II.7.* Derivace složené funkce

Nechť jsou dány diferencovatelné funkce $z = f(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Pak

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

• Vypočítejte derivace daných diferencovatelných funkcí.

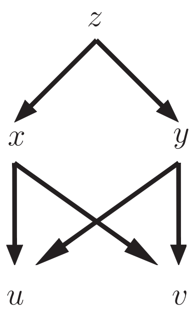
***Příklad* 160**. Jsou dány diferencovatelné funkce $z = f(x, y)$, $x = u\cos v$, $y = u\sin v$.

a) Vypočítejte derivace složené funkce $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial v}$.

b) Ověřte přímým výpočtem pro $z = f(x, y) = \mathrm{e}^x \ln y$.

Řešení :

a) Závislost mezi proměnnými lze znázornit orientovaným grafem, ze kterého sestavíme vzorce pro jednotlivé derivace.



$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos v + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{\partial f}{\partial x} \cdot u\sin v + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot u\cos v$$

b1) Dosadíme za x a y a dostaneme funkci $z(u, v) = \mathrm{e}^{u\,\cos v} \ln(u\,\sin v)$, pak

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \mathrm{e}^{u\,\cos v} \cdot \cos v \cdot \ln(u\,\sin v) + \mathrm{e}^{u\,\cos v} \cdot \frac{1}{u\,\sin v} \cdot \sin v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \mathrm{e}^{u\,\cos v} \cdot (-u\,\sin v) \cdot \ln(u\,\sin v) + \mathrm{e}^{u\,\cos v} \cdot \frac{1}{u\,\sin v} \cdot u\,\cos v\ .$$

b2) Do vzorců z a) dosadíme za $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}$

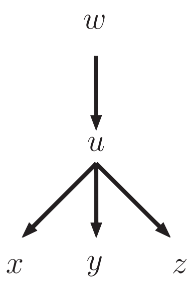
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos v + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin v = e^x \ln y \cdot \cos v + \frac{e^x}{y} \sin v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot u\sin v + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot u\cos v = -e^x \ln y \cdot u\sin v + \frac{e^x}{y} u\cos v.$$

Dosazením za x a y dostaneme stejný výsledek jako v b1). ■

***Příklad* 161**. $w = f(x^4 + y^4 - 2z^4)$. Spočítejte výraz $V = \dfrac{1}{4x^3}\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{1}{4y^3}\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{1}{4z^3}\dfrac{\partial w}{\partial z}$.

Řešení : Označme $u = x^4 + y^4 - 2z^4 \quad \Rightarrow \quad w = f(u)$ je funkce jedné proměnné.



$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = f'(u) \cdot 4x^3,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = f'(u) \cdot 4y^3,$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = f'(u) \cdot (-8z^3).$$

Po dosazení snadno spočítáme, že $V = 0$. ■

162. Přesvědčte se, že funkce $y = f(x + at) + g(x - at)$ vyhovuje parciální diferenciální rovnici $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$, kde konstanta $a \in \mathbb{R}$. Předpokládáme, že f a g mají spojité parciální derivace 2. řádu. [Návod: $u = x + at,\ v = x - at,\ y = f(u) + g(v)$]

163. Přesvědčte se, že funkce $z = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ splňuje rovnici $x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$. Předpokládáme, že f je diferencovatelná funkce.

164. Jsou dány funkce $z = f(u, v),\ u = x^2 - y^2,\ v = \mathrm{e}^{xy}$. Spočítejte diferenciální výraz $W = y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y}$, kde f je diferencovatelná funkce. $\left[W = (x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^{xy} \dfrac{\partial f}{\partial v}\right]$

165. Je dána funkce $f(u, v) = x^y$, kde $x = u^2 + v^2,\ y = uv + v^2$. Spočítejte $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ a $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ v bodě A, jehož souřadnice jsou $u = 1,\ v = -1$. $\left[\dfrac{\partial f}{\partial u}(A) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(A) = -\ln 2\right]$

II.9. Funkce definované implicitně

***Příklad* 166**. Dokažte, že rovnicí $x^3 + y^3 = 2x^2 + xy - 1$ je implicitně definována jediná funkce $y = f(x)$ v okolí bodu $A = [1, 0]$. Určete $f'(1)$ a $f''(1)$.

Řešení : Označme $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2x^2 - xy + 1$. Tato funkce je spojitá a má spojité parciální derivace 1. a 2. řádu v $\mathbb{E}_2$, tedy i v okolí bodu A, ověřte si. K existenci a jednoznačnosti implicitní funkce $y = f(x)$ se spojitou 1. a 2. derivací nyní stačí, že $F(A) = F(1, 0) = 0$ a $F_y(A) = (3y^2 - x)\Big|_A = -1 \neq 0$. Dále spočítáme

$$y' = f'(x) = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 4x - y}{3y^2 - x}, \qquad f'(1) = -\frac{F_x(A)}{F_y(A)} = -\frac{3 - 4}{-1} = -1,$$

$$y'' = f''(x) = \frac{d}{dx}\Big(f'(x)\Big) = -\frac{(6x - 4 - y')(3y^2 - x) - (3x^2 - 4x - y)(6y \cdot y' - 1)}{(3y^2 - x)^2}$$

$$f''(1) = -\frac{(6 - 4 + 1)(-1) - (3 - 4)(-1)}{1} = 4.$$ ■

***Příklad* 167**. Napište rovnici tečny t a normály n v bodě $A = [1, 1]$ křivky definované implicitně rovnicí $F(x, y) \equiv x^3 y + y^3 x + x^2 y - 3 = 0$,

Řešení : Jelikož $F(1, 1) = 0$ a $F_y(A) = \Big(x^3 + 3y^2 x + x^2\Big)\Big|_{[1,1]} = 5 \neq 0$, je rovnicí $F(x, y) = 0$ skutečně definována funkce $y = y(x)$, jejíž graf prochází bodem A.

$$y'(1) = -\frac{F_x(A)}{F_y(A)} = \left(-\frac{3x^2 y + y^3 + 2xy}{x^3 + 3y^2 x + x^2}\right)\Big|_A = -\frac{6}{5}$$

$t:\quad y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, kde $A = [x_0, y_0]$, $\quad y - 1 = -\dfrac{6}{5}(x - 1) \Longrightarrow 6x + 5y - 11 = 0$,

$n:\quad y - y_0 = -\dfrac{1}{y'(x_0)}(x - x_0), \quad y - 1 = \dfrac{5}{6}(x - 1) \Longrightarrow 5x - 6y + 1 = 0.$ ■

***Příklad* 168**. Rovnicí $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ je pro $x \neq 0$ dána implicitně funkce $y = f(x)$. Stanovte y' a y''.

Řešení : Můžeme použít známý vzorec $y' = -\dfrac{F_x}{F_y}, F_y \neq 0$ nebo můžeme danou rovnici přímo derivovat a přitom si uvědomit, že y je závislé na x tj. $y = y(x)$.
Derivujme přímo :

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2x+2yy'}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{y'x-y}{x^2} \Longrightarrow \frac{x+yy'}{x^2+y^2} = \frac{y'x-y}{x^2+y^2} \quad \Longrightarrow$$

$$x+yy' = y'x-y \Longrightarrow x+y = y'(x-y) \Longrightarrow \quad y' = \frac{x+y}{x-y}, \quad x \neq y,\, x \neq 0.$$

Druhou derivaci spočítáme podobně :

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)' = \frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2} = \frac{x-y-x-y+y'(x-y+x+y)}{(x-y)^2}$$

$$y'' = \frac{-2y+2xy'}{(x-y)^2} = \frac{-2y+2x\cdot\frac{x+y}{x-y}}{(x-y)^2} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}, \quad x \neq y,\, x \neq 0. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 169**. Ukažte, že rovnicí $x^2+2xy+y^2-4x+2y-3=0$ je implicitně určena funkce $y = f(x)$, jejíž graf prochází bodem $A = [0,1]$. Zjistěte, zda je funkce f konvexní v okolí bodu $x_0 = 0$. Napište rovnici tečny ke grafu funkce v bodě A.

Řešení : $F(x,y) = x^2+2xy+y^2-4x+2y-3$ je diferencovatelná v $\mathbb{E}_2$ (tedy i v okolí bodu A) a má v $\mathbb{E}_2$ spojité parciální derivace 2. řádu. Dále platí:

$$F(A) = F(0,1) = 0, \quad F_y(A) = (2x+2y+2)\Big|_A = 4 \neq 0,$$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x+2y-4}{2x+2y+2} = -\frac{x+y-2}{x+y+1} \Longrightarrow y'(0) = \frac{1}{2},$$

$$y'' = -\frac{(1+y')(x+y+1)-(x+y-2)(1+y')}{(x+y+1)^2} = -\frac{3(1+y')}{(x+y+1)^2} \quad \Longrightarrow$$

$$y''(0) = -\frac{3(1+\frac{1}{2})}{(0+1+1)^2} = -\frac{9}{8} < 0.$$ Funkce $y = f(x)$ je v okolí bodu x_0 konkávní,

jelikož $y''(0) < 0$. Tečna v bodě A má rovnici $y - 1 = \dfrac{1}{2}x$. $\blacksquare$

***Příklad* 170**. Dokažte, že vztahem $F(x,y,z) = z^3+3x^2z-2xy = 0$ je implicitně definována jediná funkce $z = f(x,y)$ v okolí bodu $A = [-1,-2,1]$. Určete $\operatorname{grad} f(-1,-2)$.

Řešení : Funkce F má spojité parciální derivace v okolí bodu A,

$$F(A) = F(-1,-2,1) = 0, \quad F_z(A) = (3z^2+3x^2)\Big|_A = 6 \neq 0.$$

Tím je v okolí bodu A prokázána existence a jednoznačnost funkce $z = f(x,y)$, která má spojité parciální derivace 1. řádu v okolí bodu $[-1,-2]$.

Nyní je $\operatorname{grad} f(-1,-2) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(A), \dfrac{\partial f}{\partial y}(A)\right)$, kde

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{6xz-2y}{3z^2+3x^2} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(-1,-2) = \frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-2x}{3z^2+3x^2} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(-1,-2) = -\frac{1}{3},$$

$$\operatorname{grad} f(-1,-2) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}(1,-1). \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 171**. V okolí bodu $[2,-2,1]$ je dána funkce $z = f(x,y)$ v implicitním tvaru rovnicí $\ln z + x^2yz + 8 = 0$. Určete $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A)$, kde $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$, $A = [2,-2]$, $B = [3,-3]$.

Řešení : Označíme $F(x,y,z) = \ln z + x^2yz + 8$. Funkce $F_x = 2xyz$, $F_y = x^2z$, $F_z = \dfrac{1}{z} + x^2y$ jsou spojité v okolí bodu $[2,-2,1]$.
V bodech, kde $F(x,y,z) = 0$ a $F_z(x,y,z) \neq 0$ platí :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2xyz}{\frac{1}{z}+x^2y} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(A) = -\frac{8}{7}, \ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{x^2z}{\frac{1}{z}+x^2y} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(A) = \frac{4}{7},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \operatorname{grad} f(A) \cdot \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|} = \left(-\frac{8}{7}, \frac{4}{7}\right) \cdot \frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} = \frac{-12}{7\sqrt{2}} = \frac{-6\sqrt{2}}{7}.$$ ■

Je dána plocha $z = z(x,y)$ a bod dotyku $T = [A, f(A)]$, kde $A = [x_0, y_0]$, pak

tečná rovina $\tau :\ z - z_0 = \dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x - x_0) + \dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y - y_0)$

normála $n :\ X = T + t\,\vec{n},\ t \in \mathbb{R}$, kde $\vec{n} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0),\ \dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0),\ -1\right)$

***Příklad* 172**. Napište rovnici tečné roviny τ a normály n k ploše $z = z(x,y)$ definované implicitně rovnicí $F(x,y,z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$ v bodě $A = [3,0,4]$.

Řešení : Víme, že normálový vektor k ploše má vyjádření

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right) = \left(-\frac{F_x}{F_z}, -\frac{F_y}{F_z}, -1\right) \sim \vec{n} = (F_x, F_y, F_z).$$

Je-li plocha vyjádřena v implicitním tvaru, pak poslední zápis je výhodnější. Tedy
$\vec{n} = (2x, 2y, 2z) \sim (x,y,z)\big|_A = (3,0,4)$,

$$\tau : 3(x-3) + 0\cdot y + 4(z-4) = 0 \Longrightarrow 3x + 4z - 25 = 0,$$
$$n : [x,y,z] = [3,0,4] + t(3,0,4),\ t \in \mathbb{R}.$$ ■

***Příklad* 173**. Napište rovnici tečné roviny k ploše definované implicitně rovnicí $F(x,y,z) \equiv x(y+z) + z^2 - 5 = 0$ rovnoběžné s rovinou $\varrho : 3x - 3y + 6z = 2$.

Řešení : $\vec{n} = (3,-3,6) \sim (1,-1,2)$

$$\vec{n} = (F_x, F_y, F_z) = (y+z, x, x+2z) = k(1,-1,2),\ k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\left.\begin{aligned} y + z &= k \\ x &= -k \\ x + 2z &= 2k \end{aligned}\right\} \text{ a z této soustavy musíme určit souřadnice dotykového bodu } A.$$

Vychází $x = -k$, $y = -\dfrac{k}{2}$, $z = \dfrac{3}{2}k$. Víme, že hledaný bod musí ležet na dané ploše, proto dosadíme do $F(x,y,z) = 0$ a určíme parametr k , a tím i souřadnice hledaného bodu. Dostáváme postupně

$$-k\left(-\frac{k}{2} + \frac{3}{2}k\right) + \left(\frac{3}{2}k\right)^2 = 5 \Rightarrow -k^2 + \frac{9}{4}k^2 = 5 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2,$$

$$A_1 = [-2,-1,3],\ A_2 = [2,1,-3],$$

$$\tau_1 : x - y + 2z - 5 = 0, \quad \tau_2 : x - y + 2z + 5 = 0.$$

■

***Příklad* 174**.* Určete rovnici tečny v bodě $A=[-2,1,6]$ ke křivce v $\mathbb{E}_3$, která je průsečnicí dvou ploch zadaných implicitně rovnicemi $2x^2+3y^2+z^2=\ 47\ , x^2+2y^2=z$.

Řešení : Určíme tečnou rovinu v bodě A k první ploše $\tau_1: -4x+3y+6z-47=0$ a tečnou rovinu ke druhé ploše $\tau_2: -4x+4y-z-6=0$. Směrový vektor hledané tečny je $\vec{s}\ =\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(-27,-28,-4)\sim(27,28,4)$ a rovnice tečny

$$[x,y,z]=[-2,1,6]+t(27,28,4),\ t\in\mathbb{R}.$$

Uvedeme další možný postup. Při daném vyjádření křivky jako průniku dvou ploch budeme předpokládat, že jediná nezávislá proměnná je x.
Potom y a z budou funkcemi proměnné x, tj. $y(x), z(x)$.
Hledaný tečný vektor $\vec{s}$ bude $(1,y'(x),z'(x))$. Proto danou soustavu zderivujeme podle x :

$$\begin{aligned}4x+6yy'+2zz'&=0\\ 2x+4yy'&=z'\end{aligned}\quad\text{neboli}\quad\begin{aligned}2x+3yy'+zz'&=0\\ 2x+4yy'&=z'\end{aligned}.$$

Nás zajímá tečný vektor v daném bodě, proto dosadíme souřadnice bodu A a obdržíme postupně vzájemně ekvivalentní soustavy

$$\left.\begin{aligned}-4+3y'+6z'&=0\\ -4+4y'-z'&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}3y'+6z'&=4\\ 4y'-z'&=4\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad\begin{aligned}y'&=\frac{\begin{vmatrix}4&6\\4&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&6\\4&-1\end{vmatrix}}=\frac{-28}{-27}=\frac{28}{27},\\ z'&=\frac{\begin{vmatrix}3&4\\4&4\end{vmatrix}}{-27}=\frac{-4}{-27}=\frac{4}{27}\end{aligned}.$$

Hledaný tečný vektor je $\vec{s}=\left(1,\dfrac{28}{27},\dfrac{4}{27}\right)\sim(27,28,4)$. Parametrické vyjádření tečny je tedy opět $[x,y,z]=[-2,1,6]+t(27,28,4),\ t\in\mathbb{R}$. ■

***Příklad* 175**. a) Najděte jednotkový vektor $\vec{n}^o$ normály v bodě $A=[1,-1,1]$ plochy vyjádřené implicitně ve tvaru $F(x,y,z)\equiv x^2+y^2+z^2-3=0$.

b) Spočítejte $\dfrac{\partial g}{\partial\vec{n}^o}(A)$, kde $g(x,y,z)=xy^2z^3$.

Řešení : a) $\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)=(2x,2y,2z)\sim(x,y,z),\quad \vec{n}^o(A)=\dfrac{\vec{n}(A)}{\|\vec{n}(A)\|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$

b) $\dfrac{\partial g}{\partial\vec{n}^o}(A)=\operatorname{grad} g(A)\cdot\vec{n}^o(A)=(1,-2,3)\cdot\dfrac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}.$ ■

• Napište rovnici tečny t a normály n křivky definované implicitně rovnicí $F(x,y)=0$ v bodě A :

176. $F(x,y)\equiv\arcsin x+xy^2=0,\ A=[0,2]$ $[t:\ x=0, n: y=2]$

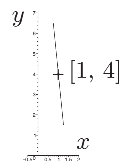
177. $F(x,y)\equiv x^2y+xy^2-axy-a^3=0,\ A=[a,a]$ $[t:\ y=-x+2a, n: y=x]$

178. Dokažte, že rovnicí $\ln(x+y)+2x+y=0$ je definována funkce $y=f(x)$ splňující $f(-1)=2$. Napište rovnici tečny ke křivce $y=f(x)$ v bodě $A=[-1,2]$.
$[t: y-2=-\frac{3}{2}(x+1)]$

- Funkce jedné proměnné $y = f(x)$ je definovaná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$.
  - a) Vypočítejte parciální derivace 1. řádu funkce F.
  - b) Ověřte, že rovnicí $F(x, y) = 0$ je v okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně určena funkce $y = f(x)$, která má spojitou derivaci $f'(x)$ v okolí bodu x_0.
  - c) Určete hodnotu derivace $f'(x_0)$ a napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce f v bodě dotyku $[x_0, y_0]$. Popište chování této funkce v bodě x_0, tj. rostoucí, resp. klesající.
  - d) Rovnici tečny užijte k přibližnému výpočtu hodnoty $y = f(x)$ v daném bodě x_1. Tečnu načrtněte.

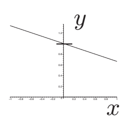
179. $F(x, y) = x^2y - x^3 - 2 \cdot \sqrt{y} + 1$, $[x_0, y_0] = [1, 4]$, $x_1 = 0.8$

$$\left[\begin{array}{r} a)\ F_x = 2xy - 3x^2,\ F_y = x^2 - \dfrac{1}{\sqrt{y}} \\ c)\ f'(1) = -10,\ t:\ y = 4 - 10(x-1),\ n:\ y = 4 + \dfrac{1}{10}(x-1), \\ \text{funkce} f \text{ je v bodě } x_0 = 1 \text{ klesající} \\ d)\ f(0.8) \doteq 6 \end{array}\right]$$



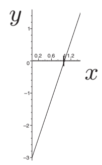
180. $F(x, y) = y\,\mathrm{e}^x + y^2 - 2x^2y - 2$, $[x_0, y_0] = [0, 1]$, $x_1 = -0.3$

$$\left[\begin{array}{r} a)\ F_x = y\,\mathrm{e}^x - 4xy,\ F_y = \mathrm{e}^x + 2y - 2x^2 \\ c)\ f'(0) = -1/3,\ t:\ y = 1 - x/3,\ n:\ y = 1 + 3x, \\ \text{funkce} f \text{ je v bodě } x_0 = 0 \text{ klesající} \\ d)\ f(-0.3) \doteq 1.1 \end{array}\right]$$



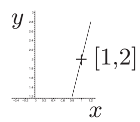
181. $F(x, y)) = \ln(x - y) + 2x + y^2 - 2 = 0$, $[x_0, y_0] = [1, 0]$, $x_1 = 1.1$

$$\left[\begin{array}{r} a)\ F_x = \dfrac{1}{x-y} + 2,\ F_y = -\dfrac{1}{x-y} + 2y \\ c)\ f'(1) = 3,\ t:\ 3x - y = 3,\ n:\ x + 3y = 1, \\ \text{funkce} f \text{ je v bodě } x_0 = 1 \text{ rostoucí} \\ d)\ f(1.1) \doteq 0.3 \end{array}\right]$$



182. $F(x, y) = xy\mathrm{e}^{x-y} - \dfrac{2}{\mathrm{e}} = 0$, $[x_0, y_0] = [1, 2]$, $x_1 = 1.1$

$$\left[\begin{array}{r} a)\ F_x = (y + xy)\,\mathrm{e}^{x-y},\ F_y(x, y) = (x - xy)\,\mathrm{e}^{x-y} \\ c)\ f'(1) = 4,\ t:\ y = 2 + 4(x-1),\ n:\ x + 4y = 9, \\ \text{funkce} f \text{ je v bodě } x_0 = 1 \text{ rostoucí} \\ d)\ f(1.1) \doteq 2.4 \end{array}\right]$$

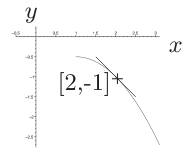


Výpočet 2. derivace v následujících příkladech není v požadavcích zkoušky úrovně Beta.

- Funkce jedné proměnné $y = f(x)$ je definovaná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$.
  - a) Ověřte (všechny předpoklady), že rovnicí $F(x, y) = 0$ je implicitně určena funkce $y = f(x)$, jejíž graf prochází bodem $[x_0, y_0]$ a má spojitou 1. a 2. derivaci v okolí bodu x_0.
  - b) Určete hodnoty derivací $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$.
  - c) Napište Taylorův polynom 2. stupně $T_2(x)$ funkce f se středem v bodě x_0. Pomocí $T_2(x)$ vypočítejte přibližně hodnotu $f(x)$ pro dané x_1.
  - d) Načrtněte graf funkce f v okolí bodu $[x_0, y_0]$.

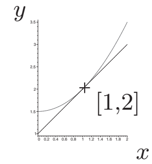
183. $F(x,y)=x^3+2x^2y+y^4-1=0$, $[x_0,y_0]=[2,-1]$, $x_1=2.2$

$$\left[\begin{array}{r} b)f'(2)=f''(2)=-1,\\ c)\,T_2(x)=1-x-\dfrac{(x-2)^2}{2},\\ f(2.2)\doteq -1.22\end{array}\right]$$



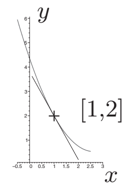
184. $F(x,y)=x^3+\dfrac{y^2}{2}-x^2y-1=0$, $[x_0,y_0]=[1,2]$, $x_1=1.2$

$$\left[\begin{array}{r} b)f'(1)=f''(1)=1,\\ c)\,T_2(x)=1+x+\dfrac{(x-1)^2}{2},\\ f(1.2)\doteq 2.22\end{array}\right]$$



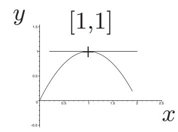
185. $F(x,y)=x^3+xy^2+xy-7=0$, $[x_0,y_0]=[1,2]$, $x_1=0.9$

$$\left[\begin{array}{r} b)f'(1)=-\dfrac{9}{5},\ f''(1)=\dfrac{138}{125},\\ c)\,T_2(x)=2-\dfrac{9}{5}(x-1)-\dfrac{69}{125}(x-1)^2,\\ f(1.2)\doteq\dfrac{27319}{12500}\end{array}\right]$$



186. $F(x,y)=x^2+2y^2-2xy-y=0$, $[x_0,y_0]=[1,1]$, $x_1=1.2$

$$\left[\begin{array}{r} b)f'(1)=0,\ f''(1)=-2,\\ \text{v bodě nastává lokální maximum}\\ c)\,T_2(x)=1-(x-1)^2,\ f(1.2)\doteq 0.96\end{array}\right]$$



• Napište rovnici tečné roviny τ a normály n k ploše $F(x,y,z)=0$ v bodě A :

187. $x^2+2y^2+3z^2-21=0,\ A=[1,2,2]$

$[\tau:\ x+4y+6z-21=0,\ n:\ [x,y,z]=(1,2,2)+t(1,4,6),\ t\in\mathbb{R}]$

188. $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0,\ A=[1,2,-1]$

$[\tau:\ x+11y+5z-18=0,\ n:\ [x,y,z]=(1,2,-1)+t(1,11,5),\ t\in\mathbb{R}]$

189. $xyz^2-x-y-z=0,\ A=[1,-1,-1]$

$[\tau:\ -2x+z+3=0,\ n:\ [x,y,z]=(1,-1,-1)+t(-2,0,1),\ t\in\mathbb{R}]$

• Napište rovnici takové tečné roviny k ploše $F(x,y,z)=0$, která je rovnoběžná s rovinou ϱ.

190. $x^2+y^2+z^2-1=0,\ \varrho: x+2y+z=0$

$[x+2y+z\pm\sqrt{6}=0$, body dotyku $T_{1,2}=[\pm\frac{1}{\sqrt{6}},\pm\frac{2}{\sqrt{6}},\pm\frac{1}{\sqrt{6}}]]$

191. $x^2+2y^2+3z^2-21=0,\ \varrho:\ x+4y+6z=0$ $[x+4y+6z\pm 21=0,\ T_{1,2}=[\pm1,\pm2,\pm2]]$

192. Je dána funkce $z=f(x,y)$ v implicitním tvaru $\mathrm{e}^z-xyz=\mathrm{e}$. Určete $f_x(A)$, $f_y(A)$, $f_{xy}(A)$, kde bod $A=[0,\mathrm{e},1]$ $[f_x(A)=1,\ f_y(A)=0,\ f_{xy}(A)=1/\mathrm{e}]$

193. Jsou dány dvě plochy rovnicemi v implicitním tvaru $x + 2y - \ln z + 4 = 0$ a $x^2 - xy - 8x + \frac{1}{2}z^2 + \frac{11}{2} = 0$. Určete vzájemnou polohu tečných rovin obou ploch ve společném bodě $T = [2, -3, 1]$. [$x + 2y - z + 5 = 0$ je společná tečná rovina]

Úlohy s implicitní funkcí dvou proměnných nejsou v požadavcích zkoušky úrovně Beta.

- Funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ je definovaná implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$.
  a) Ověřte (všechny předpoklady), že rovnicí $F(x, y, z) = 0$ je implicitně určena funkce $z = f(x, y)$, jejíž graf prochází bodem $A = [x_0, y_0, z_0]$ a má spojité parciální derivace 1. řádu v okolí bodu $[x_0, y_0]$.
  b) Vypočtěte derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ a určete $\operatorname{grad} f\,(x_0, y_0)$.
  c) Napište rovnici tečné roviny τ a rovnici normály n ke grafu funkce f v bodě A (tj. též k ploše popsané rovnicí $F(x, y, z) = 0$).
  d) Určete diferenciál funkce f v bodě $[x_0, y_0]$. Vypočítejte přibližně hodnotu funkce f v daném bodě $[x_1, y_1]$.
  e) Určete derivaci funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ ve směru $\vec{u}$. Napište směr $\vec{s}$, ve kterém funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ nejrychleji klesá. Vypočítejte derivaci funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ ve směru $\vec{s}$.

194. $F(x, y, z) = 2x^3yz - x + y^3 + z^3 - 2 = 0$, $A = [1, 2, -1]$, $[x_1, y_1] = [0.9, 2.1]$, $\vec{u} = (2, 4)$

[b) $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{6x^2yz - 1}{2x^3y + 3z^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2x^3z + 3y^2}{2x^3y + 3z^2}$, $\operatorname{grad} f\,(1, 2) = \left(\frac{13}{7}, -\frac{10}{7}\right)$
c) $\tau:\ 13x - 10y - 7z = 0$, $n:\ [x, y, z] = [1, 2, -1] + t(13, -10, -7)$, $t \in \mathbb{R}$
d) $df(A) = \frac{13}{7}(x - 1) - \frac{10}{7}(y - 2)$, $f(0.9, 2.1) \doteq -\frac{93}{70} \doteq -1.328$
e) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2) = -\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\vec{s} = (-13, 10)$, $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(1, 2) = -\frac{\sqrt{269}}{7}$]

195. $F(x, y, z) = x^3 + 3xy^2z + 2yz^3 = 0$, $A = [1, -1, -1]$, $[x_1, y_1] = [0.9, -1.1]$, $\vec{u} = (1, -2)$

[b) $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{3x^2 + 3y^2z}{3xy^2 + 6yz^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{6xyz + 2z^3}{3xy^2 + 6yz^2}$, $\operatorname{grad} f\,(1, -1) = \left(0, \frac{4}{3}\right)$
c) $\tau:\ 4y - 3z + 1 = 0$, $n:\ [x, y, z] = [1, -1, -1] + t(0, 4, -3)$, $t \in \mathbb{R}$
d) $df(A) = \frac{4}{3}(y + 1)$, $f(0.9, -1.1) \doteq -1.13$
e) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, -1) = -\frac{8}{3\sqrt{5}}$, $\vec{s} = \left(0, -\frac{4}{3}\right)$, $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(1, -1) = -\frac{4}{3}$]

196. $F(x, y, z) = z\mathrm{e}^{x+y} - xy + z^2 - 6 = 0$, $A = [0, 0, 2]$, $[x_1, y_1] = [-0.2, 0.1]$, $\vec{u} = (-1, 2)$

[b) $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{z\mathrm{e}^s etminusx + y - y}{\mathrm{e}^{x+y} + 2z}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{z\mathrm{e}^{x+y} - x}{\mathrm{e}^{x+y} + 2z}$, $\operatorname{grad} f\,(0, 0) = \left(-\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$
c) $\tau:\ 2x + 2y + 5z = 10$, $n:\ [x, y, z] = [0, 0, 2] + t(2, 2, 5)$, $t \in \mathbb{R}$
d) $df(A) = -\frac{2}{5}(x - 0) - \frac{2}{5}(y - 0)$, $f(-0.2, 0.1) \doteq 2.04$
e) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = -\frac{2}{5\sqrt{5}}$, $\vec{s} = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0, 0) = -\frac{\sqrt{8}}{5}$]