IV.6. Greenova věta

Křivkový integrál vektorového pole po uzavřené křivce c nazýváme ***cirkulací vektorového pole*** $\vec{f}$ *po křivce c a zapisujeme* $\oint_c \vec{f}\cdot d\vec{s}$.

Nechť : 1) vektorová funkce $\vec{f} = \big(U(x,y),\, V(x,y)\big)$ *má spojité parciální derivace v oblasti* $G \subset \mathbb{E}_2$,

2) křivka $c \subset G$ *je kladně orientovaná, uzavřená, jednoduchá, po částech hladká,*

3) $int\, c \subset G$.

Potom

$$\oint_c \vec{f}\cdot d\vec{s} = \iint_{int\ c} \Big(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\Big)\, dx\, dy.$$

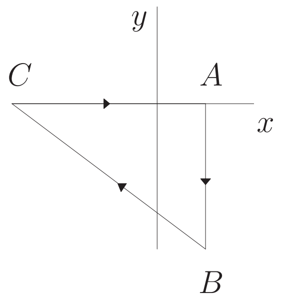
POZNÁMKA: *Je-li křivka c orientovaná záporně, pak má integrál napravo znaménko mínus.*

POZNÁMKA: *Vyjádřením křivkového integrálu v diferenciálech má tvrzení Greenovy věty tvar:*

$$\oint_c U\, dx + V\, dy = \iint_{int\ c} \Big(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\Big)\, dx\, dy.$$

***Příklad* 534**. Pomocí Greenovy věty spočtěte cirkulaci vektorového pole $\vec{f} = (2x+3y, 5x-y-4)$ po obvodu $\triangle ABC$ ve směru $A \longrightarrow B \longrightarrow C$, kde $A = [1,0], B = [1,-3]$, $C = [-3,0]$.

Řešení:



Cirkulace, tj. $\oint_c \vec{f}\cdot d\vec{s} = \oint_c (2x+3y, 5x-y-4)\, d\vec{s} \overset{\text{Gr.v.}}{=\!=}$

$= -\iint_{int\ c} (5-3)\, dx\, dy = -2 \iint_{\triangle ABC} 1\, dx\, dy =$

$= -2\cdot P_\triangle = -2\,\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\| = -12$

(orientace křivky c je záporná, proto před dvojným integrálem je znaménko minus) .

■

***Příklad* 535**. Vyšetřete existenci integrálu $\oint_c \Big(\ln(x^2+y^2), -2\text{arctg}\,\frac{y}{x}\Big)\cdot d\vec{s}$ a rozhodněte o možnosti užití Greenovy věty k jeho výpočtu, jestliže $c \subset \mathbb{E}_2$ je kladně orientovaná křivka daná rovnicí a) $x^2+y^2 = 1$, b) $(x-1)^2+y^2 = 1$, c) $(x-2)^2+y^2 = 1$, d) c je obvod čtverce s vrcholy $A = [1,0], B = [0,1]$, $C = [-1,0]$, $D = [0,-1]$. Jestliže integrál existuje, vypočtěte jej pomocí Greenovy věty.

Řešení: Definiční obor vektorové funkce $\vec{f} = \Big(\ln(x^2+y^2), -2\text{arctg}\,\frac{y}{x}\Big)$ je $D(\vec{f}) = D_1 \cup D_2$,

$D_1 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x > 0\}$, $\quad D_2 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x < 0\}$.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial \ln(x^2+y^2)}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial \ln(x^2+y^2)}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2},$$

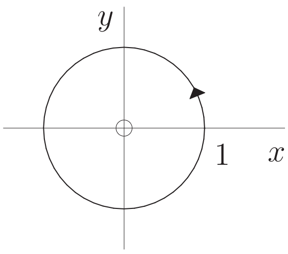
$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial\big(-2\text{arctg}\,\frac{y}{x}\big)}{\partial x} = \frac{2}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{y}{x^2}, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial\big(-2\text{arctg}\,\frac{y}{x}\big)}{\partial y} = \frac{-2}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{1}{x}.$$

V oblasti D_1 i v oblasti D_2 je daná funkce spojitá a má spojité parciální derivace 1. řádu.

Pro libovolnou uzavřenou křivku v D_1 tedy existuje $\oint_c \vec{f}\cdot d\vec{s}$ a pro výpočet lze použít

Greenovu větu. Totéž platí i pro oblast D_2.

a)

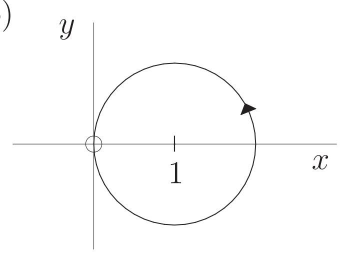


Funkce $\vec{f}$ je spojitá na množině $C \setminus M$, kde $M = \{[0,1],[0,-1]\}$ (M je dvouprvková množina). Na množině $C \setminus M$ je však funkce $\vec{f}$ omezená, neboť pro každý bod $[x,y]$ ležící mimo osu y je $\left|\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right| < \dfrac{\pi}{2}$.

Křivkový integrál tedy existuje.

Pro výpočet ale nelze použít Greenovu větu, neboť v bodech množiny M, která je částí křivky c není funkce $\vec{f}$ definovaná.

b)



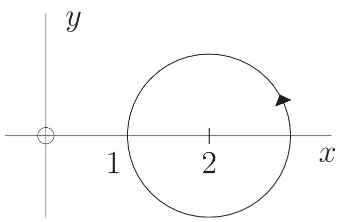
V okolí bodu $[0,0]$ není funkce $\vec{f}$ omezená, neboť

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \ln(x^2+y^2) = -\infty.$$

Daný integrál tedy neexistuje.

To platí pro libovolnou křivku, která obsahuje bod $[0,0]$.

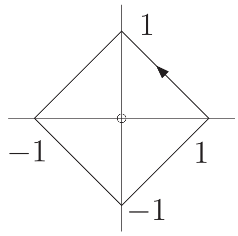
c)



Integrál existuje a lze použít Greenovu větu, neboť křivka c leží v oblasti D_1. Proveďme tedy výpočet.

$$\oint_c (U,\,V)\cdot d\vec{s} = \iint_{int\,c} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_{int\,c} \left(\frac{2}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{y}{x^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\right) dx\,dy =$$
$$= \iint_{int\,c} 0\,dx\,dy = 0.$$

d)

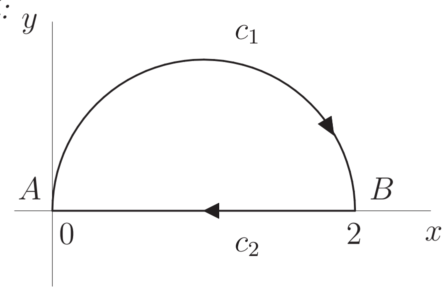


Integrál existuje, ale nelze použít Greenovu větu. Důvod je stejný jako v úloze a).

■

***Příklad* 536**. Určete cirkulaci vektorového pole $\vec{f} = (-y, x)$ po záporně orientované křivce $c = c_1 \cup c_2$, kde $c_1 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 - 2x + y^2 = 0,\ y \geq 0\}$; $c_2 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = 0,\ x \in \langle 0,2\rangle\}$,
a) přímým výpočtem, b) pomocí Greenovy věty.

Řešení:



$c_1 : (x-1)^2 + y^2 = 1, y \geq 0$,
počáteční bod je $A = [0,0]$

$c_2 : y = 0, x \in \langle 0,2\rangle$
počáteční bod je $B = [2,0]$

$$c_1 : \begin{cases} x = 1 + \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in \langle 0, \pi \rangle \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} P_1(t) = [1 + \cos t, \sin t], \quad t \in \langle 0, \pi \rangle \\ \dot{P}_1(t) = (-\sin t, \cos t) \\ P_1(0) = [2, 0] \Rightarrow \text{nesouhlasná orientace} \end{array} \right|$$

$$c_2 : \begin{cases} y = 0, \\ x \in \langle 0, 2 \rangle \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} P_2(t) = [t, 0], \quad t \in \langle 0, 2 \rangle \\ \dot{P}_2(t) = (1, 0) \\ P_2(0) = [0, 0] \Rightarrow \text{nesouhlasná orientace} \end{array} \right|$$

a) $$\oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{c_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{c_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\int_0^\pi (-\sin t,\ 1 + \cos t) \cdot (-\sin t,\ \cos t)\, dt - \int_0^2 0\, dt =$$

$$= -\int_0^\pi \Big(\sin^2 t + (1 + \cos t) \cos t \Big)\, dt = -\int_0^\pi (1 + \cos t)\, dt = -\Big[t + \sin t \Big]_0^\pi = -\pi$$

b) Souřadnicové funkce U, V daného vektorového pole $\vec{f}$ mají spojité parciální derivace v $\mathbb{E}_2$. Daná křivka c je uzavřená, po částech hladká. Lze tedy použít Greenovu větu.

$$\oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} \overset{\text{Gr.v.}}{=\!=} -\iint_{int\ c} (1 + 1)\, dx\, dy = -2 \cdot \text{(obsah půlkruhu)} = -2 \cdot \frac{1}{2}\, \pi \cdot 1^2 = -\pi$$

■

***Příklad* 537**.* Vypočítejte pomocí křivkového integrálu plošný obsah vnitřku asteriody

$$c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},\ a > 0\}.$$

Řešení: Použijeme parametrizaci asteriody :

$$c : \begin{cases} x = a^3 \cos^3 t, \\ y = a^3 \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} P(t) = [a^3 \cos^3 t, a^3 \sin^3 t] \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ \dot{P}(t) = \big(-3a^3 \cos^2 t \sin t, 3a^3 \sin^2 t \cos t \big) \end{array} \right|$$

Pro výpočet použijeme důsledku Greenovy věty, podle kterého lze obsah vnitřku křivky c vypočítat pomocí křivkového integrálu:

$$P = \iint_{int\ c} 1\, dx\, dy = \frac{1}{2} \oint_c -y\, dx + x\, dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Big(-a^3 \sin^3 t \cdot \big(-3a^3 \cos^2 t \sin t \big) + a^3 \cos^3 t \cdot 3a^3 \sin^2 t \cos t \Big)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (3a^2 \cos^2 t \sin^4 t + 3a^2 \sin^2 t \cos^4 t)\, dt = \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cdot \cos^2 t\, dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2t}{4}\, dt = \frac{3}{8}\, a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4t}{2}\, dt = \frac{3}{16}\, a^2 \Big[t - \frac{\sin 4t}{4} \Big]_0^{2\pi} = \frac{3}{8}\, a^2 \pi$$

■

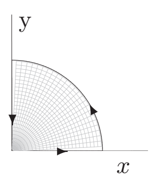
• Je dána množina D a vektorové pole $\vec{f}$.

a) Napište Greenovu větu (předpoklady a tvrzení).

b) Načrtněte množinu D a vyznačte křivku c, která je kladně orientovanou hranicí této množiny D.

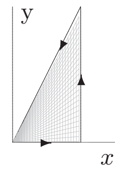
c) Vypočítejte cirkulaci vektorového pole $\vec{f}$ podél křivky c.

538. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ $\quad \vec{f} = (xy,\ x^2 + 2x)$



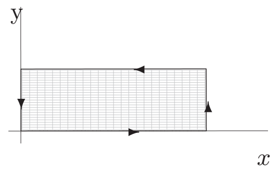
$\left[\frac{8}{3} + 2\pi \right]$

539. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2x\}, \quad \vec{f} = (y^2 - 3y,\ xy)$



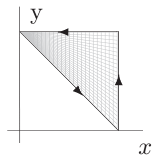
$\left[\frac{14}{3}\right]$

540. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 1\}, \quad \vec{f} = \left(\frac{1}{3}\, y^3,\ x^2 + y^2\right).$



$[8]$

541. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ 0 \leq x \leq 4,\ 4 - 4x \leq y \leq 4\}, \quad \vec{f} = \left(y^2,\ (x + y)^2\right)$



$\left[\frac{128}{3}\right]$

542. Vyšetřete existenci integrálu $\displaystyle\oint_c \left(-\frac{1}{x^2}, 2x\right) \cdot d\vec{s}$ a rozhodněte o možnosti užití Greenovy věty, jestliže $c \subset \mathbb{E}_2$ je záporně orientovaná křivka :
a) $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = 1\}$,
b) $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + (y - 2)^2 = 1\}$,
c) $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ (x - 2)^2 + y^2 = 1\}$.
V kladném případě vypočtěte integrál pomocí Greenovy věty.

[a) neexistuje, nelze
b) neexistuje, nelze
c) existuje, lze; $\quad -2\pi$]

• Je dáno vektorové pole $\vec{f}$ a křivka c.
a) Napište Greenovu větu a ověřte, zda jsou splněny její předpoklady pro výpočet daného integrálu $\displaystyle\oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$.
b) Hodnotu tohoto křivkového integrálu vypočítejte pomocí Greenovy věty.
c) Stejný křivkový integrál vypočítejte bez užití Greenovy věty.

543. $\vec{f} = (-y,\ x), \quad c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = 16\}$, která je orientovaná záporně.

$[-32\pi]$

544. $\vec{f} = \left(1 - x^2, x(1 + y^2)\right), \quad c = \partial\, D$ je hranice množiny $D = \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 2\rangle\}$, která je orientovaná záporně. $\left[\frac{32}{3}\right]$

545.* $\vec{f} = \left(\frac{2y^3}{3} + g(x),\ xy^2 + h(y)\right)$, kde g, h jsou libovolné funkce jedné proměnné se spojitou derivací v $\mathbb{R}$, $\quad c\quad$ je záporně orientovaná hranice množiny

$D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y \geq 0,\ y \leq 2 - x,\ x \geq y^2\}$. $\left[\frac{13}{60}\right]$

546. Pomocí křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (x + 1\,,\ 2y)$ působením po dané orientované křivce:
a) c_1: úsečka AB, s počátečním bodem $A = [-1, 0]$ a koncovým bodem $B = [1, 0]$.
b) $c_2 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0\}$ s počátečním bodem $B = [1, 0]$.
c) Pomocí Greenovy věty určete práci po uzavřené orientované křivce $c = c_1 \cup c_2$.
[a) 2, b) -2, c) 0]

547. Vypočtěte cirkulaci $\vec{f} = \dfrac{2(y, -x)}{x^2 + y^2}$ po kladně orientované křivce $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + y^2 = 16\}$. Lze použít Greenovu větu ? Odpověď zdůvodněte! [-4π, nelze]

548. Pomocí Greenovy věty vypočtěte cirkulaci vektoru $\vec{f} = \Big(y, (x - y)^2\Big)$ po záporně orientované křivce $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; (x - 1)^2 + y^2 = 1\}$. [$-\pi$]

549.* Odvoďte pomocí křivkového integrálu vzorec pro plošný obsah obrazce, který je ohraničen elipsou $c = \Big\{[x, y] \in \mathbb{E}_2; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\Big\}$. [$\pi\, ab$]

550.* Užitím křivkového integrálu vypočtěte obsah obrazce omezeného obloukem cykloidy $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ a úsečkou z bodu $[0, 0]$ do bodu $[2\pi a, 0]$. [$3\pi a^2$]

551.* Nechť c_1 je úsečka z bodu $[0, 0]$ do bodu $[1, 1]$, c_2 je část paraboly $y = x^2$ opět z $[0, 0]$ do $[1, 1]$ a $I_1 = \displaystyle\int_{c_1} (x+y)^2\, dx - (x-y)^2\, dy, I_2 = \int_{c_2} (x+y)^2\, dx - (x-y)^2\, dy$. Užitím Greenovy věty vypočtěte $I_1 - I_2$.

$\left[\pm\frac{1}{3}.\quad \text{Návod: } \oint_{c_1\cup c_2} = \int_{c_1} - \int_{c_2} \text{ (záp.orient.)} \quad \text{nebo } \oint_{c_1\cup c_2} = \int_{c_2} - \int_{c_1} \text{ (klad.orient.)}\right]$

552.* Pomocí Greenovy věty vypočtěte integrál $\displaystyle\oint_c \left(x\mathrm{e}^{-y^2},\ -x^2y\mathrm{e}^{-y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2}\right) \cdot d\vec{s}$, kde c je kladně orientovaný obvod čtverce s vrcholy $[1, 0]$, $[2, 0]$, $[2, 1]$, $[1, 1]$. $\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right]$

553. Pomocí Greenovy věty vypočtěte integrál $\displaystyle\oint_c (y^2\mathrm{e}^x - y^3, 2y\mathrm{e}^x - 3) \cdot d\vec{s}$, kde $c = c_1 \cup c_2$; $c_1 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x = 0,\ y \in \langle -2, 2\rangle\}$, $c_2 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; 4x^2 + y^2 = 4,\ x \geq 0\}$, přičemž $[0, 2]$ je počáteční bod křivky c_1. [3π]