III. Křivkové integrály

1. Jednoduchá křivka v $\mathbb{E}_2$, v $\mathbb{E}_3$
Parametrizace, orientace

2. Křivkový integrál skalární funkce $\int_C \boldsymbol{f}\,\mathbf{d}\boldsymbol{s}$
(délka, hmotnost, těžiště, momenty ...)

3. Křivkový integrál vektorové funkce
$\int_C \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s}$ (práce vykonaná silou $\overrightarrow{f}$ po křivce C)

4. Greenova věta
výpočet cirkulace $\oint_C \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s}$ pomocí dvojného integrálu $\int\int_{IntC}$

5. Potenciální vektorové pole
(nevířivé, konzervativní)

III.1 Jednoduché křivky

Definice. Jednoduchá hladká křivka v $\mathbb{E}_3$, resp. v $\mathbb{E}_2$ je množina bodů $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})$, kde P je zobrazení intervalu $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ do $\mathbb{E}_3$, resp. do $\mathbb{E}_2$ popsané vztahy

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}), \quad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}), \ \boldsymbol{t} \in \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle, \quad \text{přičemž platí}$$

1. Zobrazení P je spojité a prosté v $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ s možností $P(a) = P(b)$ (tzv. uzavřená křivka).
2. Derivace $\dot{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{t}) = (\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}), \dot{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t}), \dot{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{t}))$ je spojitá, omezená a nenulová v $(a,\, b)$.

Zobrazení P se nazývá parametrizace křivky.

Křivky značíme např. $C,\ C_1,\ c,\ k,\ K, \ldots$

Jednoduchá po částech hladká křivka

Př. 1 Křivka $C : x = 2\,y^2 + 1$ mezi body $A = [?, 1]$, $B = [?, 2]$.

III.2 Křivkový integrál skalární funkce

$\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s$, resp. $\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$, stručně $\int_C f\,\mathrm{d}s$

Fyzikální aplikace: hmotnost nehomogenní struny (drátu) tvaru JHK

Definice.
Nechť C je JHK v $\mathbb{E}_2$, resp. v $\mathbb{E}_3$ s parametrizací P v $\langle a, b\rangle$.
Funkce f se nazývá integrovatelná na křivce C, jestliže existuje Riemannův integrál

$$\int_a^b f(P(t))\|\dot{P}(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Značíme $\int_C f\,\mathrm{d}s$ a nazýváme křivkovým integrálem skalární funkce f na křivce C (též křivkový integrál 1. druhu)

Poznámka: Existence a hodnota nezávisí na volbě parametrizace P.

Nutná podm. pro existenci:
Fce f je omezená na křivce C

Postačující podm. pro existenci:
Fce f je spojitá na křivce C

Slabší požadavek:
Fce f je spojitá a omezená na $(C - M)$, kde M je konečná mn.

Poznámka. $\boldsymbol{C} = \cup \boldsymbol{C_i}$ je jedn. po částech hladká křivka

Př. 2. Křivka C je úsečka AB, kde $A = [1,1]$, $B = [2,3]$. Navrhněte parametrizaci křivky C a vypočítejte její hmotnost, je-li délková hustota $\varrho(x,y) = x + y$.

Př. 3. Načrtněte křivku $C : y = \sqrt{x^5}$ mezi body $A = [0, ?]$, $B = [2, ?]$. Navrhněte parametrizaci. Vypočítejte hmotnost struny tvaru této křivky, je-li délková hustota $\varrho(x,y) = x^2$. $[8\,(51\sqrt{51} - 1)/215]$

Co jiného by mohl výsledek ještě vyjadřovat ?

III.3 Křivkový integrál vektorové funkce (integrál 2. druhu)

značíme $\int_C \overrightarrow{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{X}) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{s}}$, stručně $\int_C \overrightarrow{\boldsymbol{f}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{s}}$

Orientovaná JHK. Tečný vektor

Vektorová funkce (vektorové pole) $\overrightarrow{f}$ v $\mathbb{E}_2$

je funkce dvou proměnných x, y se souřadnicovými funkcemi U, V:
$\overrightarrow{f}(x, y) = (U(x, y), V(x, y))$
stručný zápis: $\overrightarrow{\boldsymbol{f}} = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})$

Vektorová funkce $\overrightarrow{f}$ v $\mathbb{E}_3$ je funkce tří proměnných x, y z
stručný zápis: $\overrightarrow{\boldsymbol{f}} = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}\ \boldsymbol{W})$ nebo $\overrightarrow{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{U}\,\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + \boldsymbol{W}\,\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$

Definice.

Křivkový integrál vekt. funkce je definován hodnotou křivk. integrálu skalární funkce:

$$\int_C \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_C (\vec{f} \cdot \vec{\tau})\, \mathrm{d}s,$$

podrobněji

$$\int_C \vec{f}(X) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_C \vec{f}(X) \cdot \vec{\tau}(X) \mathrm{d}s,$$

kde $\vec{\tau}(X)$ je tečný vektor ke křivce C v bodě $X = [x, y, z]$

resp. $X = [x, y]$.

Aplikace: práce vykonaná (spotřebovaná) silou $\vec{f}$ při pohybu po křivce $\boldsymbol{C}$ ve směru zadané orientace.

Výpočet: $\displaystyle\int_{\boldsymbol{C}} \overrightarrow{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{X}) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{s}} = \pm \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \overrightarrow{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})) \cdot \dot{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{t})\, \mathrm{d}\boldsymbol{t}$,

kde $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} \in \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ je parametrické vyjádření křivky C.

Znaménko mínus napravo platí, je-li křivka C orientována nesouhlasně s parametrizací P.

Křivkový integrál vektorové funkce po uzavřené křivce C nazýváme cirkulací vektorového pole $\overrightarrow{f}$ po křivce C a zapisujeme $\oint_C \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s}$.

Další možnosti výpočtu

2. Využití jiného zápisu integrálu (tvar v diferenciálech)

$$\int_C \vec{f}(X) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_C U \, \mathrm{d}x + V \, \mathrm{d}y + W \, \mathrm{d}z$$

3. Pomocí Greenovy věty:

křivkový integrál $\oint_C$ převedeme na dvojný integrál $\int \int_{IntC}$

to však lze pouze pro uzavřenou křivku v $\mathbb{E}_2$

4. Pomocí potenciálu v $\mathbb{E}_2$, v $\mathbb{E}_3$

to však pouze pro POTENCIÁLNÍ vektorové pole

Příklady Určete práci, kterou vykoná síla $\overrightarrow{\boldsymbol{f}} = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})$ po orientované křivce C

1. $\overrightarrow{\boldsymbol{f}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}\boldsymbol{y})$, křivka C je část grafu $x = y^2$ s počát. bodem $L = [4, 2]$ a koncovým bodem $M = [1, 1]$. [Výsl. $A = -6$]

2. $\overrightarrow{\boldsymbol{f}} = (\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}, \boldsymbol{y}^{\mathbf{2}})$, křivka C je úsečka AB, od $A = [0, 1]$ do $B = [-2, 2]$. [Výsl. $A = -1/3$]

3. $\overrightarrow{\boldsymbol{f}} = (\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}, \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{y})$, křivka C je část grafu $y = 1/x$ od bodu $[1, ?]$ do bodu $M = [2, ?]$. [Výsl. $A = 7/3 - \ln 2$]

4. $\overrightarrow{\boldsymbol{f}} = (\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}, -\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})$,

   a) C: $x^2 + y^2 = 9,\ y \geq 0$ s počát. bodem $[-3, 0]$.

   b) C je záporně orientovaná kružnice: $x^2 + y^2 = 9$.

   c) C je kladně orientovaná kružnice: $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

Věta Greenova.

Nechť 1. Souřadnicové funkce U, V vektorového pole $\overrightarrow{f}$ mají spojité parc. derivace v oblasti $O \subset \mathbb{E}_2$.

2. C je kladně orientovaná uzavřená křivka, která leží i se svým vnitřkem Int C v oblasti O.

Pak platí

$$\oint_C \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s} = \int\int_{IntC} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

!!! Poznámka: Je-li křivka orientována záporně , pak napravo přidáme znaménko mínus.

Poznámka. ”Křivka”zde znamená: Jednoduchá po částech hladká

Předpoklady stručně:

Kladně (záporně) orientovaná uzavřená křivka C leží se svým vnitřkem Int C v oblasti $\boldsymbol{O} \subset \mathbb{E}_{\mathbf{2}}$, ve které jsou spojité PD vektorového pole $\overrightarrow{\boldsymbol{f}} = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})$.

Poznámka: Předpoklady vyžadují, aby se vše ”odehrávalo”v oblasti, v níž má dané vekt. pole spojité PD.

Otázka: Kdy nelze Greenovu větu použít ?