$= \ln\frac{2\cdot 3}{4} = \ln\frac{3}{2}.$$

■

Příklad 243. $I = \iint_D \frac{dx\,dy}{(x-2y+3)^2}, \quad D: 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1$

Řešení :

$$I = \int_0^1 \Big[\frac{-1}{x-2y+3}\Big]_0^2 dy = \int_0^1 \Big(\frac{-1}{5-2y} + \frac{1}{3-2y}\Big)\,dy = \int_0^1 \Big(\frac{1}{2y-5} - \frac{1}{2y-3}\Big)\,dy =$$

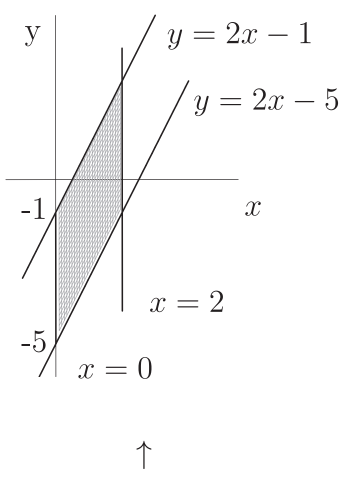
$$= \Big[\frac{1}{2}\ln|2y-5| - \frac{1}{2}\ln|2y-3|\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}.$$

■

• Množina D je omezená zadanými křivkami. Načrtněte ji a popište pomocí nerovnic.

Příklad 244. $2x - y = 1,\ 2x - y = 5,\ x = 0,\ x = 2$

Řešení :



$$D: \begin{cases} 2x - 5 \le y \le 2x - 1 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

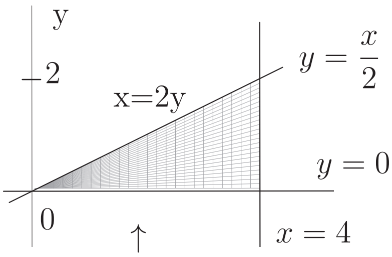
↑ Šipka označuje možný směr vnitřní integrace při výpočtu dvojného integrálu na D pomocí Fubiniovy věty.

■

***Příklad* 245**. $y = 0,\ x = 2y,\ x = 4$

Řešení :

$\rightarrow$

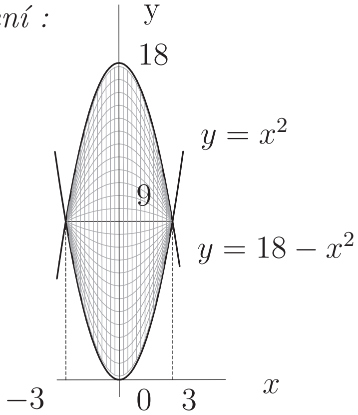


1) $\uparrow$ $\quad D : \begin{cases} 0 \le y \le \dfrac{x}{2} \\ 0 \le x \le 4 \end{cases}$ $\quad$ nebo $\quad$ 2) $\rightarrow$ $\quad D : \begin{cases} 2y \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$

■

***Příklad* 246**. $y = 18 - x^2,\ y = x^2$

Řešení :



$18 - x^2 = x^2 \longrightarrow x^2 = 9 \longrightarrow x_{1,2} = \pm 3$

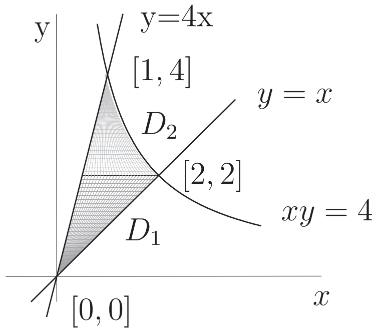
$\uparrow \qquad D : \begin{cases} x^2 \le y \le 18 - x^2 \\ -3 \le x \le 3 \end{cases}$

■

***Příklad* 247**. $xy = 4,\ y = x,\ y = 4x,\ (x \ge 0)$

Řešení :

$\rightarrow$



$D = D_1 \cup D_2$

$\rightarrow$

$D_1 : \begin{cases} \dfrac{y}{4} \le x \le y \\ 0 \le y \le 2 \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} \dfrac{y}{4} \le x \le \dfrac{4}{y} \\ 2 \le y \le 4 \end{cases}$

■

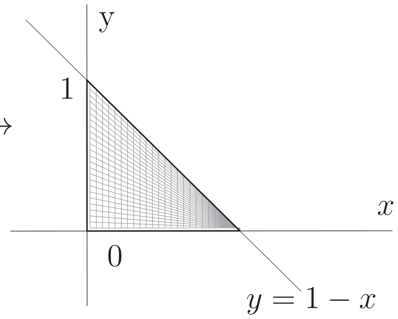
• Zaměňte pořadí integrace :

***Příklad* 248**. $I = \displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} f(x, y)\, dy \Big)\, dx$

Řešení :

1) $\begin{cases} 0 \le y \le 1 - x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$ $\quad \rightarrow$

$\uparrow$



2) $\begin{cases} 0 \le x \le 1 - y \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

$\rightarrow$

$\uparrow$

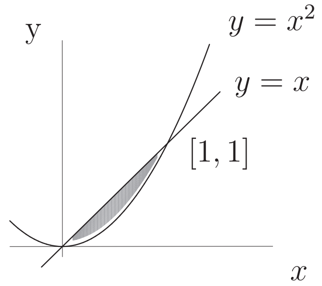
$$I = \int_0^1 \Big(\int_0^{1-y} f(x,y)\, dx \Big)\, dy. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 249**. $I = \int_0^1 \Big(\int_{x^2}^{x} f(x,y)\, dy \Big)\, dx$

Řešení :

1) $\begin{cases} x^2 \le y \le x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$ $\rightarrow$

$\uparrow$



2) $\begin{cases} y \le x \le \sqrt{y} \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

$\rightarrow$

$\uparrow$

$$I = \int_0^1 \Big(\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dx \Big)\, dy. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 250**. $I = \int_0^4 \Big(\int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x}} f(x,y)\, dy \Big)\, dx$

Řešení :

1) $\begin{cases} \sqrt{4x-x^2} \le y \le \sqrt{4x} \\ 0 \le x \le 4 \end{cases}$

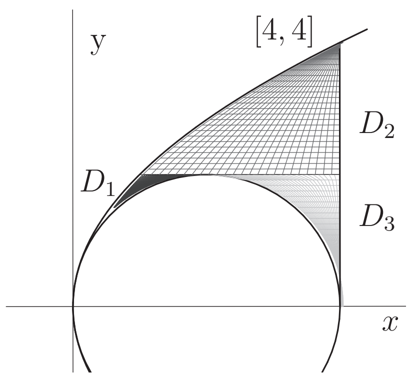
$\uparrow$

Množina D je omezená křivkami :
$y = \sqrt{4x - x^2}$, což je rovnice horní poloviny kružnice $(x-2)^2 + y^2 = 4$,
$y = \sqrt{4x}$, což je rovnice horní větve paraboly $y^2 = 4x$,
$x = 4, \quad x = 0.$

2) Ve směru osy x rozdělíme množinu D na tři části tak, aby tyto části byly elementárními množinami.

$\rightarrow$ $\qquad D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$

$\rightarrow$



$$D_1 : \begin{cases} \dfrac{y^2}{4} \le x \le 2 - \sqrt{4-y^2} \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

$$D_2 : \begin{cases} \dfrac{y^2}{4} \le x \le 4 \\ 2 \le y \le 4 \end{cases}$$

$$D_3 : \begin{cases} 2 + \sqrt{4-y^2} \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

$\uparrow$

$$I = \int_0^2 \Big(\int_{\frac{y^2}{4}}^{2-\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\, dx \Big)\, dy + \int_2^4 \Big(\int_{\frac{y^2}{4}}^{4} f(x,y)\, dx \Big)\, dy + \int_0^2 \Big(\int_{2+\sqrt{4-y^2}}^{4} f(x,y)\, dx \Big)\, dy.$$

Tento příklad ukazuje, že původní směr vnitřní integrace byl mnohem výhodnější.

$\blacksquare$

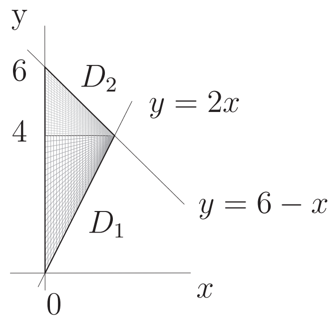
***Příklad* 251**. $I = \displaystyle\int_0^4 \Big(\int_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx \Big)\,dy + \int_4^6 \Big(\int_0^{6-y} f(x,y)\,dx \Big)\,dy$

Řešení :

$D = D_1 \cup D_2$

$D_1 : \begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{y}{2} \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$

$D_2 : \begin{cases} 0 \le x \le 6-y \\ 4 \le y \le 6 \end{cases}$



Nový směr vnitřní integrace dovoluje vyjádřit celou množinu D bez předcházejícího dělení :

$D : \begin{cases} 2x \le y \le 6-x \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$

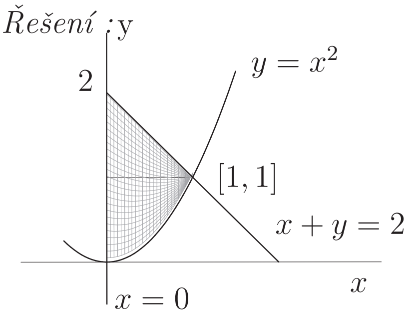
$$I = \int_0^2 \Big(\int_{2x}^{6-x} f(x,y)\,dy \Big)\,dx.$$

■

• Rozložte pomocí Fubiniovy věty dvojný integrál $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ na dvojnásobné integrály, jestliže množina $D \subset \mathbb{E}_2$ je omezená křivkami :

***Příklad* 252**. $x = 0,\ y = x^2,\ x + y = 2\ (x \ge 0)$

Řešení :

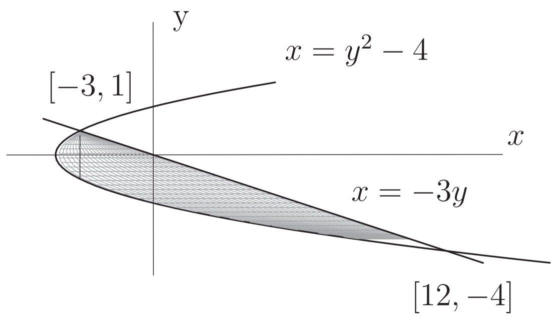


$$\int_0^1 \Big(\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,dy \Big)\,dx =$$
$$= \int_0^1 \Big(\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx \Big)\,dy + \int_1^2 \Big(\int_0^{2-y} f(x,y)\,dx \Big)\,dy.$$

■

***Příklad* 253**. $x = y^2 - 4,\ x = -3y$

Řešení : Vyřešením soustavy $\begin{cases} x = y^2 - 4 \\ x = -3y \end{cases}$ dostaneme průsečíky paraboly $x = y^2 - 4$ s přímkou o rovnici $x = -3y$.



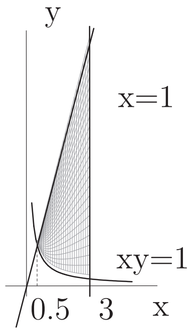
$$\int_{-4}^1 \Big(\int_{y^2-4}^{-3y} f(x,y)\,dx \Big)\,dy =$$
$$= \int_{-4}^{-3} \Big(\int_{-\sqrt{x+4}}^{\sqrt{x+4}} f(x,y)\,dy \Big)\,dx +$$
$$+ \int_{-3}^{12} \Big(\int_{-\sqrt{x+4}}^{-\frac{x}{3}} f(x,y)\,dy \Big)\,dx.$$

■

• Načrtněte množinu D a vypočítejte dané integrály :

***Příklad* 254**. $I = \displaystyle\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy, \quad D : xy = 1,\ y = 4x,\ x = 3$

Řešení :

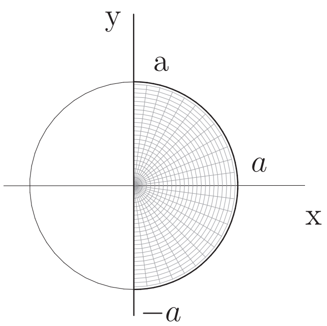


$$\int_{1/2}^{3}\Big(\int_{1/x}^{4x}\frac{x^2}{y^2}\,dy\Big)\,dx=\int_{1/2}^{3}x^2\Big[-\frac{1}{y}\Big]_{1/x}^{4x}dx=$$
$$=\int_{1/2}^{3}x^2\Big(-\frac{1}{4x}+x\Big)\,dx=\int_{1/2}^{3}\Big(x^3-\frac{x}{4}\Big)\,dx=$$
$$=\Big[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{8}\Big]_{1/2}^{3}=\frac{1225}{64}.$$

■

***Příklad* 255**. $I=\iint_D x^3y^2\,dx\,dy,\quad D: x^2+y^2=a^2,\ x=0\ (x\geq 0)$

Řešení :



$$\int_{-a}^{a}\Big(\int_{0}^{\sqrt{a^2-y^2}}x^3y^2\,dx\Big)\,dy=\int_{-a}^{a}y^2\Big[\frac{x^4}{4}\Big]_0^{\sqrt{a^2-y^2}}dy=$$
$$=\int_{-a}^{a}\frac{y^2}{4}(a^2-y^2)^2\,dy=\frac{1}{4}\cdot 2\int_0^a y^2(a^4-2a^2y^2+y^4)\,dy=$$
$$=\frac{1}{2}\Big[a^4\frac{y^3}{3}-2a^2\frac{y^5}{5}+\frac{y^7}{7}\Big]_0^a=\frac{1}{2}a^7\Big(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{1}{7}\Big)=\frac{4}{105}a^7.$$

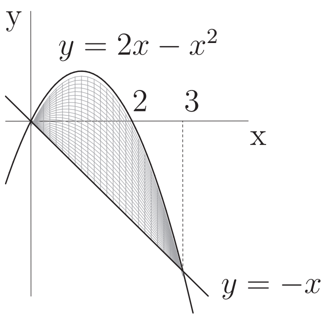
■

***Příklad* 256**. $I=\iint_D\frac{dx\,dy}{x^2+1},\quad D: y=2x-x^2,\ y=-x$

Řešení : $y=2x-x^2$ neboli $y-1=-(x-1)^2$ je rovnice paraboly s vrcholem $[1,1]$.

Průsečíky paraboly s přímkou $y=-x$ najdeme tak, že zjistíme jejich x-ové souřadnice :

$\begin{cases} y=2x-x^2\\ y=-x\end{cases}$ po dosazení $-x=2x-x^2 \longrightarrow x(x-3)=0 \longrightarrow x_1=0,\ x_2=3$

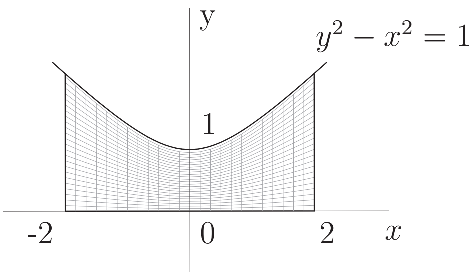


$$\int_0^3\Big(\int_{-x}^{2x-x^2}\frac{dy}{x^2+1}\Big)\,dx=\int_0^3\frac{1}{x^2+1}(2x-x^2+x)\,dx=$$
$$=\int_0^3\frac{-x^2+3x}{x^2+1}\,dx=-\int_0^3\frac{x^2+1-3x-1}{x^2+1}\,dx=$$
$$=-\int_0^3\Big(1-3\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\Big)\,dx=-\Big[x-\frac{3}{2}\ln|x^2+1|-$$
$$-\operatorname{arctg}x\Big]_0^3=\frac{3}{2}\ln 10+\operatorname{arctg}3-3.$$

■

***Příklad* 257**. $I=\iint_D(x+y)\,dx\,dy,\quad D: y^2-x^2\leq 1,\ y\geq 0,\ x\in\langle -2,2\rangle$

Řešení : $y^2-x^2=1$ je rovnice hyperboly .

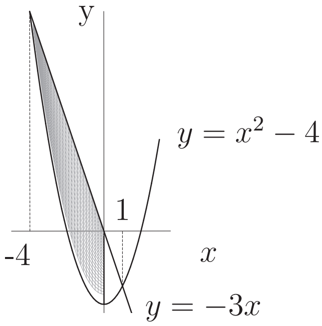


$$\int_{-2}^{2}\Big(\int_{0}^{\sqrt{1+x^2}}(x+y)\,dy\Big)\,dx = \int_{-2}^{2}\Big[xy+\frac{y^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{1+x^2}}dx =$$
$$= \int_{-2}^{2}\Big(x\sqrt{1+x^2}+\frac{1+x^2}{2}\Big)\,dx = \underbrace{\int_{-2}^{2}x\sqrt{1+x^2}\,dx}_{=\ 0\ (\text{lichá funkce})} +$$
$$+\frac{2}{2}\int_0^2 \underbrace{(1+x^2)}_{\text{sudá funkce}}\,dx = \Big[x+\frac{x^3}{3}\Big]_0^2 = \frac{14}{3}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 258**. $I = \displaystyle\iint_D (1+x)\,y\,dx\,dy, \quad D: y = x^2 - 4,\ y = -3x,\ x \le 0$

Řešení : Stanovíme x-ové souřadnice průsečíků paraboly s přímkou :

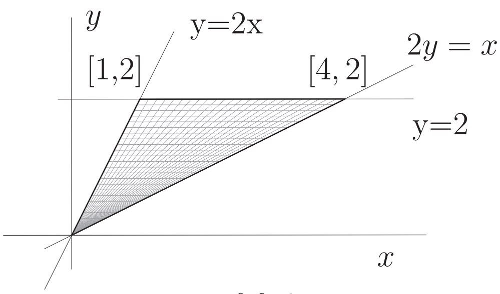
$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = -3x \end{cases}. \quad \text{Po dosazení} \quad \begin{array}{l} x^2 + 3x - 4 = 0 \\ x_1 = 1, x_2 = -4 \end{array}$$



$$\int_{-4}^{0}\Big(\int_{x^2-4}^{-3x}(1+x)y\,dy\Big)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-4}^{0}(1+x)\Big[y^2\Big]_{x^2-4}^{-3x}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-4}^{0}(1+x)(9x^2-(x^2-4)^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-4}^{0}(-x^5-x^4+$$
$$+17x^3+17x^2-16x-16)\,dx = \frac{1}{2}\Big[-\frac{x^6}{6}-\frac{x^5}{5}+\frac{17x^4}{4}+$$
$$+\frac{17x^3}{3}-8x^2-16x\Big]_{-4}^{0} = \frac{-1376}{15}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 259**. $\displaystyle\iint_D (x+1)\,dx\,dy, \quad D: y = 2x,\ 2y = x,\ y = 2$

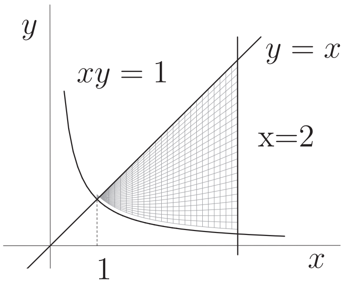
Řešení :



$$\iint_D (x+1)\,dx\,dy = \int_0^2\Big(\int_{y/2}^{2y}(x+1)\,dx\Big)\,dy =$$
$$\int_0^2\Big[\frac{x^2}{2}+x\Big]\,dy = \int_0^2\Big[\frac{4y^2}{2}+2y-\frac{y^2}{8}-\frac{y}{2}\Big]\,dy =$$
$$\int_0^2\Big[\frac{15}{8}y^2+\frac{3}{2}y\Big]\,dy \cdots = 8. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 260**. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{y}\,dx\,dy, \quad D: xy = 1,\ y = x,\ x = 4,\ x \ge 0$

Řešení :



$$\int_1^4\Big(\int_{1/x}^{x}\frac{1}{y}\,dy\Big)\,dx = \int_1^4\Big[\ln|y|\Big]_{1/x}^{x}dx =$$
$$= \int_1^4\Big(\ln x - \ln\frac{1}{x}\Big)\,dx = 2\int_1^4 \ln x\,dx = \ (\text{per partes})$$
$$= \left|\begin{array}{ll} u = \ln x, & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x}, & v = x \end{array}\right| = 2\Big[x\ln x - x\Big]_1^4 = 8\ln 4 - 6. \qquad \blacksquare$$

261. $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^2}, \quad D: x = 3,\ x = 4,\ y = 1,\ y = 2$ $\qquad \Big[\ln\frac{25}{24}\Big]$

262. $\displaystyle\iint_D \cos(x+y)\,dx\,dy, \quad D: x=0,\ y=\pi,\ y=x$ $\quad[-2]$

263. $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy, \quad D: y=0,\ y=1-x,\ y=1+x$ $\quad\left[\frac{1}{3}\right]$

264. $\displaystyle\iint_D (x+2y)\,dx\,dy, \quad D: x=y^2-4,\ x=5$ $\quad[50{,}4]$

265. $\displaystyle\iint_D xy\,dx\,dy, \quad D: y=x-4,\ y^2=2x$ $\quad[90]$

266. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{y+1}\,dx\,dy, \quad D: x=0,\ y=2,\ y=4,\ y^2=x$ $\quad\left[4+\ln\frac{5}{3}\right]$

267. $\displaystyle\iint_D \frac{x}{y^2}\,dx\,dy, \quad D: y^2=x,\ y^2=4x,\ y=2$ $\quad\left[\frac{5}{4}\right]$

268. $\displaystyle\iint_D (xy+y)\,dx\,dy, \quad D: x=1,\ x=2,\ xy=4,\ y=0$ $\quad[4+8\ln 2]$

269. Převeďte dvojný integrál oběma způsoby na dvojnásobný (tj. obě pořadí integrace) a integrál vypočítejte. $D=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ y\ge\ln x,\ x\ge 1,\ y\le 1\}$, $f(x,y)=1/x$ $\quad\left[\frac{1}{2}\right]$

• Omezená množina $D\subset\mathbb{E}_2$ je zadána nerovnicemi nebo hraničními křivkami a je dána funkce $f(x,y)$

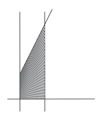
a) Načrtněte množinu D s popisem os, měřítkem, popisem křivek a vyznačením bodů, které jsou pro řešení úlohy důležité.

b) Ověřte splnění předpokladů pro použití Fubiniovy věty.

c) Množinu D vyjádřete ve tvaru elementárního oboru integrace vzhledem ke vhodně zvolené ose.

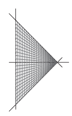
d) Vypočítejte $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

270. $D=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le\ 2x+1\}, \quad f(x,y)=x^2y$



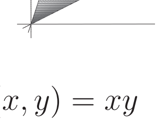
$\left[\begin{array}{l} c)\ x\in\langle 0,1\rangle \\ \quad y\in\langle 0,2x+1\rangle \\ d)\ \frac{16}{15} \end{array}\right]$

271. $D=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ x+y\le\pi,\ x-y\le\pi,\ x\ge 0\} \quad f(x,y)=\sin(x+y)$ $[\pi]$



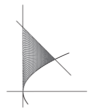
$\left[\begin{array}{l} c)\ x\in\langle 0,1\rangle \\ \quad y\in\langle x-\pi,-x+\pi\rangle \\ d)\ \pi \end{array}\right]$

272. $D\subset\mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y=x/2,\ y=3x,\ y=2 \quad f(x,y)=x\sqrt{y}$



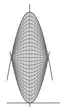
$\left[\begin{array}{l} c)\ y\in\langle 0,2\rangle \\ \quad x\in\langle y/3,2y\rangle \\ d)\ \frac{40\sqrt{2}}{9} \end{array}\right]$

273. $D=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ x\ge 0,\ x+y\le\ 2,\ x\le y^2\} \quad f(x,y)=xy$



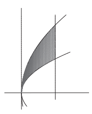
$\left[\begin{array}{l} c)\; x \in \langle 0, 1\rangle \\ \quad y \in \langle \sqrt{x}, 2 - x\rangle \\ d)\; \dfrac{7}{24} \end{array}\right]$

274. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2\,;\ y \geq x^2,\ y \leq 12 - x^2\} \quad f(x, y) = |x|$



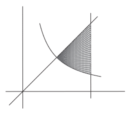
$\left[\begin{array}{l} c)\; -\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6} \\ \qquad x^2 \leq y \leq 12 - x^2 \\ d)\; 36 \end{array}\right]$

275. $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x = 1 \quad f(x, y) = 2xy$



$\left[\begin{array}{l} c)\quad 0 \leq x \leq 1 \\ \quad \sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x} \\ d)\; 1 \end{array}\right]$

276. $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y = x$, $y = 1/x$, $y = 2 \quad f(x, y) = xy^2$

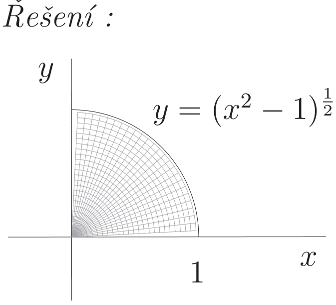


$\left[\begin{array}{l} c)\quad 0 \leq x \leq 2 \\ \quad 1/x \leq y \leq x \\ d)\; \dfrac{13}{5} \end{array}\right]$

III.3. Substituční metoda pro dvojný integrál

***Příklad* 277**. Rozhodněte, zda integrál $\displaystyle\iint_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy$, kde $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 :$ $x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0,\ x \geq 0\}$ existuje a v kladném případě jej spočítejte.

Řešení :



Funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ není definována na ose y (tj. $x = 0$ je množina míry 0), množina D je měřitelná a funkce f je na D omezená, neboť $|\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}| \leq \dfrac{\pi}{2}$ pro všechny body $[x, y] \in \mathbb{E}_2$. Proto daný integrál existuje. Víme, že

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{B(u,v)} f\Big(x(u, v), y(u, v)\Big)|J|\,du\,dv.$$

Zde použijeme transformaci do polárních souřadnic.

$$\iint_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy = \left|\begin{array}{lcl} x = r\cos\varphi & & 0 \leq r \leq 1 \\ y = r\sin\varphi & | & 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ J = r & & \end{array}\right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^1 \varphi\cdot r\,dr\Big)\,d\varphi =$$

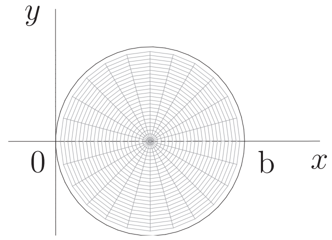
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \, d\varphi \cdot \int_0^1 r \, dr = \left[\frac{\varphi^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{16}. \qquad \blacksquare$$

• Vypočítejte integrály :

***Příklad* 278.** $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy,\ D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x^2+y^2-bx \le 0\},\ b>0$

Řešení :

$$D : \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{b^2}{4}$$



$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy = \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ J = r \end{array} \quad \Big| \quad \begin{array}{c} x^2+y^2 \le bx \longrightarrow r^2 \le br\cos\varphi \\ 0 \le r \le b\cos\varphi \longrightarrow \cos\varphi \ge 0 \\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{b\cos\varphi} r \cdot r\, dr \right) d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{b\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} b^3 \cos^3\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3} b^3 \int_0^{\pi/2} \cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{2}{3} b^3 \cdot \frac{2}{3\cdot 1} \cdot 1 = \frac{4}{9} b^3. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 279.** $\displaystyle\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\, dx\, dy,\ D : x^2+y^2 \le a^2,\ x \le 0$

Řešení :

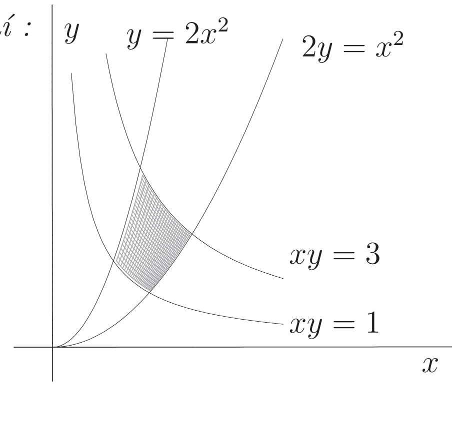
$$\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\, dx\, dy = \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ J = r \end{array} \quad | \quad \begin{array}{c} 0 \le r \le a \\ \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^a \ln(1+r^2) \cdot r\, dr\, d\varphi = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \cdot \int_0^a \ln(1+r^2) r\, dr = \left[\begin{array}{c} 1+r^2 = t \\ 2r\, dr = dt \end{array} \right] =$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_1^{1+a^2} \ln t\, dt = \frac{\pi}{2}\Big[t\ln t - t\Big]_1^{1+a^2} = \frac{\pi}{2}\Big((1+a^2)\ln(1+a^2) - a^2\Big). \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 280.** $\displaystyle\iint_D x^3\, dx\, dy$, kde D je množina ohraničená křivkami $xy = 1,\ xy = 3,$ $y = \dfrac{x^2}{2},\ y = 2x^2.$

Řešení :



Použijeme transformaci $\left\{ \begin{array}{l} xy = u \\ \dfrac{y}{x^2} = v \end{array} \right.$.

Potom množina D bude mít vyjádření

$$1 \le u \le 3, \quad \frac{1}{2} \le v \le 2.$$

Nyní spočítáme x a y pomocí u a v a dále Jakobián

$$y = \frac{u}{x},\ y = vx^2, \quad \frac{u}{x} = vx^2 \longrightarrow x^3 = \frac{u}{v}, \quad x = \sqrt[3]{\frac{u}{v}} \longrightarrow y = v\sqrt[3]{\frac{u^2}{v^2}} = \sqrt[3]{u^2 v}\ ;$$

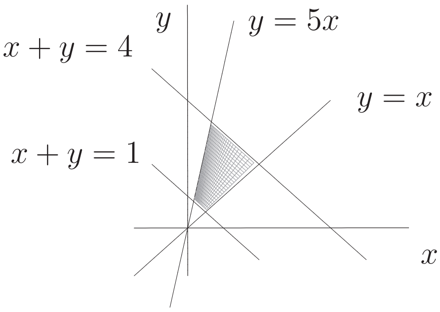
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{-\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{4}{3}} \\ \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{9}v^{-1} + \frac{2}{9}v^{-1} = \frac{1}{3v} \neq 0.$$

Užitím věty o substituci dostaneme

$$\iint_D x^3\,dx\,dy = \int_{1/2}^{2}\Big(\int_1^3 \frac{u}{v}\cdot\frac{1}{3v}\,du\Big)\,dv = \frac{1}{3}\int_{1/2}^{2}\frac{1}{v^2}\,dv \cdot \int_1^3 u\,du = \frac{1}{3}\Big[-\frac{1}{v}\Big]_{\frac{1}{2}}^{2}\cdot\Big[\frac{u^2}{2}\Big]_1^3 =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot 4 = 2. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 281**. $\iint_D (2x-y)\,dx\,dy,\ D : x+y=1,\ x+y=4,\ y=x,\ y=5x$

Řešení :



Nejvhodnější substituce bude následující

$$\left.\begin{array}{r} x+y = u \\ \frac{y}{x} = v \end{array}\right\},\quad 1 \le u \le 4,\ 1 \le v \le 5.$$

Potom $\left.\begin{array}{l} x = \frac{u}{1+v} \\ y = \frac{uv}{1+v} \end{array}\right\}$; $J = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+v} & \frac{-u}{(1+v)^2} \\ \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(1+v)^3} + \frac{uv}{(1+v)^3} = \frac{u}{(1+v)^2} \neq 0;$

$$\iint_D (2x-y)\,dx\,dy = \int_1^5\Big(\int_1^4\Big(\frac{2u}{1+v} - \frac{uv}{1+v}\Big)\frac{u}{(1+v)^2}\,du\Big)\,dv = \int_1^4 u^2\,du\cdot\int_1^5 \frac{2-v}{(1+v)^3}\,dv =$$
$$= \Big[\frac{u^3}{3}\Big]_1^4\cdot\int_1^5 -\frac{v+1-3}{(1+v)^3}\,dv = 21\cdot\int_1^5\Big(-\frac{1}{(1+v)^2} + \frac{3}{(1+v)^3}\Big)\,dv =$$
$$= 21\cdot\Big[\frac{1}{1+v} - \frac{3}{2(1+v)^2}\Big]_1^5 = 21\Big(\frac{1}{6} - \frac{3}{2\cdot 36} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2\cdot 4}\Big) = 0. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 282**. $\iint_D \sqrt{1+4x^2+9y^2}\,dx\,dy,\ D : 4x^2+9y^2 \le 36,\ y \ge 0$

Řešení : Množina D je vnitřek elipsy $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1$ ležící nad osou x.

Použijeme transformaci do zobecněných polárních souřadnic (eliptických) :

$$\left.\begin{array}{l} x = 3r\cos\varphi \\ y = 2r\sin\varphi \end{array}\right\},\quad J = 3\cdot 2\cdot r,\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le \pi.$$

$$\iint_D \sqrt{1+4x^2+9y^2}\,dx\,dy = \int_0^\pi\Big(\int_0^1 \sqrt{1+4\cdot 9r^2\cos^2\varphi + 9\cdot 4r^2\sin^2\varphi}\cdot 6r\,dr\Big)\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \cdot \int_0^1 \sqrt{1+36r^2} \;\cdot\; 6r\,dr = \pi \cdot \frac{1}{12}\left[\frac{(1+36r^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{18}(37\sqrt{37}-1).$$

■

283. $\iint_D (x-2y+3)\,dx\,dy, \quad D: x^2+y^2 \le a^2$ $[3\pi a^2]$

284. $\iint_D x\,dx\,dy, \quad D: (x-2)^2 + \dfrac{(y-1)^2}{4} \le 1$
(Použijte souřadnice $x = 2 + r\cos\varphi, y = 1 + 2r\sin\varphi$.) $[4\pi]$

285. $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy, \quad D: x^2+y^2 \le 2x$ $\left[\frac{32}{9}\right]$

286. $\iint_D (x^2+y)\,dx\,dy, \quad D: xy = 1,\ xy = 4,\ y = x,\ y = 9x$
(Použijte souřadnice $xy = u, \dfrac{y}{x} = v$.) $\left[J = \frac{1}{4v}, \frac{19}{3}\right]$

• Vypočtěte integrály $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, je-li dána množina D a funkce $f(x,y)$

287. $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \le 1,\ x \ge 0\} \quad f(x,y) = xy^2$ $\left[\frac{48}{5}\right]$

288. $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ x^2+9y^2 \le 9,\ x \ge 0\}, \quad f(x,y) = y^2$ $\left[\frac{3\pi}{8}\right]$

289. $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ x^2+4y^2 \le 4,\ y \ge 0\}, \quad f(x,y) = y\ \sqrt{x^2+4y^2}$ $[2]$

290. $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ 36x^2+y^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}, \quad f(x,y) = xy$ $\left[\frac{9}{32}\right]$

291. $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ x^2+y^2 \le 4x,\ y \ge 0\}, \quad f(x,y) = xy$ $\left[\frac{32}{3}\right]$

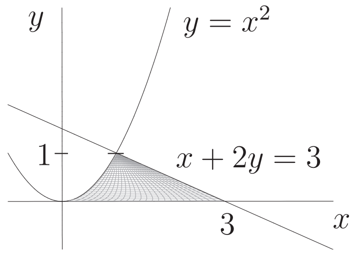
292. $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ x^2+y^2 \le 4, x \ge 0\}, \quad f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ $[\pi(1-\mathrm{e}^{-4})]$

III.6. Aplikace dvojných integrálů

• Určete plošný obsah rovinného obrazce D ohraničeného danými křivkami :

***Příklad* 293**. $y = x^2,\ x + 2y = 3,\ y = 0$

Řešení :



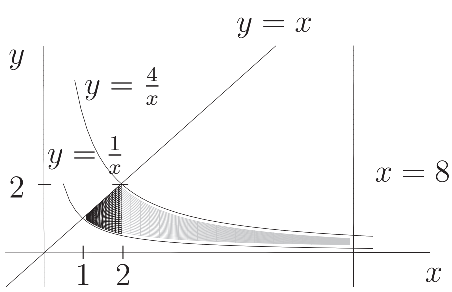
$$P = \iint_D dx\,dy = \int_0^1 \Big(\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} dx \Big)\, dy =$$

$$= \int_0^1 \Big(3 - 2y - \sqrt{y} \Big)\, dy == \Big[3y - y^2 - \frac{2y\sqrt{y}}{3} \Big]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

■

***Příklad* 294**. $xy = 1,\ xy = 4,\ y = x,\ x = 8$

Řešení :



$$P = \iint_D dx\,dy = \int_1^2 \Big(\int_{\frac{1}{x}}^{x} dy \Big)\, dx + \int_2^8 \Big(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{4}{x}} dy \Big)\, dx =$$

$$= \int_1^2 \Big(x - \frac{1}{x} \Big)\, dx + \int_2^8 \Big(\frac{4}{x} - \frac{1}{x} \Big)\, dx = \Big[\frac{x^2}{2} - \ln|x| \Big]_1^2 +$$

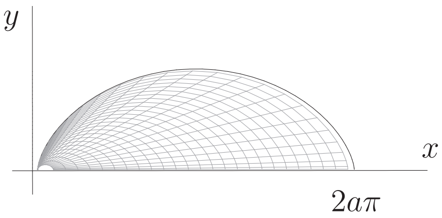
$$+3\Big[\ln|x| \Big]_2^8 = 2 - \ln 2 - \frac{1}{2} + 3(\ln 8 - \ln 2) = \frac{3}{2} + \ln \frac{8^3}{2 \cdot 2^3} =$$

$$= \frac{3}{2} + \ln 32.$$

■

***Příklad* 295**. Určete plošný obsah rovinného obrazce omezeného osou x a jedním obloukem cykloidy o parametrických rovnicích $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$.

Řešení :



Jeden oblouk cykloidy opíše bod kružnice, která se kotálí po přímce $y = 0$, tj. $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

$$P = \iint_D dx\,dy = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \int_0^{2\pi} y\,\dot{x}\,dt = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t)\,dt =$$

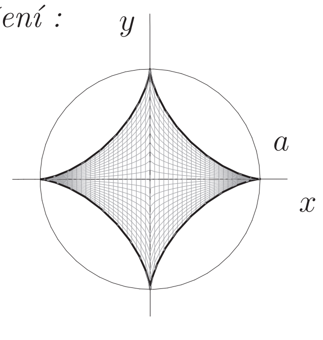
$$= a^2 \int_0^{2\pi} \Big(1 - 2\cos t + \cos^2 t \Big)\, dt = a^2 \Big[t - 2\sin t \Big]_0^{2\pi} + a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt =$$

$$= a^2 \cdot 2\pi + \frac{a^2}{2} \Big[t + \frac{\sin 2t}{2} \Big]_0^{2\pi} = 2\pi a^2 + a^2\pi = 3\pi a^2.$$

■

***Příklad* 296**. Určete plošný obsah rovinného obrazce D omezeného asteroidou $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Řešení :



$$P = \iint_D dx\,dy$$

Použijeme transformace do souřadnic : $\begin{matrix} x = r\cos^3\varphi \\ y = r\sin^3\varphi \end{matrix}$

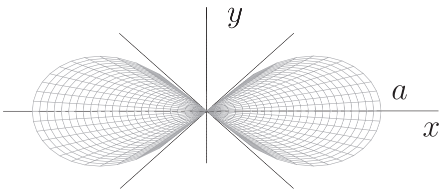
$$\Big(r\cos^3\varphi \Big)^{2/3} + \Big(r\sin^3\varphi \Big)^{2/3} = a^{2/3} \Longrightarrow r^{2/3} = a^{2/3} \Longrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} 0 \le r \le a \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \right|, \quad J = \left| \begin{array}{cc} \cos^3\varphi & -3r\cos^2\varphi\sin\varphi \\ \sin^3\varphi & 3r\sin^2\varphi\cos\varphi \end{array} \right| = 3r\sin^2\varphi\cos^4\varphi + 3r\sin^4\varphi\cos^2\varphi =$$
$$= 3r\sin^2\varphi\cos^2\varphi.$$
$$P = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^a 3r\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,dr\Big)\,d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi\cdot 3\int_0^a r\,dr =$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 2\varphi}{4}\,d\varphi\cdot 3\Big[\frac{r^2}{2}\Big]_0^a = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi\cdot\frac{3}{2}\,a^2 = \frac{3}{4}\,a^2\Big[\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \frac{3}{4}\,a^2\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}\pi a^2.$$
■

• Určete plošný obsah rovinného obrazce omezeného uzavřenou křivkou :

***Příklad* 297**. $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2(x^2-y^2)$ (**Bernoulliova lemniskáta**)

Řešení :



$$P = \iint_D dx\,dy = \left| \begin{array}{c} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ J = r \end{array} \right|.$$

Po dosazení do zadání dostáváme postupně : $r^4 = a^2r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$, $r^2 = a^2\cos 2\varphi$,

$0 \le r \le a\sqrt{\cos 2\varphi} \longrightarrow \cos 2\varphi \ge 0, \quad \varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle \cup \langle\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\rangle \cup \langle\frac{7\pi}{4}, 2\pi\rangle.$

$$P = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big(\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r\,dr\Big)\,d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big[\frac{r^2}{2}\Big]_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi\,d\varphi =$$
$$= 2a^2\Big[\frac{\sin 2\varphi}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$
■

***Příklad* 298**. $\left(x^2+9y^2\right)^2 = x^2y$

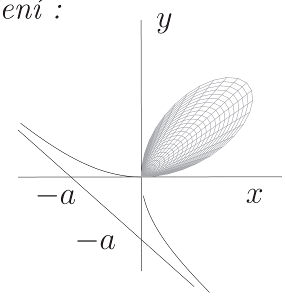
Řešení : $P = \iint_D dx\,dy = \left[\begin{array}{c} x = r\cos\varphi \\ y = \frac{r}{3}\sin\varphi \\ J = \frac{1}{3}\,r \end{array} \right]$

$$r^4 = r^2\cos^2\varphi\cdot\frac{r}{3}\sin\varphi$$
$$0 \le r \le \frac{1}{3}\cos^2\varphi\sin\varphi$$
$$\cos^2\varphi\sin\varphi \ge 0 \longrightarrow 0 \le \varphi \le \pi$$

$$P = \int_0^{\pi}\Big(\int_0^{\frac{1}{3}\cos^2\varphi\sin\varphi}\frac{1}{3}\,r\,dr\Big)\,d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\Big[\frac{r^2}{2}\Big]_0^{\frac{1}{3}\cos^2\varphi\sin\varphi}\,d\varphi =$$
$$= \frac{1}{6}\int_0^{\pi}\frac{1}{9}\cos^4\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{54}\cdot 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,(1-\cos^2\varphi)\,d\varphi =$$
$$= \frac{1}{27}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4\varphi - \cos^6\varphi)\,d\varphi = \text{(Wallisova formule)} = \frac{1}{27}\Big(\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{\pi}{864}.$$
■

***Příklad* 299**. $(x^3+y^3) = 3axy$ (**Descartesův list**)

Řešení :



$$P=\iint_D dx\,dy = \left|\begin{array}{lcl} x=r\cos\varphi & & 0\le r\le r(\varphi) \\ y=r\sin\varphi & | & \varphi_1\le\varphi\le\varphi_2 \\ J=r & & \end{array}\right| =$$
$$=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\Big(\int_0^{r(\varphi)} r\,dr\Big)\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Nyní určíme $r(\varphi)$ a dosadíme do posledního integrálu.

$$x^3+y^3=3axy \quad\longrightarrow\quad r^3\cos^3\varphi+r^3\sin^3\varphi=3ar^2\cos\varphi\sin\varphi,\qquad\text{takže}$$
$$r(\varphi)=\frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\quad r(0)=r(\frac{\pi}{2})=0.$$
$$P=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}\Big)^2 d\varphi=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\Big(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\Big)^2}d\varphi=$$

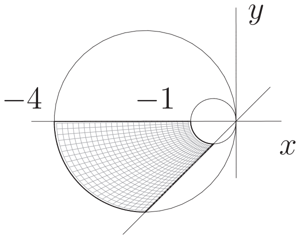
(čitatel a jmenovatel vydělíme $\cos^6\varphi$)

$$=\frac{9\,a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{tg}^2\varphi}{\Big(\mathrm{tg}^3\varphi+1\Big)^2}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=\left|\begin{array}{c}\mathrm{tg}\,\varphi=u\\ \frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi=du\end{array}\right|=\frac{9\,a^2}{2\cdot 3}\int_0^{\infty}\frac{3u^2}{(u^3+1)^2}du=$$
$$=\frac{3}{2}a^2\lim_{C\to+\infty}\int_0^C\frac{3u^2}{(u^3+1)^2}du=\frac{3\,a^2}{2}\lim_{C\to+\infty}\Big[\frac{-1}{u^3+1}\Big]_0^C=\frac{3\,a^2}{2}\lim_{C\to+\infty}\Big(\frac{-1}{C^3+1}+1\Big)=$$
$$=\frac{3\,a^2}{2}.\qquad\blacksquare$$

***Příklad* 300**. Určete plošný obsah rovinného obrazce omezeného křivkami
$x^2+y^2+x=0,\ x^2+y^2+4x=0,\ y=x,\ y=0.$

Řešení :

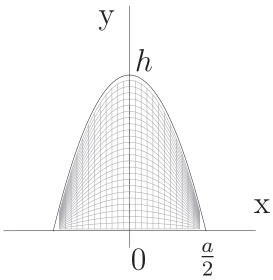
$$x^2+y^2+x=0\Longrightarrow\Big(x+\frac{1}{2}\Big)^2+y^2=\frac{1}{4}$$
$$x^2+y^2+4x=0\Longrightarrow(x+2)^2+y^2=4$$



$$P=\iint_D dx\,dy=\left|\begin{array}{lcc} x=r\cos\varphi & & x^2+y^2+x=0\longrightarrow r=-\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi & | & x^2+y^2+4x=0\longrightarrow r=-4\cos\varphi \\ J=r & & -\cos\varphi\le r\le-4\cos\varphi \\ & & \pi\le\varphi\le\frac{5}{4}\pi\end{array}\right|=$$
$$=\int_\pi^{\frac{5}{4}\pi}\Big(\int_{-\cos\varphi}^{-4\cos\varphi} r\,dr\Big)d\varphi=\frac{1}{2}\int_\pi^{\frac{5}{4}\pi}\Big[r^2\Big]_{-\cos\varphi}^{-4\cos\varphi}d\varphi=\frac{1}{2}\int_\pi^{\frac{5}{4}\pi}\Big(16\cos^2\varphi-\cos^2\varphi\Big)d\varphi=$$
$$=\frac{15}{2}\int_\pi^{\frac{5}{4}\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{15}{2}\int_\pi^{\frac{5}{4}\pi}\frac{1+\cos2\varphi}{2}d\varphi=\frac{15}{4}\Big[\varphi+\frac{\sin2\varphi}{2}\Big]_\pi^{\frac{5}{4}\pi}=$$
$$=\frac{15}{4}\Big(\frac{5}{4}\pi+\frac{\sin\frac{5}{2}\pi}{2}-\pi-\frac{\sin2\pi}{2}\Big)=\frac{15}{4}\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\Big)=\frac{15(\pi+2)}{16}.\qquad\blacksquare$$

***Příklad* 301**. Je dána parabolická úseč s tětivou kolmou k ose. Délka tětivy je a, výška úseče h, a hustota $\varrho=1$. Určete :
a) moment setrvačnosti úseče vzhledem k tětivě, b) těžiště úseče.

Řešení :



Analytické vyjádření této paraboly bude $y - h = px^2$.
Použijeme-li bod $\left[\frac{a}{2}, 0\right]$, pak $-h = p\frac{a^2}{4} \Longrightarrow p = \frac{-4h}{a^2} \Longrightarrow$
$y = h - \frac{4h}{a^2}x^2$.

a) Moment setrvačnosti k tětivě je nyní momentem setrvačnosti vzhledem k ose x.

$$I_x = \iint_D y^2\,dx\,dy = \left| \begin{array}{ll} D: & 0 \le y \le h - \frac{4h}{a^2}x^2 \\ & -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2} \end{array} \right| = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Big(\int_0^{h-\frac{4h}{a^2}x^2} y^2\,dy \Big)\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Big[y^3\Big]_0^{h-\frac{4h}{a^2}x^2} dx = \frac{1}{3}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Big(h - \frac{4h}{a^2}x^2\Big)^3 dx = \frac{h^3}{3}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Big(1 - \frac{4x^2}{a^2}\Big)^3 dx =$$

$$= \frac{2h^3}{3}\int_0^{\frac{a}{2}} \Big(1 - \frac{12x^2}{a^2} + \frac{48x^4}{a^4} - \frac{64x^6}{a^6}\Big)\,dx = \frac{2h^3}{3}\Big[x - \frac{4x^3}{a^2} + \frac{48x^5}{5a^4} - \frac{64x^7}{7a^6}\Big]_0^{\frac{a}{2}} =$$

$$= \frac{2h^3}{3}\Big(\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + \frac{3a}{10} - \frac{a}{14}\Big) = \frac{h^3 a}{3}\Big(\frac{3}{5} - \frac{1}{7}\Big) = \frac{16\,h^3 a}{105}.$$

b) $T = \big[0, y_T\big], \quad y_T = \dfrac{M_x}{m}$

$$m = \iint_D dx\,dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Big(\int_0^{h-\frac{4h}{a^2}x^2} dy \Big)\,dx = 2\int_0^{\frac{a}{2}} \Big(h - \frac{4h}{a^2}x^2\Big)\,dx =$$

$$= 2\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Big(1 - \frac{4x^2}{a^2}\Big)\,dx = 2h\Big[x - \frac{4x^3}{3a^2}\Big]_0^{\frac{a}{2}} = 2h\Big(\frac{a}{2} - \frac{a}{6}\Big) = \frac{2}{3}\,ha,$$

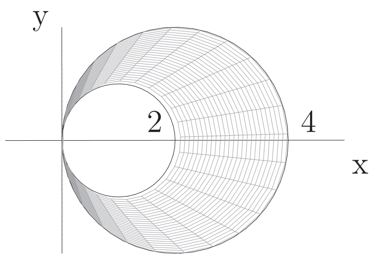
$$M_x = \iint_D y\,dx\,dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Big(\int_0^{h-\frac{4h}{a^2}x^2} y\,dy \Big)\,dx = \cdots = \frac{2}{5}\,h^2 a,$$

$$y_T = \frac{\frac{2}{5}\,h^2 a}{\frac{2}{3}\,ha} = \frac{3}{5}\,h, \qquad T = \Big[0, \frac{3}{5}\,h\Big].$$ ■

***Příklad* 302**. Určete těžiště rovinné desky omezené křivkami $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $x^2 + y^2 - 4x = 0$, je-li $\varrho = 10$.

Řešení :

$x^2 + y^2 - 2x = 0 \Longrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$
$x^2 + y^2 - 4x = 0 \Longrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$
$T = \big[x_T, 0\big],\ x_T = \dfrac{M_y}{m},$
$m = 10 \cdot P = 10\Big(\pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2\Big) = 30\pi$



$$M_y = \iint_D 10x\,dx\,dy = \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ J = r \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{c} x^2 + y^2 \ge 2x \longrightarrow \quad r \ge 2\cos\varphi \\ x^2 + y^2 \le 4x \longrightarrow \quad r \le 4\cos\varphi \\ 2\cos\varphi \le r \le 4\cos\varphi \\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

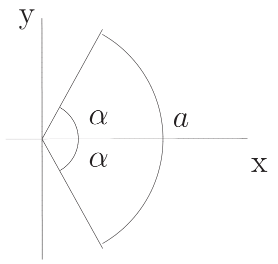
$$= 10\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} r^2\cos\varphi\,dr \Big)\,d\varphi = 10\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \cdot \Big[\frac{r^3}{3}\Big]_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} d\varphi = \frac{10}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 56\cos^4\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{20}{3} \cdot 56 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \, d\varphi = \frac{1120}{3} \cdot \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = 70\pi,$$

$$x_T = \frac{70\pi}{30\pi}, \qquad T = \left[\frac{7}{3}, 0\right]. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 303**. Určete souřadnice těžiště kruhové výseče (viz obrázek), je-li $\varrho =$ konst.

Řešení :



$$T = \left[x_T, 0\right], \quad m = \frac{\pi a^2}{2\pi} \cdot 2\alpha\varrho = a^2\alpha\varrho,$$

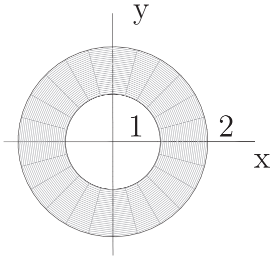
$$M_y = \iint_D x\varrho \, dx \, dy =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ J = r \end{array} \quad \Big| \quad \begin{array}{l} 0 \le r \le a \\ -\alpha \le \varphi \le \alpha \end{array} \right| = \varrho \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\int_0^a r^2 \cos\varphi \, dr \right) d\varphi = \varrho \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a \cdot \left[\sin\varphi\right]_{-\alpha}^{\alpha} =$$

$$= \frac{2}{3}\, \varrho\, a^3 \sin\alpha, \qquad x_T = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sin\alpha}{\alpha}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 304**. Určete moment setrvačnosti vzhledem k počátku soustavy souřadnic homogenní rovinné desky omezené křivkami $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $\varrho = k$.

Řešení :

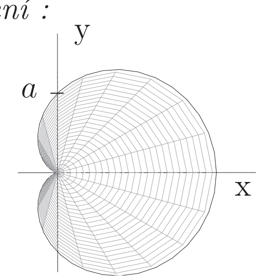


$$I_{[0,0]} = k \iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy = [\text{polární souřadnice}] =$$

$$= k \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^3 \, dr \, d\varphi = \frac{15}{2} k\pi. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 305**. Určete polohu těžiště obrazce omezeného **kardioidou** $r = a(1 + \cos\varphi)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $a > 0$, $\varrho = 1$.

Řešení :



$$T = \left[x_T, 0\right], m = P_D = \iint_D dx \, dy = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos\varphi)^2 \, d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \Big[\varphi + 2\sin\varphi\Big]_0^{2\pi} + \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \, d\varphi = a^2\pi + a^2\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} a^2\pi,$$

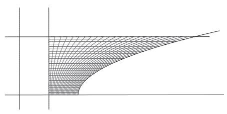
$$M_y = \iint_D x \, dx \, dy = \Big[\text{polární souř.}\Big] = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2 \cos\varphi \, dr \right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \cos\varphi \cdot a^3 (1 + \cos\varphi)^3 \, d\varphi = \frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} \left(\cos\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos^3\varphi + \cos^4\varphi \right) d\varphi =$$

$$= \frac{5}{4} a^3\pi; \qquad x_T = \frac{5\,a}{6}. \qquad \blacksquare$$

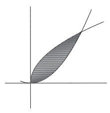
- Je dána omezená množina D a funkce $f(x,y)$
  a) Načrtněte množinu D.
  b) Ověřte splnění předpokladů pro použití Fubiniovy věty
  c) Uveďte alespoň dva příklady možného fyzikálního významu daného integrálu. Uveďte, zda se jedná o hmotnost (při jaké hustotě), statický moment nebo moment setrvačnosti (při jaké hustotě a vzhledem k jakému bodu nebo přímce).
  d) Vypočítejte $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

306. $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $x = 1$, $x = y^2 + 2, y = 0, y = 2,\quad f(x,y) = y/\sqrt{x}$



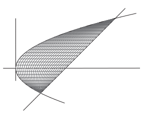
$\left[\begin{array}{l} c)\ m \ \text{ pro } \varrho = y/\sqrt{x} \\ \quad m_x \text{ pro } \varrho = 1/\sqrt{x} \\ d)\ 4\sqrt{6} - 4 - \frac{4}{3}\sqrt{2} \end{array}\right]$

307. $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y = x^2$, $y = \sqrt{x},\quad f(x,y) = x,$



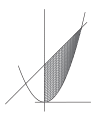
$\left[\begin{array}{l} c)\ m \ \text{ pro } \varrho = x \\ \quad m_y \text{ pro } \varrho = 1 \\ d)\ \frac{3}{20} \end{array}\right]$

308. $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $x = y^2$, $x - y - 2 = 0,\quad f(x,y) = y^2$



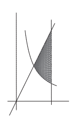
$\left[\begin{array}{l} c)\ m \ \text{ pro } \varrho = y^2 \\ \quad m_x \text{ pro } \varrho = y \\ \quad J_x \text{ pro } \varrho = 1 \\ d)\ \frac{29}{60} \end{array}\right]$

309. $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 ;\ x \geq 0,\ y \leq\ x + 2,\ y \geq x^2\},\quad f(x,y) = 2x(y+1)$



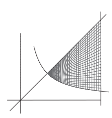
$\left[\begin{array}{l} c)\ m \ \text{ pro } \varrho = 2x(y+1) \\ \quad m_y \text{ pro } \varrho = 2(y+1) \\ d)\ \frac{52}{3} \end{array}\right]$

310. $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y = 2x$, $y = 2/x$, $x = 2,\quad f(x,y) = x^2\, y$



$\left[\begin{array}{l} c)\ m \ \text{ pro } \varrho = x^2\, y \\ \quad m_x \text{ pro } \varrho = x^2 \\ \quad m_y \text{ pro } \varrho = xy \\ \quad J_y \text{ pro } \varrho = y \\ d)\ \frac{62}{5} - 3 \end{array}\right]$

311. $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y = x$, $y = 1/x$, $x = 3,\quad f(x,y) = \sqrt{x}$



$\left[\begin{array}{l} c)\ m \ \text{ pro } \varrho = \sqrt{x} \\ d)\ \frac{8(1+\sqrt{3})}{5} \end{array}\right]$