Funkce - základní pojmy

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Zobrazení množiny $M \subset \mathbb{R}$ do množiny $\mathbb{R}$ nazýváme reálnou funkcí jedné reálné proměnné (dále už jen funkce). Funkce označujeme zpravidla stručně písmeny, jako např. $f, F, h, H, \varphi, \psi$.

Nejčastěji se setkáme se zadáním funkce vzorcem (předpisem), podle něhož každému vzoru, tj. prvku $x \in M$ přiřadíme obraz $y = f(x)$. V tomto zápisu je x tzv. nezávisle proměnná (argument) funkce f, písmeno y představuje závisle proměnnou.

Množinu M nazýváme **definiční obor**. Není-li v zadání funkce uveden, pak definičním oborem $D(f)$ rozumíme množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro něž má smysl vzorec definující funkci f.
Obor hodnot funkce f značíme $H(f)$, je to množina všech obrazů: $H(f) = \{y \in \mathbb{R}; y = f(x), x \in D(f)\}$.
Grafem funkce f nazýváme množinu $G(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \in D(f), y = f(x)\}$.

Některé vybrané funkce se stručným popisem včetně grafů lze nalézt např. ve skriptu [1]. Grafy tzv. základních elementárních funkcí jsou zobrazeny též na webové stránce předmětu Matematika I, pak odkaz Kombinované studium.

Jestliže z nějakého důvodu budeme uvažovat hodnoty dané funkce f pouze na podmnožině $M \subset D(f)$, pak mluvíme o **zúžení (restrikci) funkce** f **na množinu** M. Tuto novou funkci značíme $f|_M$, její obor hodnot značíme $H(f|_M)$ nebo $f(M)$.

Nechť f a g jsou funkce, pro něž je $H(g) \subset D(f)$. Pak lze definovat tzv. **složenou funkci** h (z funkcí f a g) a to předpisem $h(x) = f(g(x))$, $x \in D(g)$. Funkci f nazýváme vnější funkcí, funkci g nazýváme vnitřní funkcí. Používáme též značení $h = f \circ g$ nebo $h = f * g$.

Příklad 1. Funkce $f(x) = \log_2(6 - x^2)$ je funkce složená. Vnější funkce je logaritmická funkce o základu 2, vnitřní funkce je $6 - x^2$. Definiční obor je dán podmínkou $6 - x^2 > 0$, takže $D(f) = (-\sqrt{6}, +\sqrt{6})$.

Funkce sudá, lichá, periodická
Funkce f se nazývá **sudá** [respektive **lichá**], jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí:
$(-x)$ patří do $D(f)$ a $f(-x) = f(x)$ [pro funkci lichou: $f(-x) = -f(x)$].
Graf funkce sudé je souměrný podle osy y, graf funkce liché je souměrný podle počátku.

Příklad 2. Ověřme podle této definice, že funkce $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ je lichá.

Definiční obor je $D(f) = (-\infty, +\infty)$ a splňuje tedy první požadavek definice. Pro každé $x \in D(f)$ platí: $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2+1} = \dfrac{-x}{x^2+1} = -f(x)$, takže i druhý požadavek definice liché funkce je splněn.

Příklad 3. Ověřte následující tvrzení: Funkce $g(x) = 3x^4 - \dfrac{5}{3}\,x^2 + 2$, $h(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ jsou sudé, zatímco funkce $f(x) = x^3 - \sqrt{2}\,x$ je lichá. Kvadratická funkce $f(x) = x^2 - 4x + 5$ není sudá ani lichá.

Příklad 4. Goniometrické funkce $\sin x$, $\operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$ jsou liché, zatímco funkce $\cos x$ je sudá.

Funkce f se nazývá **periodická s periodou** p, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí:
$x \pm p$ patří do $D(f)$ a $f(x \pm p) = f(x)$.

Příklad 5. Goniometrické funkce $\sin x$, $\cos x$ jsou periodické s periodou $p = 2\pi$.
Funkce $\operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$ jsou periodické s periodou $p = \pi$.
Funkce $f(x) = \cos 3x$ je periodická s periodou $p = 2\pi/3$.

Příklad 6. Uvažujme množinu funkcí $g_k(x) = \cos \dfrac{k\pi x}{L}$, kde $k \in N$, L je libovolné (ale pevné) kladné číslo. Pak pro každé $k \in N$ platí, že funkce g_k je periodická s periodou $p = 2L/k$.

Nechť f je funkce a množina $M \subset D(f)$. **Funkci f nazýváme**
a) **rostoucí na mn.** M, jestliže pro každé x_1, $x_2 \in M$ platí: $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
b) **klesající na mn.** M, jestliže pro každé x_1, $x_2 \in M$ platí: $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
c) **ryze monotónní na** M, je-li f rostoucí nebo klesající na M.

Funkce f se nazývá **prostá na mn. $M \subset D(f)$**, jestliže pro každé x_1, $x_2 \in M$ platí implikace: $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Je-li funkce f prostá na $D(f)$, pak k ní existuje **funkce inverzní**, kterou budeme značit f_{-1}. Její definiční obor je obor hodnot funkce f, tj. $D(f_{-1}) = H(f)$. Obor hodnot inverzní funkce je definiční obor funkce f, tj. $H(f_{-1}) = D(f)$.
Pro každé $x \in D(f)$ pak platí: $\boldsymbol{y = f(x) \Longleftrightarrow x = f_{-1}(y)}$. (1)

Jestliže funkce f není prostá na celém $D(f)$, ale jenom na nějaké podmnožině $M \subset D(f)$, pak funkci inverzní definujeme pro restrikci $f|_M$ a vztah (1) platí pro $x \in M$.

Příklad 7. Funkce $f : y = x^2$ má definiční obor $D(f) = (-\infty, \infty)$, není však na něm prostá. Uvažujme proto restrikci $f|_M$, kde $M = \langle 0, +\infty)$. Na množině M je funkce $f|_M$ rostoucí a tedy prostá, obor hodnot $H(f|_M) = \langle 0, +\infty)$ a pro každé $x \in M$ pak platí: $y = x^2 \Longleftrightarrow x = \sqrt{y}$. Je tedy inverzní funkce $f_{-1}(y) = \sqrt{y}$, kde $y \in D(f_{-1}) = H(f|_M) = \langle 0, +\infty)$.
Protože nezávisle proměnnou značíme zpravidla x, zaměníme v posledním vztahu x a y. Inverzní funkcí k funkci $y = f(x) = x^2, x \in \langle 0, +\infty)$ je tedy funkce $y = f_{-1}(x) = \sqrt{x}$, kde shodou okolností je též $x \in \langle 0, +\infty)$. Zakreslíme-li grafy funkcí f a f_{-1} do jednoho obrázku, pak tyto **grafy jsou souměrné podle osy 1. a 3. kvadrantu**, tj. podle přímky o rovnici $y = x$. Všimněte si, že obě funkce jsou rostoucí.

Uvažujme pro funkci $f : y = x^2$ jinou restrikci, totiž na interval $M = (-\infty, 0\rangle$. Na množině M je funkce $f|_M$ klesající a tedy prostá, obor hodnot $H(f|_M) = \langle 0, +\infty)$. Podobně jako v předchozím odstavci bychom odvodili, že inverzní funkcí k funkci $y = f(x) = x^2, x \in (-\infty, 0\rangle$ je funkce $y = f_{-1}(x) = -\sqrt{x}$, $x \in \langle 0, +\infty)$. Načrtněte si oba grafy do jednoho obrázku. Obě funkce jsou klesající. To je v souladu s následujícím tvrzením.

Věta. Je-li f rostoucí (resp. klesající) funkce, pak inverzní funkce f_{-1} je také rostoucí (resp. klesající).

Další dvojice funkcí navzájem inverzních

Příklad 8. Exponenciální funkce o základu $a > 0, a \neq 1$, tj. $y = f(x) = a^x$, $x \in D(f) = (-\infty, +\infty)$ je prostá. Je-li $a > 1$, pak je rostoucí, je-li $a \in (0,\, 1)$, pak je klesající. V obou případech je oborem hodnot interval $H(f) = (0, +\infty)$.
Existuje tedy funkce inverzní, a to logaritmická funkce o základu a, přičemž podle vztahu (1) platí pro každé $\boldsymbol{x \in (-\infty, +\infty)}$**:** $\boldsymbol{y = a^x \Longleftrightarrow x = \log_a y}$.

Výše zmíněnou záměnou x a y obdržíme inverzní funkci ve tvaru $y = \log_a x$, $x \in (0, +\infty)$. Při pevném a je to funkce rostoucí, jestliže $a > 1$. Je-li $a \in (0,\, 1)$, pak se jedná o funkci klesající. Grafy funkcí $y = a^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$ a $y = \log_a x$, $x \in (0, +\infty)$ jsou souměrné podle osy 1. a 3. kvadrantu.

Příklad 9. Cyklometrické funkce, tj. $\arcsin x$ (čteme arkussinus), $\arccos x$ (arkuskosinus), $\mathrm{arctg} x$ (arkustangens), $\mathrm{arccotg} x$ (arkuskotangens) jsou na příslušných intervalech funkce inverzní ke goniometrickým funkcím. Podrobněji, a to včetně grafů je popsáno ve skriptu [1]. Vztah (1) má pro tyto funkce následující tvar:
$y = \sin x \Longleftrightarrow x = \arcsin y$, platí pro $x \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle,\ y \in \langle -1, 1\rangle$,
$y = \cos x \Longleftrightarrow x = \arccos y$, platí pro $x \in \langle 0, \pi\rangle,\ y \in \langle -1, 1\rangle$,
$y = \mathrm{tg}\, x \Longleftrightarrow x = \mathrm{arctg}\, y$, platí pro $x \in (-\pi/2, \pi/2),\ y \in (-\infty, +\infty)$,
$y = \mathrm{cotg}\, x \Longleftrightarrow x = \mathrm{arccotg}\, y$, platí pro $x \in (0, \pi),\ y \in (-\infty, +\infty)$,

Literatura:

[1] J. Neustupa: Matematika I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2017 (též 2014,...).

[2] S.Kračmar, F. Mráz, J.Neustupa: Sbírka příkladů z Matematiky I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2017(též 2014,...)

[3] E. Brožíková, M. Kittlerová: Diferenciální počet funkcé jedné proměnné (řešené příklady). Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2007.