Základní pojmy, použité symboly, značení (jejichž znalost je předpokládána)

1. Výrok ...sdělení pravdivé, nepravdivé

Operace s výroky:
negace
konjunkce
alternativa (disjunkce)
implikace
ekvivalence

2. Množina, její prvky

zápis: $\boldsymbol{x \in A, \lambda \in R}$, čteme: x je prvek množiny A, prvek x patří do množiny A.

Symbol $\emptyset$ je vyhrazen pro tzv. prázdnou množinu, která neobsahuje žádný prvek.

Důležité množiny

mn. přirozených čísel $\boldsymbol{N = \{1, 2, 3, \dots\}}$

mn. celých čísel $\boldsymbol{Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}}$

mn. racionálních čísel $\boldsymbol{Q}$, tj. čísel ve tvaru zlomku

mn. reálných čísel $\boldsymbol{R}$
Poznámka. Mohutnost množiny $\boldsymbol{R - Q}$, tj. množiny iracionálních čísel
(nejdou vyjádřit ve tvaru zlomku, např. $\boldsymbol{\sqrt{2}, \mathrm{e}, \pi}$)

mn. komplexních čísel $\boldsymbol{C}$
tvar $\boldsymbol{a + b\mathrm{i}}$, kde $\boldsymbol{a, b \in R,\ \mathrm{i}^2 = -1}$

Operace s množinami:
doplněk množiny (v dané základní množině), průnik množin, sjednocení množin, rozdíl množin.

Příklad: Nechť A je množina řešení rovnice $x^2 - 25 = 0$, zapisujeme $A = \{x \in R; x^2 - 25 = 0\}$,
Nechť B je množina řešení rovnice $x^2 - 5x = 0$, zapisujeme $B = \{x \in R; x^2 - 5x = 0\}$.
Určete množiny A, B, jejich průnik $A \cap B$, jejich sjednocení $A \cup B$, rozdíl $A - B$ a rozdíl $B - A$.

$A = \{5,\ -5\}$, tj. množina obsahující dva prvky, $\quad B = \{0,\ 5\}$.

$A \cap B = \{5\}$, tj. množina obsahující jeden prvek, $A \cup B = \{5,\ -5,\ 0\}$, $A - B = \{-5\}$,
$B - A = \{0\}$, tj. jednoprvková množina, obsahuje pouze číslo nula.

3. Kvantifikátory

kvantifikátor obecný (univerzální), symbol $\forall$

Příklad: $\boldsymbol{\forall n \in N : n}$ je dělitelno pěti

čteme:

"Každé přirozené číslo n je dělitelné pěti"nebo "Pro každé přirozené číslo n platí, že je dělitelné pěti".
Jedná se o nepravdivý výrok

kvantifikátor existenční, symbol $\exists$

Příklad: $\boldsymbol{\exists n \in N : n}$ je dělitelno pěti

čteme: "Existuje přirozené číslo n, které je dělitelné pěti", což je výrok pravdivý

Další důležité množiny

$\boldsymbol{R^2}$ ... mn. všech uspořádaných dvojic reálných čísel, její prvky X jsou tvaru $X = [x_1,\, x_2]$.

$\boldsymbol{R^n}$, kde $n \in N$ ... mn. všech uspořádaných n-tic reálných čísel, její prvky X jsou tvaru $X = [x_1,\, x_2, ... x_n]$.

Zavedeme-li v $\boldsymbol{R^n}$ vzdálenost dvou bodů $\boldsymbol{X, Y}$ vztahem

$$\boldsymbol{d(X,Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}},$$

pak se z $\boldsymbol{R^n}$ stane tzv. n–rozměrný Euklidův prostor, značíme $\boldsymbol{E_n}$.

Lineární algebra

Vektorové prostory

Příklady:

1. $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$; $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$; $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ ...aritmetický $\boldsymbol{n}$-rozměrný prostor
součet vektorů $\boldsymbol{u} = (u_1, ...u_n)$ a $\boldsymbol{v} = (v_1, ...v_n)$ je vektor $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1, ...u_n + v_n)$,
násobek vektoru $\boldsymbol{u}$ číslem λ je vektor $\lambda \cdot \boldsymbol{u} = (\lambda u_1, ...\lambda u_n)$.

2. $\boldsymbol{V}(\mathbb{E}_{\mathbf{2}})$ ...množina vektorů v $\mathbb{E}_{\mathbf{2}}$, vektor je množina všech navzájem ekvivalentních orientovaných úseček v $\mathbb{E}_{\mathbf{2}}$.
$\boldsymbol{V}(\mathbb{E}_{\mathbf{3}})$ ...množina vektorů v $\mathbb{E}_{\mathbf{3}}$, vektor je množina všech navzájem ekvivalentních orientovaných úseček v $\mathbb{E}_{\mathbf{3}}$.

Definice: Množinu $\boldsymbol{V}$, pro jejíž libovolné dva prvky (vektory) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ a libovolné reálné číslo λ je definován součet vektorů $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ a násobek vektoru číslem λ nazýváme vektorovým prostorem, pokud tyto dvě operace mají následující vlastnosti:

(a) Pro libovolné vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ a libovolné reálné číslo λ patří součet $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ i součin $\lambda \cdot \boldsymbol{u}$ do V.

(b) Pro libovolné vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ a libovolná reálná čísla α, β platí:

(b1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$,

(b2) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$,

(b3) $1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$,

(b4) $\alpha \cdot (\beta \cdot \boldsymbol{u}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \boldsymbol{u}$,

(b5) $\alpha \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha \cdot \boldsymbol{u} + \alpha \cdot \boldsymbol{v}$.

(b6) $(\alpha + \beta) \cdot \boldsymbol{u} = \alpha \cdot \boldsymbol{u} + \beta \cdot \boldsymbol{u}$.

(c) Ve V existuje tzv. nulový vektor $\boldsymbol{o}$. Pro libovolný vektor $\boldsymbol{u}$ pak platí: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{u}$.

(d) Ke každému vektoru $\boldsymbol{u} \in V$ existuje vektor $(-\boldsymbol{u}) \in V$ (tzv. opačný vektor k vektoru $\boldsymbol{u}$) tak, že platí: $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}$.

Poznámka. Vlastnosti (a) se říká *uzavřenost množiny* V vzhledem k oběma operacím.

Věta 1.4. Ve vektorovém prostoru V existuje jediný nulový vektor.

Věta 1.7. Pro libovolný vektor $\boldsymbol{u} \in V$ a pro libovolné číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

1) $0 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$, 2) $\alpha \cdot \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$, 3) $(-1) \cdot \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$.

Další příklady:

vždy se standardně definovanými operacemi

3. $\boldsymbol{C}_{\langle a,b\rangle}$ ... mn. spojitých funkcí v $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$

4. $\boldsymbol{P_2}$ ... mn. všech polynomů stupně právě dva, tj. funkce tvaru $\boldsymbol{P(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0}$ **není vektorový prostor**

5. $\boldsymbol{P_2'}$ ... mn. všech polynomů stupně nejvýše dva, **je vektorový prostor**

6. Množina všech matic téhož typu $m \times n$.