II.10. Extrémy funkcí

Věta (nutná podmínka pro lokální extrém). Nechť funkce $f(x,y)$ je diferencovatelná v bodě A. Má-li funkce f v bodě A lokální extrém, pak $\operatorname{grad} f(A) = \vec{0}$.

Označme hlavní minory matice druhých derivací

$$\Delta_1(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A), \qquad \Delta_2(A) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A), & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(A) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(A), & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{vmatrix}$$

Věta (postačující podmínky pro lokální extrém funkce dvou proměnných). Nechť funkce $f(x,y)$ má spojité parciální derivace 2. řádu v bodě A. Nechť je v bodě A splněna nutná podmínka $\operatorname{grad} f(A) = \vec{0}$.

Pak platí:

Je-li $\Delta_1(A) > 0$ a $\Delta_2(A) > 0$, pak funkce f má v bodě A ostré lokální minimum.
Je-li $\Delta_1(A) < 0$ a $\Delta_2(A) > 0$, pak funkce f má v bodě A ostré lokální maximum.
Je-li $\Delta_2(A) < 0$, pak funkce f nemá v bodě A lokální extrém.

Postup při výpočtu lokálních extrémů

1. krok: Podle nutné podmínky určíme tzv. kritické body, tj.

a) body, v nichž funkce $f(x,y)$ není diferencovatelná,

b) body, které jsou řešením soustavy rovnic $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

2. krok:

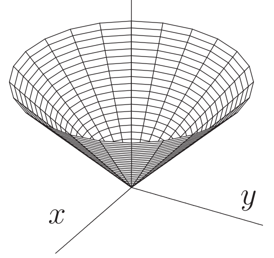
V bodech **b)** postupujeme podle postačující podmínky.

• Najděte **lokální** extrémy funkce :

***Příklad* 197**. $z(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Řešení : Daná funkce je definovaná v $\mathbb{E}_2$. Parciální derivace $z_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ neexistují v bodě $A = [0,\,0]$, který je jediným kritickým bodem. V bodě A tedy může být lokální extrém, neboť funkce f není v bodě A diferencovatelná. Nelze však rozhodnout podle výše uvedené postačující podmínky, proto použijeme definici lokálního extrému.Pro každý bod z prstencového okolí $P(A)$ bodu A ale platí, že $f(X) > f(A)$. Funkce f tedy má v bodě $A = [0,\,0]$ ostré lokální minimum s hodnotou $f(0,0) = 0$.

Poznámka. Nerovnost $f(X) > f(A)$ je splněna v libovolném prstencovém okolí $P(A)$. Funkce f tedy má v bodě $A = [0,\,0]$ i ostré globální minimum.



Příklad má názornou geometrickou interpretaci. Stačí si uvědomit, jaká plocha je grafem funkce $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

■

***Příklad* 198**. $f(x,y) = x^3 - x^2 + \frac{1}{2}y^2 - xy - 6x$

Řešení : Funkce $f(x,y)$ má spojité parciální derivace 1. a 2. řádu.
1) Podle nutné podmínky $f_x = 0, \quad f_y = 0$ dostaneme soustavu:

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 3x^2 - 2x - y - 6 \\ f_y &= y - x \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} 3x^2 - 2x - y - 6 &= 0 \\ y - x &= 0 \end{aligned}\right\} \text{dosadíme}$$

$$\left.\begin{aligned} 3(x^2 - x - 2) &= 0 \\ y &= x \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} (x-2)(x+1) &= 0 \\ y &= x \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

a dostaneme dva kritické body $[2,2]$, $[-1,-1]$.

Připravíme si druhé derivace

$$\left.\begin{aligned} f_{xx} &= 6x - 2 \\ f_{xy} &= -1 = f_{yx} \\ f_{yy} &= 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \Delta_1(x,y) = 6x - 2,\ \Delta_2(x,y) = \begin{vmatrix} 6x-2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 6x - 3$$

2) Z postačující podmínky

	Δ_2	Δ_1	závěr
$[2,2]$	9	10	ostré lok. minimum, $f(2,2) = -10$
$[-1,-1]$	-9		není extrém

■

***Příklad* 199**. $z(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

Řešení : Zde máme funkci dvou proměnných v explicitním tvaru. Funkce z je diferencovatelná v $\mathbb{E}_2$, proto nutná podmínka existence lokálních extrémů je : $z_x = 0,\ z_y = 0$.

$$\begin{aligned} z_x &= 6x^2 + y^2 + 10x &&\Longrightarrow\ 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ z_y &= 2xy + 2y &&\Longrightarrow\ y(x+1) = 0 \Longrightarrow \text{ buď } y = 0 \text{ nebo } x = -1 \end{aligned}$$

$$y = 0: \quad 6x^2 + 10x = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 & \Longrightarrow \quad A_1 = [0,0] \\ x_2 = -\frac{5}{3} & \Longrightarrow \quad A_2 = \left[-\frac{5}{3}, 0\right] \end{cases}$$

$$x = -1: \quad y^2 + 6 - 10 = 0 \Longrightarrow y^2 = 4 \Longrightarrow \begin{cases} y = 2 & \Longrightarrow \quad A_3 = [-1,2] \\ y = -2 & \Longrightarrow \quad A_4 = [-1,-2] \end{cases}$$

Nyní si připravíme derivace druhého řádu :

	A_1	A_2	A_3	A_4
$z_{xx} = 12x + 10$	10	-10	-2	-2
$z_{yy} = 2x + 2$	2	$-4/3$	0	0
$z_{xy} = 2y = z_{yx}$	0	0	4	-4

Je-li $\Delta_2(A_i) = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} \left\langle \begin{array}{ll} > 0, & \text{pak existuje lokální extrém v bodě } A_i. \\ < 0, & \text{pak neexistuje lokální extrém v bodě } A_i\ . \end{array}\right.$

Pro $A_1 : \Delta_2(A_1) = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0,\ \Delta_1(A_1) = z_{xx}(A_1) > 0,$ obdržíme lokální minimum $z(A_1) = 0.$

Pro $A_2 : \Delta_2(A_2) = \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} > 0,\ \Delta_1(A_2) = z_{xx}(A_2) < 0,$ je lokální maximum $z(A_2) = \frac{125}{27}.$

Pro A_3, A_4 je $\Delta_2(A_3) = \Delta_2(A_4) = -16 < 0$, a proto v bodech A_3 a A_4 lokální extrémy neexistují.

■

***Příklad* 200**. Funkce $y = f(x)$ je vyjádřena v implicitním tvaru
$F(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 + 8 = 0$.

Řešení : Spočítáme y' :

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{x+y}{y-x} \quad \text{pro } x \neq y.$$

Položíme $y' = 0$, tedy $x + y = 0 \implies y = -x$. Dosadíme do zadání, abychom určili souřadnice případných lokálních extrémů

$$x^2 - 2x^2 - x^2 + 8 = 0 \implies 2x^2 = 8 \implies x_{1,2} = \pm 2, \quad y_{1,2} = \mp 2.$$

Dostali jsme dva body $A = [2, -2]$ a $B = [-2, 2]$. Nyní spočítáme

$$y'' = \frac{(1+y')(y-x) - (x+y)(y'-1)}{(y-x)^2}, \quad \text{takže}$$

$$y''(A) = \frac{-4}{16} < 0 \implies f(2) = -2 \text{ je lokální maximum a}$$

$$y''(B) = \frac{4}{16} > 0 \implies f(-2) = 2 \text{ je lokální minimum.}$$

■

***Příklad* 201**.* $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

Řešení :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = f_{xx}$$

Podle **Sylvestrovy** věty o kvadratických formách platí :

Je-li $\Delta_2(P) > 0$, $\begin{cases} \Delta_3(P) > 0, \Delta_1(P) > 0, \textit{pak } f(P) \textit{ je ostré lokální minimum.} \\ \Delta_3(P) < 0, \Delta_1(P) < 0, \textit{ pak } f(P) \textit{ je ostré lokální maximum.} \end{cases}$

Je-li $\Delta_2(P) < 0$, *pak v bodě* P *neexistuje lokální extrém.*

Výpočet vypadá následovně :

$$\left.\begin{array}{lll} f_x = 3x^2 + 12y = 0 & \text{neboli} & x^2 + 4y = 0, \\ f_y = 2y + 12x = 0 & \text{neboli} & y = -6x, \end{array}\right\}, \quad \begin{array}{c} \text{pak} \quad x^2 - 24x = 0 \quad \Rightarrow \text{a} \\ x_1 = 0,\ x_2 = 24, \end{array}$$

$$f_z = 2z + 2 = 0, \quad \text{neboli} \quad z = -1$$

$$A = [0, 0, -1], \quad B = [24, -144, -1]$$

$f_{xx} = 6x$, $f_{yy} = 2, f_{zz} = 2$, $f_{xy} = 12$, $f_{xz} = 0$, $f_{yz} = 0$.

Protože $\Delta_2(A) = \begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} < 0$, v bodě A nenastává lokální extrém.

Protože $\Delta_2(B) = \begin{vmatrix} 144 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 144 > 0$, $\Delta_3(B) = \begin{vmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 288 > 0$ a

$\Delta_1(B) = 144 > 0$, je $f(B) = f(24, -144, -1) = -6913$ lokální minimum.

Můžeme se též přesvědčit přímo, že kvadratická forma $d^2f(B)$ je pozitivně definitní :
$d^2f(B) = 144\,(dx)^2 + 24\,dx\,dy + 2\,(dy)^2 + 2\,(dz)^2 = (12\,dx + dy)^2 + (dy)^2 + 2\,(dz)^2 > 0$

■

• Najděte lokální extrémy daných funkcí s danou podmínkou:

***Příklad* 202**. $z = 2(x^2 + y^2)$, jestliže $x + y = 2$.

Řešení : Geometricky se jedná o nalezení extrémů z-ové souřadnice na průsečné křivce **rotačního paraboloidu** $z = 2(x^2 + y^2)$ s **rovinou** $x + y = 2$.

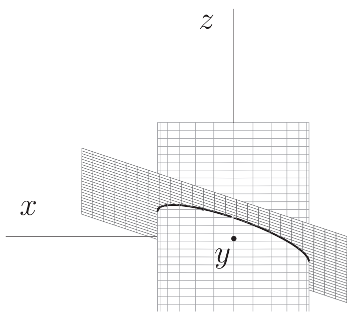
Z podmínky $x + y = 2$ vyjádříme např. $y = 2 - x$ a dosadíme do dané funkce $z(x, y) = 2(x^2 + y^2)$. Tím dostaneme $\tilde{z}(x) = z(x, 2 - x) = 2(x^2 + (2 - x)^2)$, takže $\tilde{z}(x) = 4(x^2 - 2x + 2)$.

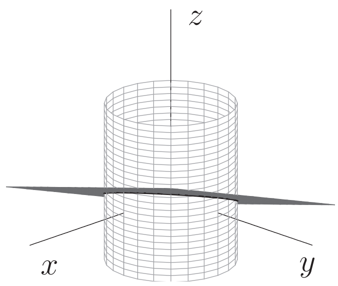
Pro funkci jedné proměnné $\tilde{z}(x)$ hledáme lokální extrém. Je tedy
$\tilde{z}'(x) = 4(2x - 2) = 0$. Odtud $x_1 = 1, y_1 = 2 - 1 = 1$ a $\tilde{z}''(x) = 8 > 0 \quad \Rightarrow$
$z(1, 1) = 4$ je lokální minimum.

■

***Příklad* 203**. $z = \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4}$, jestliže $x^2 + y^2 = 1$.

Řešení : Geometricky se jedná o nalezení extrémů z-ové souřadnice na průsečné křivce **roviny** $z = \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4}$ s **rotační válcovou plochou** $x^2 + y^2 = 1$.

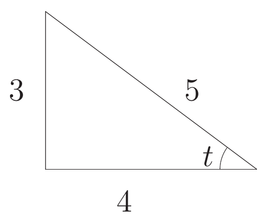




Jelikož z podmínky $x^2 + y^2 = 1$ nelze jednoznačně vyjádřit ani x ani y, přejdeme do polárních souřadnic $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$, kde $r = 1$, tedy $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$.

Potom $\tilde{z} = z(\cos t, \sin t) = \dfrac{\cos t}{3} + \dfrac{\sin t}{4}$ a dále $\quad \tilde{z}' = \dfrac{d\,z}{d\,t} = \dfrac{-\sin t}{3} + \dfrac{\cos t}{4} = 0$, takže

$$\operatorname{tg} t = \frac{3}{4}.$$



Jak vidíme na obrázku je $\sin t = \pm\dfrac{3}{5}$, $\cos t = \pm\dfrac{4}{5}$.

Pro $\sin t_1 = \dfrac{3}{5}$, $\cos t_1 = \dfrac{4}{5}$ je $\quad t_1 \in (0, \dfrac{\pi}{2})$

a pro $\sin t_2 = -\dfrac{3}{5}$, $\cos t_2 = -\dfrac{4}{5}$ je $\quad t_2 \in (\pi, \dfrac{3\pi}{2})$.

Dále je $\tilde{z}'' = \dfrac{d^2\tilde{z}}{d\,t^2} = -\dfrac{\cos t}{3} - \dfrac{\sin t}{4} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{z}''(t_1) < 0,\ \tilde{z}''(t_2) > 0.$

Dospěli jsme k lokálnímu maximu $\tilde{z}(t_1) = z\Big(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\Big) = \dfrac{4}{15} + \dfrac{3}{20} = \dfrac{5}{12}$

a lokálnímu minimu $\tilde{z}(t_2) = z\Big(-\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}\Big) = -\dfrac{5}{12}.$

■

***Příklad* 204**. $z = \sin^2 x + \sin^2 y$, jestliže $y = x - \dfrac{\pi}{4}$.

Řešení :

$\tilde{z}(x) = z(x, x-\pi/4) = \sin^2 x + \sin^2(x - \frac{\pi}{4}), \quad \tilde{z}'(x) = 2\sin x\cos x + 2\sin(x - \frac{\pi}{4})\cos(x - \frac{\pi}{4}) =$

$= \sin 2x + \sin(2x - \frac{\pi}{2}) = \sin 2x + \sin 2x \cos\frac{\pi}{2} - \cos 2x \sin\frac{\pi}{2} = \sin 2x - \cos 2x$

Položíme-li $\tilde{z}'(x) = 0$, dostaneme $\sin 2x = \cos 2x$ a dále

$$2x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad x = \frac{\pi}{8} + k\,\frac{\pi}{2}, \text{ takže } \quad k_1 = 2n,\ k_2 = 2n+1.$$

Vypočteme druhou derivaci : $\tilde{z}''(x) = 2\cos 2x + 2\sin 2x$,

$$\tilde{z}''\left(\frac{\pi}{8} + 2n\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} > 0,$$

$$\tilde{z}''\left(\frac{\pi}{8} + (2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right) = -2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2} < 0.$$

Tedy $\tilde{z}\Big(\dfrac{\pi}{8} + n\pi\Big) = 2\sin^2\dfrac{\pi}{8} = 1 - \cos\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ je lokální minimum

a $\tilde{z}\Big(\dfrac{\pi}{8} + (2n+1)\dfrac{\pi}{2}\Big) = \sin^2\dfrac{5\pi}{8} + \sin^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1}{2}\Big(1 - \cos\dfrac{5\pi}{4} + 1 - \cos\dfrac{\pi}{4}\Big) =$

$= \dfrac{1}{2}\Big(2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big) = 1$ je lokální maximum.

■

***Příklad* 205**.* $z = x^2 + 2y^2$, jestliže $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$.

Řešení : Zde použijeme **Lagrangeovu funkci** : *Je-li dána funkce $z = f(x,y)$ a podmínka $g(x,y) = 0$, potom Lagrangeova funkce má vyjádření*

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y).$$

Její stacionární body získáme řešením soustavy $\left.\begin{aligned} L_x &= 0 \\ L_y &= 0 \\ L_\lambda = g(x,y) &= 0. \end{aligned}\right\}$

Funkce $z = f(x,y)$ může mít za podmínky $g(x,y) = 0$ extrémy pouze v bodech $[x,y]$, ke kterým existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že $[x,y,\lambda]$ je kritickým bodem funkce $L(x,y,\lambda)$.

V našem příkladě máme $\quad L(x,y,\lambda) = x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 - 2x + 2y^2 + 4y)$

$$L_x = 2x + \lambda(2x-2) = 0 \quad \text{a odtud} \quad x = \frac{\lambda}{1+\lambda},$$

$$L_y = 4y + \lambda(4y+4) = 0 \quad \text{a odtud} \quad y = \frac{-\lambda}{1+\lambda}.$$

Tedy $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$, takže $\dfrac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} - \dfrac{2\lambda}{1+\lambda} + \dfrac{2\lambda^2}{(1+\lambda)^2} - \dfrac{4\lambda}{1+\lambda} = 0,$

$\dfrac{3\lambda^2}{(1+\lambda)^2} = \dfrac{6\lambda}{1+\lambda}, \quad \lambda \neq -1$ a následně $\dfrac{3\lambda^2}{1+\lambda} = 6\lambda,\ 3\lambda^2 + 6\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda\cdot(\lambda+2) = 0.$

Zde máme $\lambda_1 = -2, \quad$ takže $x_1 = 2,\ y_1 = -2, \quad A_1 = [2, -2]$ anebo
$\lambda_2 = 0 \quad$ takže $x_2 = 0,\ y_2 = 0, \quad A_2 = [0, 0]$. Dále je
$L_{xx} = 2 + 2\lambda,\ L_{yy} = 4 + 4\lambda,\ L_{xy} = 0$ a odtud

$$\Delta(A_1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} > 0,\ L_{xx}(A_1) < 0, \qquad L(A_1) = 12 \text{ je lokálním maximem,}$$

$$\Delta(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} > 0,\ L_{xx}(A_2) > 0, \qquad L(A_2) = 0 \text{ je lokálním minimem.}$$

■

***Příklad* 206**. V rovině $x + 2y - z + 3 = 0$ najděte bod, jehož součet čtverců vzdáleností od bodů $A = [1, 1, 1]$ a $B = [2, 2, 2]$ je nejmenší.

Řešení : Hledaný bod označíme $P = [x, y, z]$ a sestavíme součet $|\overrightarrow{AP}|^2 + |\overrightarrow{BP}|^2$, který zapíšeme pomocí souřadnic bodů

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2.$$

Bod P musí ležet v rovině $x + 2y - z + 3 = 0$. Tedy tato rovnice roviny představuje vazební podmínku, která musí být splněna.

Vyjádříme-li si např. $z = x + 2y + 3$ a dosadíme-li do $f(x, y, z)$, potom funkce $f(x, y, x + 2y + 3)$ bude funkcí dvou proměnných x a y :

$$\tilde{f}(x, y) = f(x, y, x{+}2y{+}3) = (x{-}1)^2{+}(y{-}1)^2{+}(x{+}2y{+}2)^2{+}(x{-}2)^2{+}(y{-}2)^2{+}(x{+}2y{+}1)^2,$$

$$\tilde{f}_x = 2(x-1) + 2(x + 2x + 2) + 2(x-2) + 2(x + 2y + 1) = 8(x + y),$$
$$\tilde{f}_y = 2(y-1) + 4(x + 2y + 2) + 2(y-2) + 4(x + 2y + 1) = 4(2x + 5y) + 6.$$

Položíme $\left.\begin{array}{ll} \tilde{f}_x = 0, \text{ pak} & x + y = 0 \Longrightarrow y = -x, \\ \tilde{f}_y = 0, \text{ takže} & 4x + 10y = -3 \Longrightarrow -6x = -3, \end{array}\right\} x_1 = \dfrac{1}{2},\ y_1 = -\dfrac{1}{2}.$

Máme tedy $z_1 = \dfrac{5}{2}, \quad P = \left[\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right].$

Dále je $\left.\begin{array}{l} \tilde{f}_{xx}(P) = 8 \\ \tilde{f}_{xy}(P) = 8 \\ \tilde{f}_{yy}(P) = 20 \end{array}\right\}$ takže $\Delta_2(P) = \begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 20 \end{vmatrix} > 0, \Delta(P)\tilde{f}_{xx} > 0$

a $f(P) = \dfrac{27}{2}$ je lokální minimum.

■

Věta (Postačující podmínka existence absolutních extrémů funkce na dané množině). Je-li funkce $f(x, y)$ spojitá na neprázdné množině M, která je omezená a uzavřená, pak f nabývá maxima a minima na množině M.

Speciální případ je tzv. **vázaný extrém**, a to když $M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : g(x, y) = 0\}$, kde g je daná funkce. Pokud lze, pak z vazební podmínky $g(x, y) = 0$ vyjádříme jednu proměnnou, kterou dosadíme do dané funkce f. Získáme tak úlohu určit extrémy funkce jedné proměnné.

Postup při výpočtu absolutních extrémů.

Připomeňme, že M^0 je vnitřek a ∂M je hranice množiny M.

1. krok: Ověříme splnění předpokladů právě uvedené věty, čímž zdůvodníme existenci absolutních extrémů.
2. krok: Určíme všechny kritické body X funkce f v M^0.
3. krok: Určíme všechny body $X \in \partial M$, ve kterých může funkce f nabývat absolutních extrémů.
4. krok: Určíme hodnoty funkce f ve všech vypočítaných bodech. Největší hodnota je rovna $\max_M f$ a nejmenší hodnota je rovna $\min_M f$.

• Určete **absolutní (globální)** extrémy funkce $z = f(x, y)$ na množině M :

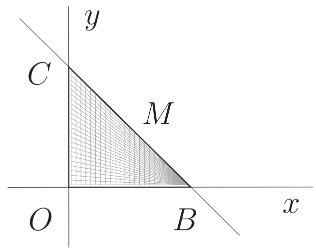
***Příklad* 207**. $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - x - y,\ M = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x \geq 0, y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$

Řešení : Ověříme existenci absolutních extrémů: Daná množina M je uzavřená a omezená. Daná funkce f je spojitá v $\mathbb{E}_2$, tedy též v M. To je postačující pro existenci absolutních extrémů.

1) určíme stacionární body na vnitřku množiny M a jejich funkční hodnoty :

$$\left.\begin{array}{l} f_x \equiv 2x + y - 1 = 0 \\ f_y \equiv 2y + x - 1 = 0 \end{array}\right\} \ x = y = \frac{1}{3} \Longrightarrow$$

$$A_1 = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \in M, \quad f(A_1) = -\frac{1}{3}\ ;$$



2) určíme podezřelé body na hranici M, tj. na jednotlivých stranách $\triangle\ OBC$

$$OB : y = 0 \Longrightarrow \quad h_1(x) = f(x,0) = x^2 - x,\ h_1'(x) = 2x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow x = \frac{1}{2},$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{2}, 0\right] \in M,\ f(A_2) = -\frac{1}{4},$$

$$OC : x = 0 \Longrightarrow \quad h_2(y) = f(0,x) = y^2 - y,\ h_2'(y) = 2y - 1 = 0 \quad \Longrightarrow y = \frac{1}{2},$$

$$A_3 = \left[0, \frac{1}{2}\right] \in M,\ f(A_3) = -\frac{1}{4},$$

$$BC : y = 1-x \Longrightarrow h_3(x) = f(x, 1-x) = x^2 + (1-x)^2 + x(1-x) - x - 1 + x = -x^2 - x,$$

$$h_3'(x) = -2x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}, \qquad \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \notin M\ ;$$

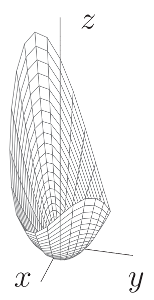
3) určíme hodnoty funkce $f(x,y)$ ve vrcholech O, B, C

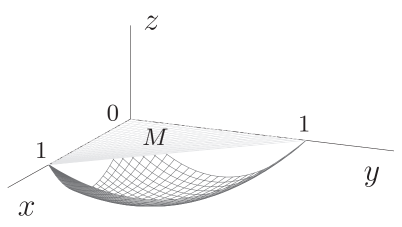
$f(O) = f(0,0) = 0, \quad f(B) = f(1,0) = 0, \quad f(C) = f(0,1) = 0.$

Ze všech spočítaných funkčních hodnot vybereme nejmenší a největší .

Globální maximum nastává v bodech $O, B, C,\ f_{\max}(O) = f_{\max}(B) = f_{\max}(C) = 0$

a podobně globální minimum v bodě $A_1,\ f_{\min}(A_1) = -\dfrac{1}{3}.$





■

***Příklad* 208**. $z = x^2 + y^2 - 6x + 6y$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$

Řešení : Geometricky se jedná o nalezení extrémů z-ové souřadnice na paraboloidu, která je ohraničena průnikem paraboloidu $z = x^2 + y^2 - 6x + 6y$ s válcovou plochou $x^2 + y^2 = 4$.

1) Stacionární body ve vnitřku množiny M:

$$\begin{aligned} z_x &= 2x - 6 = 0 \Longrightarrow x_1 = 3 \\ z_y &= 2y + 6 \qquad \Longrightarrow y_1 = -3 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad A = [3, -3], \quad A \notin M.$$

2) Body na hranici množiny M zapíšeme v parametrickém tvaru :

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\cos t \\ y &= 2\sin t \end{aligned}\right\}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

Pak postupně :

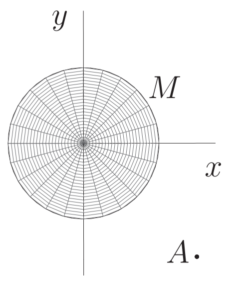
$$\tilde{z} = z(2\cos t, 2\sin t) = 4 - 12\cos t + 12\sin t,$$

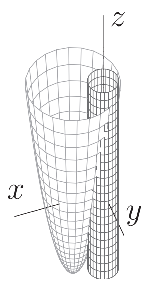
$$\frac{d\,\tilde{z}}{d\,t} = 12\sin t + 12\cos t = 0,$$

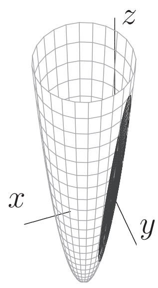
$$\Longrightarrow \qquad \sin t = -\cos t, \qquad t_1 = \frac{3}{4}\pi, \quad t_2 = \frac{7}{4}\pi,$$

$t_1 = \frac{3}{4}\pi \Longrightarrow B = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $\quad z(B) = 4 + 12\sqrt{2}$ je globální maximum a

$t_2 = \frac{7}{4}\pi \Longrightarrow C = [\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$, $\quad z(C) = 4 - 12\sqrt{2}$ je globální minimum.







∎

- Je dána funkce $f = f(x, y)$.
  a) Napište nutnou podmínku pro lokální extrém diferencovatelné funkce n-proměnných v bodě A.
  b) Napište postačující podmínky pro lokální minimum (resp. maximum) funkce $f(x, y)$ v bodě A.
  c) Vyšetřete lokální extrémy dané funkce f, tj. určete jejich polohu, typ a funkční hodnotu.

209. $f(x, y) = x^2 + 12y^2 - 6xy + 4x$ — [Ostré lok. min. v bodě $[-8, -2]$, $\quad f(-8, -2) = -16$]

210. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 12x + 6y$ — [Ostré lok. min. v bodě$[2, -3]$, $\quad f(2, -3) = -25$, v bodě$[-2, -3]$ není extrém.]

211. $f(x, y) = 2y - y^2 - x\,\mathrm{e}^x$ — [Ostré lok. max. v bodě $[-1, 1]$, $\quad f = 1 + 1/\mathrm{e}$]

212. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2x^2 - 2xy + 6$ — [Ostré lok. min. v bodě$[2, 2]$, $\quad f(2, 2) = 2$, v bodě$[0, 0]$ není extrém.]

213. $f(x, y) = x^3 + 3y^2 - 6xy - 9x + 8$ — [Ostré lok. min. v bodě$[3, 3]$, $\quad f(3, 3) = -19$, v bodě$[-1, -1]$ není extrém.]

214. $f(x, y) = x^2 + 2x + y^4 - 4y + 7$ — [Ostré lok. min. v bodě $[-1, 1]$, $\quad f(-1, 1) = 3$]

215. $f(x,y) = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$ [Ostré lok. min. v bodě $[5,2]$, $(f(5,2) = 30)$]

216. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6\ln x$ $\left[\begin{array}{r} f_{\min}(2,-1) = 3 - 6\ln 2, \\ \text{bod } [-2,1] \notin D(f) \end{array}\right]$

• Určete lokální extrémy funkce :

217. $z = x^2 + y - x\sqrt{y} - 6x + 12$ $[z_{\min}(4,4) = 0]$

218. $z = x^2 + y^2 + 6x - 4y$ $[z_{\min}(-3,2) = -13]$

219. $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$ $[z_{\max}(0,0) = 0]$

220. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$ $[z_{\min}\left(1, \frac{1}{2}\right) = 4,$ v bodě $[0,0]$ není extrém$]$

221. $z = \mathrm{e}^{x/2}(x + y^2)$ $\left[z_{\min}(-2,0) = -\frac{2}{e}\right]$

222. $z = x^3 + y^3 + \dfrac{9}{2}x^2 - 3y - 12x$ $\left[\begin{array}{r} z_{\min}(1,1) = -\frac{17}{2},\ z_{\max}(-4,-1) = 58 \\ \text{v bodech}[1,-1],[-4,1] \text{ neexistují extrémy} \end{array}\right]$

223.* $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 13 = 0$ $[z_{\min}(2,-3) = 0,\ z_{\max}(2,-3) = 2]$

224.* $x^2 + xy - z^2 + z + y + 5 = 0$ $\left[\begin{array}{r} \text{ve stac.bodech } [-1,2,3],\ [-1,2,-2] \\ \text{neexistují extrémy} \end{array}\right]$

225.* $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y + 6z$ $[f(2,-1,-3)) = -14,$ lok.min.$]$

226.* $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^3 - 12yz - 6x$ $\left[\begin{array}{r} f(3,36,12) = -873, \text{lok.min.}, \\ \text{v bodě } [3,0,0] \text{ není extrém} \end{array}\right]$

227.* $z = \ln(xy) + x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7$

$$\left[\begin{array}{r} \text{lok.max. v bodě } A_1 = \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right], \\ \text{lok.min. v bodě } A_2 = \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right], \\ \text{další stac.b. } A_3 = \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right],\ A_4 = \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \end{array}\right]$$

228. a) Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy + 3x + y + 1$.
b) Zdůvodněte existenci a najděte absolutní extrémy této funkce na úsečce AB, kde $A = [0,2], B = [1,1]$.

$\left[\begin{array}{r} \text{a) lokální } f_{\min}(-1,-1) = -1, \\ \text{b) } \mathrm{f}_{\min}(1/2,3/2) = 6,\ \mathrm{f}_{\max}(0,2) = \mathrm{f}_{\max}(1,1) = 7 \end{array}\right]$

• Je dána funkce f a množina M.
a) Zdůvodněte existenci absolutních extrémů funkce f na dané množině M.
b) Absolutní extrémy vyšetřete, tj. stanovte jejich polohu a vypočítejte hodnotu maxima i minima funkce f na množině M.

229. $f(x,y) = x + \ln x - y^2,\quad M = \{\, [x,y] \in \mathbb{E}_2\, ;\ y = x + 1,\ 1/4 \le x \le 1 \}$

$\left[\begin{array}{r} f_{\min}(1,2) = -3,\ f_{\max}(1/2,3/2) = -7/4 - \ln 2 \doteq -2{,}4, \\ f(1/4,5/4) = -21/16 - \ln 4 \doteq -2{,}7 \text{ není extrém} \end{array}\right]$

230. $f(x,y) = x^2 + xy - 3x - y,\quad M = \{\, [x,y] \in \mathbb{E}_2\, ;\ x + y \le 3,\ x \ge 0,\ y \ge 0 \}$.

$[f_{\min}(0,3) = -3,\ f_{\max}(0,0) = f_{\max}(3,0) = 0]$

231. $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2,\quad M = \{\, [x,y] \in \mathbb{E}_2\, ;\ x^2 + y^2 \le 9,\ y \ge 0 \}$

$\left[\begin{array}{r} f_{\min}(1,0) = -1,\quad f_{\max}(-3,0) = 15 \\ \text{Pro vyšetření bodů na hranici můžete užít} \\ \text{polárních souřadnic, úlohu však lze řešit i bez nich.} \end{array}\right]$

• Určete globální extrémy funkce $z = f(x, y)$ na množině M :

232. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy,\ M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : |x| + |y| \leq 1\}$

$$\left[\begin{array}{r} \text{glob.min. } f(0,0) = 0 \\ \text{glob.max. } f(1,0) = f(0,1) = \\ = f(-1,0) = f(0,-1) = 1 \end{array}\right]$$

233. $f(x, y) = x^2 - y^2,\ M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ (použijte polární souřadnice)

$$\left[\begin{array}{r} \text{glob.min. } f(0,\pm 2) = -4 \\ \text{glob.max. } f(\pm 2,0) = 4 \end{array}\right]$$

234. $f(x, y) = xy(x - a)(y - b),\ M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b\}$

$$\left[\begin{array}{r} \text{glob.max. } f(\frac{a}{2},\frac{b}{2}) = \frac{a^2b^2}{16} \\ \text{glob.min. } f(0,0) = f(a,0) = f(0,b) = f(a,b) = 0 \end{array}\right]$$

235. $f(x, y) = xy(2 - x - y),\ M = \{[x, y] \in E_2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$

$$\left[\begin{array}{r} \text{glob.max. } f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \\ \text{glob.min. } f(x,0) = f(0,y) = 0 \end{array}\right]$$

236. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 1,\ M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x \leq 0,\ y \geq 0, x - y + 3 \geq 0\}$

$$\left[\begin{array}{r} \text{glob.min. } f(-\frac{1}{2},0) = -\frac{5}{4} \\ \text{glob.max. } f(0,3) = 11 \end{array}\right]$$