Integrace racionální funkce (pracovní text)

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Jedná se o integrály $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$, kde P, Q jsou dané polynomy, stupeň $(P) <$ stupeň (Q).

Stručný přehled možných situací je popsán v textu [3] na webové stránce Kombinované studium takto:
I. Speciální případy, které řešíme vhodnou substitucí,
II. st $(Q) = 2$, tj. kvadratický polynom ve jmenovateli,
III. st $(Q) = 3$, tj. kubický polynom ve jmenovateli (ve zkoušce Alfa).

Ia. Speciální případ: **Integrál má tvar** $\displaystyle\int \frac{Q'(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$.

Použijeme substituci $Q(x) = t,\ Q'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.

$\boxed{\textbf{Př. 1.}}$ $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^4-16}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln|x^4-16| + C.$

Platí pro $x \neq \pm 2$, tj. na intervalech $I_1 = (-\infty, -2),\ I_2 = (-2, 2), I_3 = (2, \infty)$.

Ib. Speciální případ: **Integrál má tvar** $\displaystyle\int \frac{konst}{(ax+b)^n}\,\mathrm{d}x$.

Použijeme substituci $ax + b = t,\ a\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.

$\boxed{\textbf{Př. 2.}}$ $\displaystyle\int \frac{5}{(x+5)^4}\,\mathrm{d}x = -\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{(x+5)^3} + C.$

Platí pro $x \neq -5$, tj. na intervalech $I_1 = (-\infty, -5),\ I_2 = (-5, \infty)$.

II. Stupeň polynomu Q je dva, tj. kvadratický polynom ve jmenovateli. Předpokládejme, že koeficient u nejvyšší mocniny je roven 1. V závislosti na diskriminantu D kvadratické rovnice $Q(x) = 0$ nastane právě jeden ze tří případů:

II.a. $D > 0$, tj. rovnice $Q(x) = 0$ má dva různé reálné kořeny α, β.

Lze tedy rozložit polynom $Q(x)$ na kořenové činitele: $Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$. Tím je pak umožněn rozklad integrované funkce na součet tzv. parciálních zlomků ve tvaru

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$$

Určíme konstanty $A,\ B$ a parciální zlomky integrujeme:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = A\ln|x-\alpha| + B\ln|x-\beta| + C,\ x \neq \alpha,\ x \neq \beta.$$

Celý postup ještě ukážeme na příkladu.

$\boxed{\textbf{Př. 3.}}$ $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Rovnice $Q(x) = x^2 + x = x(x+1) = 0$ má dva různé reálné kořeny $\alpha = 0, \beta = -1$. Definiční obor $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$. V každém z těchto intervalů je tedy integrovaná funkce spojitá, takže k ní existuje funkce primitivní a neurčitý integrál. Primitivní funkci určíme pomocí rozkladu na součet parciálních zlomků. Ten má tvar se dvěma neznámými A, B:

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}.$$

Po vynásobení společným jmenovatelem $x(x+1)$ získáme rovnici, která vyjadřuje rovnost dvou polynomů: $\quad 1 = A(x+1) + Bx.$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin nebo dosazením vhodných hodnot, např. $x := -1$, resp. $x := 0$ určíme, že $A = 1, B = -1$.

Je tedy $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \ln|x| - \ln|x+1| + C$.

Po úpravě výrazů s logaritmy lze vypočítanou primitivní funkci napsat ve tvaru $F(x) = \ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|$.

II.b. $D = 0$, tj. rovnice $Q(x) = 0$ má jeden (dvojnásobný) reálný kořen α.

Lze tedy rozložit polynom $Q(x)$ takto: $Q(x) = (x-\alpha)^2$. Tím je pak umožněn rozklad integrované funkce na součet parciálních zlomků ve tvaru, v němž **druhý zlomek má ve jmenovateli druhou mocninu:**

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2}.$$

Určíme konstanty A, B a parciální zlomky integrujeme:

$\boxed{\textbf{Př. 4.}}$ $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Rovnice $Q(x) = x^2 - 2x + 1 = 0$ má dvojnásobný reálný kořen $\alpha = 1:\ Q(x) = (x-1)^2$. Definiční obor $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Primitivní funkce a neurčitý integrál tedy existují na intervalech $I_1 = (-\infty, 1)$, $I_2 = (1, +\infty)$, neboť v nich je integrovaná funkce spojitá. Primitivní funkci určíme pomocí rozkladu na součet parciálních zlomků se dvěma neznámými A, B. Pozor na druhou mocninu ve jmenovateli druhého zlomku !

$$\frac{x+3}{x^2-2x+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}.$$

Po vynásobení společným jmenovatelem $(x-1)^2$ získáme rovnici, která vyjadřuje rovnost dvou polynomů: $\quad x + 3 = A(x-1) + B$.

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin nebo dosazením vhodných hodnot, např. $x := 1$, resp. $x := 0$ určíme, že $A = 1, B = 4$. Pak integrujeme parciální zlomky. Druhý z nich je speciální případ Ib, který vypočítáme po substituci $x - 1 = t$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$:

Je tedy $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2}\right)\mathrm{d}x = \ln|x+1| - \frac{4}{x-1} + C$.

II.c. $D < 0$, tj. rovnice $Q(x) = 0$ má dva komplexně sdružené kořeny $a \pm b\mathrm{i}$.

Polynom $Q(x)$ je v tomto případě nerozložitelný v množině reálných čísel a integrovanou funkci nelze vyjádřit jako součet parciálních zlomků.

Má-li integrovaná funkce tvar $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{konst}{ax^2+bx+c}$, pak po vhodné úpravě a následné substituci získáme tabulkový integrál $\displaystyle\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \operatorname{arctg} t + C$.

$\boxed{\textbf{Př. 5.}}$ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+8} = \int \frac{\mathrm{d}x}{8(x^2/8+1)} = \left\{\text{subst.}: x/\sqrt{8} = t,\ \mathrm{d}x = \sqrt{8}\,\mathrm{d}t\right\} = \frac{\sqrt{8}}{8}\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg} t = \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{8}} + C,\ x \in \mathbb{R}.$

$\boxed{\textbf{Př. 6.}}$ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{9x^2+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(3x)^2+1} = \{\text{subst.}: 3x = t,\ 3\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3x + C,\ x \in \mathbb{R}.$

$\boxed{\textbf{Př. 7.}}$ $\displaystyle\int \frac{5}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{5}{(x-2)^2+1}\,\mathrm{d}x = \{\text{subst.}: x - 2 = t,\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t\} = \int \frac{5}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 5\operatorname{arctg} t = 5\operatorname{arctg}(x-2) + C,\ x \in \mathbb{R}$

Je-li polynom $P(x)$ v čitateli lineární, pak ho nejprve upravíme, aby se rovnal derivaci polynomu Q(x). Výraz v čitateli pak doplníme, aby zůstala zachována rovnost. Takto upravenou racionální funkci napíšeme ve tvaru součtu dvou racionálních funkcí a pak integrujeme.

Př. 8. $\displaystyle\int \frac{4x-3}{x^2+6x+13}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Rovnice $Q(x)=x^2+6x+13=0$ má diskriminant $D=-16<0$, nemá tedy reálné kořeny. Daná racionální funkce má tedy primitivní funkci (a neurčitý integrál) v $(-\infty,+\infty)$, nelze ji však rozložit na součet jednoduchých parciálních zlomků. Postupujeme podle výše uvedeného návodu.

$$\int \frac{4x-3}{x^2+6x+13}\,\mathrm{d}x=\int \frac{4x+12-15}{x^2+6x+13}\,\mathrm{d}x=\int \frac{2(2x+6)}{x^2+6x+13}\,\mathrm{d}x+\int \frac{-15}{x^2+6x+13}\,\mathrm{d}x$$

$$I_1=\int \frac{2(2x+6)}{x^2+6x+13}\,\mathrm{d}x=\left\{\text{subst.}: x^2+6x+13=t,\ (2x+6)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\right\}=\int \frac{2}{t}\,\mathrm{d}t=$$

$=2\ \ln\left|x^2+6x+13\right|+C$. Protože $x^2+6x+13>0$ v $\mathbb{R}$, můžeme psát bez absolutní hodnoty.

$$I_2=\int \frac{15}{x^2+6x+13}\,\mathrm{d}x=\int \frac{15}{(x+3)^2+4}\,\mathrm{d}x=\frac{15}{4}\int \frac{1}{(\frac{x+3}{2})^2+1}\,\mathrm{d}x=$$

$$\left\{\text{subst.}: \frac{x+3}{2}=t,\ \mathrm{d}x=2\,\mathrm{d}t\right\}=\frac{15}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t=\frac{15}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C.$$

Výsledek: $\displaystyle\int \frac{4x-3}{x^2+6x+13}\,\mathrm{d}x=2\ \ln(x^2+6x+13)-\frac{15}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C,\ x\in\mathbb{R}.$

Upozornění: Následující úlohy předpokládají znalost integrace racinální funkce s polynomem stupně 3 ve jmenovateli, která je v požadavcích ke zkoušce Alfa. Stručný přehled je v textu [3]. V níže uvedené Sbírce [2] jsou v odstavci III.4 řešené příklady pro všechny možnosti této typové úlohy integrace.

Př. 9.Alfa $\displaystyle\int \frac{16x+20}{(x-4)(x+3)(x-1)}\,\mathrm{d}x=4\ln|x-4|-\ln|x+3|-3\ln|x-1|+C.$

V tomto příkladu se jedná o tři reálné různé kořeny a tedy následující rozklad na součet parciálních zlomků.

$$\frac{16x+20}{(x-4)(x+3)(x-1)}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-1}=\frac{4}{x-4}+\frac{-1}{x+3}+\frac{-3}{x-1}.$$

Př. 10.Alfa $\displaystyle\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\,\mathrm{d}x=2\ln|x-2|-2\ln|x|+\frac{3}{x-2}+C.$

V tomto příkladu má rovnice $Q(x)=x^3-4x^2+4x=0$ dva reálné kořeny, z nichž jeden je nula a druhý je dvojnásobný: $Q(x)=x\,(x^2-4x+4)=x\,(x-2)^2$.
Rozklad na součet parciálních zlomků vede k následujícímu vyjádření dané funkce **(ve jmenovateli třetího zlomku je druhá mocnina)**:

$$\frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}=\frac{-2}{x}+\frac{2}{x-2}+\frac{-3}{(x-2)^2}.$$

Další příklady, řešené i neřešené, jsou ve Sbírce [2].

Literatura:

[1] J. Neustupa: Matematika I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2013, dotisk 2017.
[2] S.Kračmar, F. Mráz, J.Neustupa: Sbírka příkladů z Matematiky I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2013, dotisk 2017.
[3] F. Mráz: Integrace racionálních funkcí (konzultace 12, stručné prezentace z přednášek). Webová stránka předmětu Matematika I, odkaz Kombinované studium.