

Úvod

Tato sbírka úloh z lineární algebry je určena studentům Fakulty elektrotechniky a informatiky VŠB - Technické univerzity Ostrava. Těmto studentům je především určeno skriptum profesora Zdeňka Dostála "LINEÁRNÍ ALGEBRA", k němuž jako studijní příloha má tato sbírka sloužit. Využít ji mohou také studenti kombinovaného studia jako doplněk studijní opory "LINEÁRNÍ ALGEBRA pro kombinované a distanční studium". Každá kapitola, respektive podkapitola (sekce) obsahuje stručné teoretické informace (definice, věty, vzorce). Potom následují podrobně řešené příklady a úlohy k samostatnému řešení. Na konci každé sekce jsou uvedeny výsledky úloh.

Sbírka úloh nemůže v žádném případě nahradit výše zmíněné skriptum, kde je učivo v plném rozsahu vyloženo a navíc velice pěkně a vhodně motivováno. Student by se měl tedy nejprve jeho prostřednictvím seznámit s teorií a teprve potom se pokusit o samostatné řešení ukázkových příkladů. Porovnání vlastního řešení s ukázkovým řešením mu tak pomůže odhalit případné nedostatky v teoretických znalostech, které je nutno doplnit. Neřešené úlohy by už pak neměly představovat vážný problém.

Nezbývá než doufat, že tato sbírka pomůže studentům při studiu lineární algebry, jež patří k základům matematického vzdělání dnešního inženýra. Na závěr bych chtěl ještě poděkovat ing. Martině Litschmannové za cenné připomínky, které přispěly k lepší srozumitelnosti předloženého textu.

Obsah

1	Matice a řešení soustav lineárních rovnic	3
1.1	Aritmetické vektory	3
1.2	Algebra matic	4
1.3	Řešení soustav lineárních rovnic	8
1.4	Inverzní matice	13
1.5	Trojúhelníkový rozklad	19
2	Vektorové prostory	26
2.1	Vektorové prostory a podprostory	26
2.2	Lineární kombinace, závislost a nezávislost vektorů. Báze vektorového prostoru, souřadnice vektoru, dimenze.	29
3	Lineární a multilineární zobrazení	33
3.1	Lineární zobrazení	33
3.2	Lineární zobrazení a matice	37
3.3	Bilineární formy	41
3.4	Kvadratické formy	46
4	Skalární součin a ortogonalita	51
4.1	Skalární součin vektorů	51
4.2	Ortogonalita	53
5	Determinanty	57
6	Úvod do spektrální teorie	61
6.1	Vlastní čísla a vektory	61
6.2	Spektrální rozklad symetrické matice.	66

Kapitola 1

Matice a řešení soustav lineárních rovnic

1.1 Aritmetické vektory

Aritmetickým vektorem rozumíme uspořádanou n -tici čísel. Píšeme $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]$, čísla u_1, u_2, \dots, u_n nazýváme *složky* vektoru a jejich počet jeho *rozměrem* nebo *dimenzí*. Pro aritmetické vektory $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]$, $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ stejné dimenze a skalár (číslo) α definujeme

- *rovnost*: $\mathbf{u} = \mathbf{v} \Leftrightarrow u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots, u_n = v_n$;
- *sčítání*: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n]$;
- *násobení skalárem*: $\alpha \mathbf{u} = [\alpha u_1, \alpha u_2, \dots, \alpha u_n]$.

Vektor $\mathbf{o} = [0, 0, \dots, 0]$ se nazývá *nulový vektor* a vektor $-\mathbf{u} = [-u_1, -u_2, \dots, -u_n] = -1\mathbf{u}$ *opačný vektor* k vektoru \mathbf{u} . Snadno shledáme, že pro libovolné vektory stejné dimenze \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} a skaláry α, β platí:

- V1 $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$;
- V2 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$;
- V3 $\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u}$;
- V4 $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}$;
- V5 $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$;
- V6 $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$;
- V7 $\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$;
- V8 $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Dokázat vlastnosti V1 - V8 je velmi snadné, a tak si důkazy většiny z nich necháme na cvičení.

Příklad 1. Dokažte platnost komutativního zákona (vlastnost V2).

Důkaz: Necht $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]$, $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]$, máme

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n]$$

a

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = [v_1 + u_1, v_2 + u_2, \dots, v_n + u_n].$$

Tyto vektory se rovnají. Jsou stejné dimenze a jejich odpovídající složky se rovnají, neboť pro sčítání čísel komutativní zákon platí.

Příklad 2. Dokažte vlastnost V6 (distributivní zákon).

Důkaz: Položíme-li $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]$, potom

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \mathbf{u} &= (\alpha + \beta) [u_1, u_2, \dots, u_n] \\ &= [(\alpha + \beta) u_1, (\alpha + \beta) u_2, \dots, (\alpha + \beta) u_n] \\ &= [\alpha u_1 + \beta u_1, \alpha u_2 + \beta u_2, \dots, \alpha u_n + \beta u_n] \\ &= [\alpha u_1, \alpha u_2, \dots, \alpha u_n] + [\beta u_1, \beta u_2, \dots, \beta u_n] \\ &= \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Platnost vlastnosti V6 tak opět vyplývá z analogické vlastnosti $(\alpha + \beta) u_i = \alpha u_i + \beta u_i$ pro čísla.

Cvičení:

- Jsou dány vektory $\mathbf{u} = [1, -2, -3]$, $\mathbf{v} = [-2, 2, -1]$, $\mathbf{w} = [-1, -2, -11]$, $\mathbf{x} = [0, 0, 0, 0]$.
Vypočítejte: a) $2\mathbf{u} + \mathbf{v}$; b) $3\mathbf{u} + 2\mathbf{v} - \mathbf{w}$; c) $\mathbf{u} + \mathbf{x}$.
- Dokažte platnost ostatních vlastností V1 - V8.

Výsledky:

- a) $[0, -2, -7]$; b) $[0, 0, 0]$; c) není definováno.
- Návod: postupujte obdobně jako v ukázkových příkladech.

1.2 Algebra matic

Maticí \mathbf{A} o rozměru $m \times n$ (čti: "em na en") nazýváme schéma mn reálných, resp. komplexních čísel a_{ik} ($i = 1, \dots, m$; $k = 1, \dots, n$), sestavených v m řádcích a n sloupcích:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Matici o rozměru $m \times n$ nebo také typu (m, n) zapisujeme $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{m \times n}$, $\mathbf{A}_{m \times n}$, $[a_{ik}]$ nebo stručně \mathbf{A} . Je-li $m = n$, mluvíme o *čtvercové matici stupně (řádu) n* . Prvky $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$ tvoří *hlavní diagonálu* matice. Symboly $\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}$, $\mathbf{s}_k^{\mathbf{A}}$ označujeme *i -tý řádek* a *k -tý sloupec* matice \mathbf{A} , tzn.

$$\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}], \quad \mathbf{s}_k^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}.$$

Jsou to vlastně naše známé aritmetické vektory, neboli matice typu $(1, n)$ a $(m, 1)$.

- Řekneme, že dvě matice se *rovnají*, jsou-li stejného typu a mají-li na stejných místech stejné prvky, tzn. $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, právě když $a_{ik} = b_{ik}$ pro každé $i = 1, \dots, m$; $k = 1, \dots, n$.
- Maticí *transponovanou k matici \mathbf{A}* $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{m \times n}$ nazýváme matici $\mathbf{A}^T = [a_{ki}^T]_{n \times m}$, pro niž platí $a_{ki}^T = a_{ik}$ ($i = 1, \dots, m$; $k = 1, \dots, n$). Transponování matice převádí řádky ve sloupce a naopak.
- Matice $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{n \times n}$ se nazývá *symetrická*, platí-li $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, tj. $a_{ik} = a_{ki}$ ($i, k = 1, \dots, n$).
- Součinem čísla (skaláru) α a matice $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{m \times n}$* nazýváme matici $\mathbf{B} = [\alpha a_{ik}]_{m \times n}$.
- Součtem matic $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{m \times n}$, $\mathbf{B} = [b_{ik}]_{m \times n}$* rozumíme matici $\mathbf{C} = [a_{ik} + b_{ik}]_{m \times n}$.

- *Součinem matic* $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{m \times n}$ a $\mathbf{B} = [b_{kj}]_{n \times p}$ se nazývá matice $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m \times p}$ taková, že $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{s}_j^{\mathbf{B}}$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, p$). (Slovy: *řádky* matice \mathbf{A} násobíme *sloupci* matice \mathbf{B} .)
- Matice, jejíž všechny prvky jsou nuly, se nazývá *nulová matice*. Označujeme ji obvykle \mathbf{O} .
- Čtvercová matice \mathbf{I} , jež má na hlavní diagonále všechny prvky rovny 1 a všechny ostatní prvky rovny 0, se nazývá *jednotková matice*.

Vlastnosti maticových operací

Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ jsou libovolné matice a α, β libovolné reálné, resp. komplexní skaláry. Pokud mají níže uvedené operace smysl (tj. mají-li uvedené matice předepsaný typ), potom platí:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \mathbf{B} + \mathbf{A}; \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} &= \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}); \\ \mathbf{A} + \mathbf{O} &= \mathbf{A}; \\ \alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}; \\ (\alpha + \beta)\mathbf{A} &= \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}; \\ (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C} &= \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}); \\ \mathbf{A}\mathbf{I} &= \mathbf{A}, \mathbf{I}\mathbf{B} = \mathbf{B} \\ \alpha(\mathbf{A}\mathbf{B}) &= (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}); \\ (\alpha\beta)\mathbf{A} &= \alpha(\beta\mathbf{A}); \\ \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C}; \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} &= \mathbf{A}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{C}; \\ (\mathbf{A}^T)^T &= \mathbf{A}; \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T &= \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T; \\ (\mathbf{A}\mathbf{B})^T &= \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T. \end{aligned}$$

Poznámka 1. Komutativní zákon pro násobení matic zde nenajdeme, obecně totiž $\mathbf{A}\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\mathbf{A}$. S výjimkou asociativního zákona pro násobení matic a transponování součinu matic není obtížné ověřit platnost těchto vlastností.

Příklad 1. Vypočtete matici $\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{B} + \lambda\mathbf{C}$, jestliže

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0, & -1, & 1 \\ 1, & 2, & 1 \\ 1, & 0, & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \lambda = -2, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Řešení: Nejdříve vypočteme součin $\mathbf{A}\mathbf{B}$.

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0, & -1, & 1 \\ 1, & 2, & 1 \\ 1, & 0, & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Odtud pak } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Příklad 2. Vyjádřete matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$, $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & -2 \\ -1, & 1 \\ 2, & 0 \end{bmatrix}.$$

Řešení: Určíme transponovanou matici \mathbf{A}^T .

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T &= \begin{bmatrix} 1, & -1, & 2 \\ -2, & 1, & 0 \end{bmatrix}, \text{ potom } \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1, & -2 \\ -1, & 1 \\ 2, & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1, & -1, & 2 \\ -2, & 1, & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2), & 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1, & 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 \\ (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-2), & -1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1, & -1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-2), & 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1, & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5, & -3, & 2 \\ -3, & 2, & -2 \\ 2, & -2, & 4 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

zatímco

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & -1, & 2 \\ -2, & 1, & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1, & -2 \\ -1, & 1 \\ 2, & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6, & -3 \\ -3, & 5 \end{bmatrix}.$$

Stojí za povšimnutí, že v obou případech jsme obdrželi symetrické matice: $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ a $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$. Také se potvrdilo, že násobení matic není obecně komutativní: $\mathbf{A}\mathbf{A}^T \neq \mathbf{A}^T\mathbf{A}$.

Příklad 3. Ukažte, že pro transponování součinu matic platí $(\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

Důkaz: Nechť $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{m \times n}$, $\mathbf{B} = [b_{kj}]_{n \times p}$, položíme $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}$, $\mathbf{D} = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$. Máme dokázat, že $\mathbf{C}^T = \mathbf{D}$. Matice \mathbf{C}^T a \mathbf{D} jsou zřejmě stejného typu (p, m) , zbývá ještě dokázat, že mají ve stejných pozicích stejné prvky. Pro libovolný prvek matice \mathbf{C} v pozici (i, j) platí

$$c_{ij} = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{s}_j^{\mathbf{B}} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}. \quad (\star)$$

$$\left((\star) \quad \mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}, & a_{i2}, & \dots, & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dots, & b_{1j}, & \dots \\ \dots, & b_{2j}, & \dots \\ \vdots \\ \dots, & b_{nj}, & \dots \end{bmatrix} \right)$$

Tento prvek je roven prvku c_{ji}^T matice $(\mathbf{A}\mathbf{B})^T$.

Pro každý prvek d_{ji} matice \mathbf{D} dostaneme

$$d_{ji} = \mathbf{r}_j^{\mathbf{B}^T} \cdot \mathbf{s}_i^{\mathbf{A}^T} = b_{1j}a_{i1} + b_{2j}a_{i2} + \dots + b_{nj}a_{in}. \quad (\diamond)$$

$$\left((\diamond) \quad \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{1j}, & b_{2j}, & \dots, & b_{nj} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dots, & a_{i1}, & \dots \\ \dots, & a_{i2}, & \dots \\ \vdots \\ \dots, & a_{in}, & \dots \end{bmatrix} \right)$$

Platí tedy $c_{ji}^T = d_{ji}$ pro každé $j = 1, \dots, p$; $i = 1, \dots, m$, jinými slovy $\mathbf{C}^T = \mathbf{D}$.

Příklad 4. Dokažte platnost asociativního zákona pro násobení matic.

Důkaz: Máme dokázat, že $(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C})$. Nechť $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{m \times n}$, $\mathbf{B} = [b_{kj}]_{n \times p}$, $\mathbf{C} = [c_{jq}]_{p \times s}$, potom i -tý řádek matice $\mathbf{A}\mathbf{B}$ je $[\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{s}_1^{\mathbf{B}}, \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{s}_2^{\mathbf{B}}, \dots, \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{s}_p^{\mathbf{B}}] = [\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{k1}, \dots, \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kp}]$, takže prvek matice $\mathbf{D} = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C}$ na místě (i, q) je

$$d_{iq} = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}\mathbf{B}} \cdot \mathbf{s}_q^{\mathbf{C}} = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{k1} \right) c_{1q} + \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{k2} \right) c_{2q} + \dots + \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kp} \right) c_{pq}. \quad (1.1)$$

Dále q -tý sloupec matice \mathbf{BC} je $[\mathbf{r}_1^{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{s}_q^{\mathbf{C}}, \mathbf{r}_2^{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{s}_q^{\mathbf{C}}, \dots, \mathbf{r}_n^{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{s}_q^{\mathbf{C}}] = [\sum_{j=1}^p b_{1j}c_{jq}, \dots, \sum_{j=1}^p b_{nj}c_{jq}]$, odtud pro prvek matice $\mathbf{E} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ v pozici (i, q) dostáváme

$$e_{iq} = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{s}_q^{\mathbf{BC}} = a_{i1} \left(\sum_{j=1}^p b_{1j}c_{jq} \right) + a_{i2} \left(\sum_{j=1}^p b_{2j}c_{jq} \right) + \dots + a_{in} \left(\sum_{j=1}^p b_{nj}c_{jq} \right). \quad (1.2)$$

Rozepsáním vzorců (1.1) a (1.2) se přesvědčíme, že $d_{iq} = e_{iq}$ ($i = 1, \dots, m; q = 1, \dots, s$):

$$\begin{aligned} d_{iq} &= (a_{i1}b_{11} + \dots + a_{in}b_{n1})c_{1q} + (a_{i1}b_{12} + \dots + a_{in}b_{n2})c_{2q} + \dots + (a_{i1}b_{1p} + \dots + a_{in}b_{np})c_{pq}, \\ e_{iq} &= a_{i1}(b_{11}c_{1q} + \dots + b_{1p}c_{pq}) + a_{i2}(b_{21}c_{1q} + \dots + b_{2p}c_{pq}) + \dots + a_{in}(b_{n1}c_{1q} + \dots + b_{np}c_{pq}). \end{aligned}$$

Matice \mathbf{D} , \mathbf{E} jsou stejného typu, mají na stejných místech stejné prvky, tudíž $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Poznámka 2. Vzorce (1.1), (1.2) můžeme také vyjádřit pomocí dalšího sumačního znaku \sum :

$$\begin{aligned} d_{iq} &= \sum_{j=1}^p \left[\left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \right) c_{jq} \right] = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}c_{jq} \right), \\ e_{iq} &= \sum_{k=1}^n \left[a_{ik} \left(\sum_{j=1}^p b_{kj}c_{jq} \right) \right] = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^p a_{ik}b_{kj}c_{jq} \right) = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}c_{jq} \right). \end{aligned}$$

Cvičení:

1. Vypočítejte součiny $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ a $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ následujících matic:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & 2, & 1 \\ 0, & 1, & 2 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } \mathbf{A} = [1, -2, 3]^T, \mathbf{B} = [0, 1, 2], \mathbf{C} = [0, 1, -2]^T.$$

2. Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & -1 \\ 0, & 2, & 0 \\ 2, & 0, & 0 \end{bmatrix}.$$

Vypočítejte: a) \mathbf{A}^2 ; b) \mathbf{B}^2 ; c) \mathbf{B}^5 .

3. Najděte nenulové čtvercové matice \mathbf{A} , \mathbf{B} takové, že $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$.

4. Ukažte, že pro každé číslo α a libovolné matice, pro něž mají následující operace smysl, platí:

- $\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$;
- $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$.

5. Dokažte, že platí: Je-li \mathbf{A} čtvercová matice, potom $(\mathbf{A}^2)^T = (\mathbf{A}^T)^2$.

6. Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé (P) nebo nepravdivé (N) (o uvedených maticích předpokládáme, že jsou předepsaného typu):

- Je-li $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, potom $\mathbf{AC} = \mathbf{BC}$;
- Je-li $\mathbf{AC} = \mathbf{BC}$, potom $\mathbf{A} = \mathbf{B}$;
- Je-li $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, potom $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ nebo $\mathbf{B} = \mathbf{O}$;
- Je-li $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$, potom $\mathbf{A} = \pm\mathbf{I}$;
- Je-li $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$, potom $\mathbf{A}^n = \mathbf{I}$ pro každé $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$;
- Je-li $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$, potom $\mathbf{A}^n = \mathbf{I}$ pro každé $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.

Výsledky:

$$1. \text{ a) } (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \begin{bmatrix} 4, & 1 \\ 0, & -3 \\ -1, & -1 \end{bmatrix}; \text{ b) } (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = [-3, \ 6, \ -9]^T.$$

$$2. \text{ a) } \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 4, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 9 \end{bmatrix}; \text{ b) } \mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} -2, & 0, & 0 \\ 0, & 4, & 0 \\ 0, & 0, & -2 \end{bmatrix}; \text{ c) } \mathbf{B}^5 = \begin{bmatrix} 0, & 0, & -4 \\ 0, & 32, & 0 \\ 8, & 0, & 0 \end{bmatrix}.$$

$$3. \text{ Například } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & -2 \\ -4, & 8 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4, & 6 \\ 2, & 3 \end{bmatrix}.$$

4. Postupujte podobně jako v řešených příkladech 3 a 4.

5. Nedokazujte, že matice mají stejné prvky, ale využijte některou z vlastností maticových operací.

$$6. \text{ a) P; b) N; c) N; d) N, např. } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{bmatrix}; \text{ e) N; f) P.}$$

1.3 Řešení soustav lineárních rovnic

Soustavou (systémem) m lineárních rovnic o n neznámých x_1, x_2, \dots, x_n nazýváme soustavu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Systém (1.3) je určen maticí soustavy $\mathbf{A} = [a_{ik}]$ a vektorem pravých stran $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_m]^T$ ($a_{11}, \dots, a_{mn}; b_1, \dots, b_m$ jsou daná reálná, resp. komplexní čísla). Můžeme jej také napsat ve tvaru maticové rovnice

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \tag{1.4}$$

kde $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ je vektor neznámých. Přidáme-li k matici soustavy \mathbf{A} jako poslední sloupec vektor \mathbf{b} , obdržíme rozšířenou matici soustavy $[\mathbf{A} | \mathbf{b}]$. Řešením soustavy (1.3) se nazývá každá taková uspořádaná n -tice čísel $[\xi_1, \dots, \xi_n]$, že při dosazení čísel ξ_1, \dots, ξ_n za neznámé x_1, \dots, x_n jsou splněny všechny rovnice soustavy. Soustavu (1.3) řešíme *Gaussovou eliminační metodou*, tj. rozšířenou matici soustavy $[\mathbf{A} | \mathbf{b}]$ převedeme *elementárními řádkovými operacemi*

- R1 vzájemná výměna libovolných dvou řádků;
- R2 vynásobení některého řádku nenulovým číslem;
- R3 přičtení násobku některého řádku k jinému;

na rozšířenou matici $[\mathbf{H} | \mathbf{c}]$ *ekvivalentní soustavy se schodovou maticí* \mathbf{H} , pomocí níž už pak řešení soustavy snadno najdeme. *Schodovou maticí* rozumíme matici, jež vyhovuje těmto podmínkám:

1. Všechny řádky, jež mají pouze nulové prvky, jsou umístěny dole pod nenulovými řádky.
2. První nenulový prvek každého řádku (*vedoucí prvek*) musí být vždy ve sloupci, který je napravo od vedoucího prvku předcházejícího řádku.

Příklad 1. Rozhodněte, které matice jsou ve schodovém tvaru:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1, & 3, & 2 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}, & -2, & 0 \\ \frac{1}{2}, & 3, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}, & -3, & 0, & 5, & 0 \\ 0, & 0, & \mathbf{1}, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \mathbf{1} \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\mathbf{2}, & 1 \\ 0, & -\mathbf{3} \\ 0, & 0 \end{bmatrix}.$$

Řešení: Matice \mathbf{A} , \mathbf{B} nejsou ve schodovém tvaru. V matici \mathbf{A} není nulový řádek uveden úplně dole. Matice \mathbf{B} má sice nulový řádek správně pod nenulovými řádky, ale první nenulový prvek druhého řádku $\frac{1}{2}$ (vedoucí prvek) není ve sloupci napravo od vedoucího prvku předcházejícího řádku (číslo 1). Matice \mathbf{C} a \mathbf{D} jsou ve schodovém tvaru.

Matice \mathbf{C} je dokonce příkladem *normované schodové matice*. Její vedoucí prvky se rovnají 1 a všechny prvky ve sloupcích nad i pod nimi jsou nulové.

Příklad 2. Najděte všechna řešení systému $\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{c}$, kde

$$[\mathbf{H} \mid \mathbf{c}] = \left[\begin{array}{ccc|c} -5, & -1, & 3 & 3 \\ 0, & 3, & 5 & 8 \\ 0, & 0, & -4 & 8 \end{array} \right].$$

Řešení: Systém lineárních rovnic odpovídající této rozšířené matici je

$$\begin{aligned} -5x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 3x_2 + 5x_3 &= 8 \\ -4x_3 &= 8. \end{aligned}$$

Z poslední rovnice vypočteme $x_3 = -2$. Po dosazení do druhé rovnice dostaneme

$$3x_2 + 5(-2) = 8, \quad 3x_2 = 18, \quad x_2 = 6.$$

Nakonec dosadíme za x_2 a x_3 do první rovnice a máme

$$-5x_1 - 6 + 3(-2) = 3, \quad -5x_1 = 15, \quad x_1 = -3.$$

Systém má jediné řešení $x_1 = -3$, $x_2 = 6$, $x_3 = -2$.

Příklad 3. Gaussovou eliminační metodou řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_2 - 3x_3 &= -5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 10. \end{aligned}$$

Řešení: Sestavíme rozšířenou matici soustavy a převedeme ji úpravami R1 až R3 na schodový tvar.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0, & 1, & -3 & -5 \\ 2, & 3, & -1 & 7 \\ 4, & 5, & -2 & 10 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_2 \\ r_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2, & 3, & -1 & 7 \\ 0, & 1, & -3 & -5 \\ 4, & 5, & -2 & 10 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2, & 3, & -1 & 7 \\ 0, & 1, & -3 & -5 \\ 0, & -1, & 0 & -4 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ +r_2 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2, & 3, & -1 & 7 \\ 0, & 1, & -3 & -5 \\ 0, & 0, & -3 & -9 \end{array} \right].$$

Neznámé dostaneme podobně jako v předešlé úloze: $x_3 = 3$, $x_2 = 4$, $x_1 = -1$. Říkáme také, že soustava má *jediné řešení*, kterým je vektor $\mathbf{x} = [-1, 4, 3]^T$.

Příklad 4. Řešte lineární systém

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & -1 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 3 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \end{array}$$

užitím Gauss-Jordanovy metody a vyberte alespoň jedno řešení, pro které $x_1 = -8$.

Řešení: Matici soustavy musíme tentokrát upravit na normovaný schodový tvar.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 3 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ -2r_1 \\ -3r_1 \\ +r_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 9 \end{array} \right] \begin{array}{l} +2r_2 \\ \\ -r_2 \\ +r_2 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Redukce matice na normovanou schodovou matici je ukončena. Všimněme si, že u Gauss-Jordanovy metody vytváříme nuly souběžně nad i pod vedoucími prvky. Přistoupíme k určení řešení systému. Sloupce 3 a 4 neobsahují vedoucí prvky řádků, a tudíž neznámé x_3 a x_4 bereme jako nezávisle proměnné a můžeme za ně zvolit jakékoli číslo. Položíme tedy $x_3 = r$, $x_4 = s$ ($r, s \in \mathbb{R}$ nazýváme parametry) a dopočteme neznámé x_1 a x_2 . Dostaneme takto řešení

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r + 3s - 14 \\ s - 9 \\ r \\ s \end{bmatrix}.$$

Systém má nekonečně mnoho řešení závislých na dvou parametrech r a s . Zbývá ještě najít to řešení, kde $x_1 = -8$. Volíme například $r = -3$ a $s = 1$, potom $x_1 = -8$, $x_2 = -8$, $x_3 = -3$, $x_4 = 1$.

V dalším příkladu si připomeneme soustavu rovnic, která nemá řešení.

Příklad 5. Najděte všechna řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, jestliže

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Řešení: Matici soustavy je stejná jako v předešlé úloze, a tak už snad není nutné uvádět příslušné řádkové operace.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 3 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 9 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Soustava nemá řešení. Předposlednímu řádku v upravené matici odpovídá totiž rovnice

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1,$$

jejíž levá strana se pro všechna dosazení za neznámé rovná 0, zatímco pravá strana je 1.

Pomocí jediné rozšířené matice lze řešit i více lineárních soustav, pokud mají stejnou matici. V takovém případě označíme společnou matici obou soustav \mathbf{A} , vektory pravých stran postupně $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ a obě soustavy řešíme pomocí rozšířené matice $[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]$.

Příklad 6. Určete řešení lineárních systémů

$$\begin{array}{rclcl} 2x_1 - 4x_2 & & & = & -10 & & 2y_1 - 4y_2 & & & = & -8 \\ x_1 - 3x_2 & & & + & x_4 = & -4 & y_1 - 3y_2 & & + & y_4 = & -2 \\ x_1 & & - & x_3 + & 2x_4 = & 4 & y_1 & & - & y_3 + & 2y_4 = & 9 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 & & & = & -11 & & 3y_1 - 4y_2 + 3y_3 - y_4 & & & = & -15. \end{array} \quad \text{a}$$

Řešení: Systémy budeme tedy řešit užitím jediné rozšířené matice.

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 2 & -4 & 0 & 0 & -10 & -8 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 4 & 9 \\ 3 & -4 & 3 & -1 & -11 & -15 \end{array} \right] \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -2 & 0 & 0 & -5 & -4 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 4 & 9 \\ 3 & -4 & 3 & -1 & -11 & -15 \end{array} \right] \begin{array}{l} -r_1 \\ -r_1 \\ -3r_1 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -2 & 0 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 9 & 13 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 4 & -3 \end{array} \right] \begin{array}{l} -2r_2 \\ +2r_2 \\ +2r_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & -2 & -7 & -8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 11 & 17 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 6 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ +3r_3 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & -2 & -7 & -8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 11 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 39 & 52 \end{array} \right] \begin{array}{l} \cdot (-1) \\ \cdot (-1) \\ \cdot \left(\frac{1}{13}\right) \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & -2 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -11 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right] \begin{array}{l} +2r_4 \\ +r_4 \\ +4r_4 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right].$$

Z upravené matice vidíme, že řešení jsou $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$ a $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = -1$, $y_4 = 4$.

Poznámka. Systémy jsme vyřešili Gauss-Jordanovou metodou. Úprava matice na normovaný schodový tvar je pracnější než úprava na schodový tvar (*dopředná redukce*). Výpočet neznámých je pak ale snadnější, nemusí se provádět od poslední rovnice (*zpětná substituce*).

Nakonec přidáme ještě jedno pozorování. *Má-li soustava se čtvercovou maticí právě jedno řešení, je matice soustavy řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí.*

Cvičení:

1. Dané soustavy řešte Gaussovou eliminační metodou:

$$\begin{array}{l} 2x + y - 3z = 0 \\ \text{a) } 6x + 3y - 8z = 0 \\ 2x - y + 5z = -4; \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ \text{b) } 2x_1 + 7x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 + 9x_2 - 7x_3 = 1; \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ \text{c) } 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 - 7x_3 = 0. \end{array}$$

2. Najděte všechna řešení soustav lineárních rovnic užitím Gauss-Jordanovy metody:

$$\begin{array}{l} x_1 - 2x_3 + x_4 = 6 \\ \text{a) } 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 - x_3 - 7x_4 = 4; \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 8 \\ \text{b) } 3x_1 - 12x_2 + 5x_3 = 26 \\ 2x_1 - 9x_2 - x_3 = 14. \end{array}$$

3. Řešte lineární systémy se stejnou maticí a různými pravými stranami:

$$\begin{array}{l} x_1 - 3x_2 - x_3 = 3, 0, -10 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 8, 0, -11 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -5, 0, 9. \end{array}$$

4. Určete matici \mathbf{X} tak, aby vyhovovala maticovým rovnicím:

$$\text{a) } \mathbf{AX} = \mathbf{B}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & -3, & 1 \\ 3, & -8, & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } \mathbf{XA} = \mathbf{I}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1, & x_2 \\ x_3, & x_4 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & 9 \\ 1, & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Najděte vektor \mathbf{b} tak, aby soustava rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ měla řešení:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & 3, & -1 \\ 1, & -1, & 2 \\ 0, & 4, & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

6. Určete všechny hodnoty α , pro které platí $\mathbf{AX} = \mathbf{XA}$, je-li:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 1 \\ 0, & 2, & 0 \\ 1, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & \alpha \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 1 \\ 0, & 2, & 0 \\ 1, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & \alpha, & 0 \\ 0, & 0, & 2 \end{bmatrix}.$$

Výsledky:

$$1. \text{ a) } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix};$$

b) nemá řešení;

$$\text{c) } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10r \\ 3r \\ r \end{bmatrix}, r \in \mathbb{R}.$$

$$2. \text{ a) } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -8 \\ -23 - 5s \\ -7 + s \\ 2s \end{bmatrix}, s \in \mathbb{R};$$

$$\text{b) } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$3. \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$4. \text{ a) } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 + 2t \\ -1 + t \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R};$$

$$\text{b) } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -4, & 9 \\ 1, & -2 \end{bmatrix}.$$

$$5. \text{ Soustava bude mít řešení, jestliže } -b_1 + b_2 + b_3 = 0, \text{ tj. } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} r + s \\ r \\ s \end{bmatrix}; r, s \in \mathbb{R}.$$

6. a) $\mathbf{AX} = \mathbf{XA}$, je-li $\alpha = 3$;
 b) $\mathbf{AX} = \mathbf{XA}$, je-li α libovolné reálné číslo.

1.4 Inverzní matice

Inverzní maticí k čtvercové matici \mathbf{A} nazýváme čtvercovou matici \mathbf{A}^{-1} stejného řádu, pro niž platí $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, kde \mathbf{I} je jednotková matice. Čtvercová matice, k níž existuje (neexistuje) inverzní matice, se nazývá *regulární (singulární)*.

Soustava rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ s regulární maticí \mathbf{A} má právě jedno řešení

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Maticí elementární transformace (elementární maticí) nazýváme matici, kterou dostaneme z jednotkové matice provedením jedné elementární řádkové operace. Takovým způsobem získáme tři typy elementárních matic:

- *elementární permutační matice \mathbf{P}_{ij} :* (výměnou řádků r_i, r_j : $\mathbf{I} \sim \mathbf{P}_{ij}$);
- *elementární matice $\mathbf{M}_i(\alpha)$:* (vynásobením řádku r_i číslem $\alpha \neq 0$: $\mathbf{I} \sim \mathbf{M}_i(\alpha)$);
- *matice Gaussovy transformace $\mathbf{G}_{ij}(\alpha)$:* (přičtením α -násobku řádku r_i k řádku r_j : $\mathbf{I} \sim \mathbf{G}_{ij}(\alpha)$).

Každá řádková úprava matice \mathbf{A} odpovídá vynásobení matice \mathbf{A} zleva vhodnou maticí elementární transformace: Jinými slovy, jestliže elementární matice \mathbf{T} vznikne z jednotkové matice realizací jisté řádkové úpravy, pak matice \mathbf{TA} se rovná matici, jež vznikne z matice \mathbf{A} stejnou řádkovou úpravou.

Příklad 1. V matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \\ a_{31}, & a_{32} \end{bmatrix}$$

provedte prostřednictvím násobení vhodnou elementární maticí následující řádkové úpravy:

- výměnu 2. a 3. řádku;

- vynásobení 1. řádku nenulovým číslem α ;
- přičtení α -násobku 1. řádku k 3. řádku.

Řešení: Příslušné elementární matice dostaneme provedením těchto řádkových operací na jednotkovou matici řádu 3.

$$\begin{aligned} \bullet \mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_3 \\ r_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_{23}; \\ \bullet \mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \cdot (\alpha) \sim \begin{bmatrix} \alpha, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_1(\alpha); \\ \bullet \mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} + \alpha r_1 \sim \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ \alpha, & 0, & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{G}_{13}(\alpha). \end{aligned}$$

Nyní vypočteme matice $\mathbf{P}_{23}\mathbf{A}$, $\mathbf{M}_1(\alpha)\mathbf{A}$ a $\mathbf{G}_{13}(\alpha)\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \bullet \mathbf{P}_{23}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \\ a_{31}, & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{31}, & a_{32} \\ a_{21}, & a_{22} \end{bmatrix}; \\ \bullet \mathbf{M}_1(\alpha)\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \alpha, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \\ a_{31}, & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11}, & \alpha a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \\ a_{31}, & a_{32} \end{bmatrix}; \\ \bullet \mathbf{G}_{13}(\alpha)\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ \alpha, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \\ a_{31}, & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \\ \alpha a_{11} + a_{31}, & \alpha a_{12} + a_{32} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Příklad 2. Napište inverzní matice k maticím elementárních transformací \mathbf{P}_{23} , $\mathbf{M}_1(\alpha)$ a $\mathbf{G}_{13}(\alpha)$ z předchozího příkladu.

Řešení: Matice elementárních transformací jsou regulární. Inverzní matice k dané elementární matici \mathbf{T} obdržíme z jednotkové matice pomocí té řádkové operace, která matici \mathbf{T} převede zpět na matici jednotkovou. Je tedy:

$$\begin{aligned} \bullet \mathbf{P}_{23}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_{23}, \mathbf{P}_{23}\mathbf{P}_{23}^{-1} = \mathbf{I}; \\ \bullet \mathbf{M}_1^{-1}(\alpha) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha}, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_1(\alpha^{-1}), \mathbf{M}_1(\alpha^{-1})\mathbf{M}_1(\alpha) = \mathbf{M}_1(\alpha)\mathbf{M}_1(\alpha^{-1}) = \mathbf{I}; \\ \bullet \mathbf{G}_{13}^{-1}(\alpha) &= \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ -\alpha, & 0, & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{G}_{13}(-\alpha), \mathbf{G}_{13}(-\alpha)\mathbf{G}_{13}(\alpha) = \mathbf{G}_{13}(\alpha)\mathbf{G}_{13}(-\alpha) = \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Inverzní matice k elementárním maticím jsou opět elementární matice. Kontrolu správnosti výpočtu nechtě si čtenář provede sám.

Příklad 3. Najděte inverzní matici k matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & 1, & 4 \\ 3, & 2, & 5 \\ 0, & -1, & 1 \end{bmatrix},$$

a vyjádřete pak matici \mathbf{A} ve tvaru součinu elementárních matic.

Řešení: Inverzní matici počítáme podle následujícího schématu:

1. Napíšeme si rozšířenou matici $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$.
2. Užitím Gauss-Jordanovy metody redukujeme $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$ na $[\mathbf{I} \mid \mathbf{C}]$. Je-li redukce úspěšná, je $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{C}$. V opačném případě matice \mathbf{A}^{-1} neexistuje.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2, & 1, & 4 & 1, & 0, & 0 \\ 3, & 2, & 5 & 0, & 1, & 0 \\ 0, & -1, & 1 & 0, & 0, & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{-\frac{3}{2}r_1} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2, & 1, & 4 & 1, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{2}, & -1 & -\frac{3}{2}, & 1, & 0 \\ 0, & -1, & 1 & 0, & 0, & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{\begin{array}{l} -2r_2 \\ +2r_2 \end{array}} \sim \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2, & 0, & 6 & 4, & -2, & 0 \\ 0, & \frac{1}{2}, & -1 & -\frac{3}{2}, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & -1 & -3, & 2, & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{\begin{array}{l} \cdot(\frac{1}{2}) \\ \cdot(2) \\ \cdot(-1) \end{array}} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1, & 0, & 3 & 2, & -1, & 0 \\ 0, & 1, & -2 & -3, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 1 & 3, & -2, & -1 \end{array} \right] & \xrightarrow{\begin{array}{l} -3r_3 \\ +2r_3 \end{array}} \sim \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1, & 0, & 0 & -7, & 5, & 3 \\ 0, & 1, & 0 & 3, & -2, & -2 \\ 0, & 0, & 1 & 3, & -2, & -1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Matice \mathbf{A} je regulární, hledaná inverzní matice

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -7, & 5, & 3 \\ 3, & -2, & -2 \\ 3, & -2, & -1 \end{bmatrix}.$$

Nyní máme matici \mathbf{A} napsat jako součin elementárních matic. Řádkovým operacím, které transformují matici \mathbf{A} na jednotkovou matici odpovídá osm elementárních matic:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ -\frac{3}{2}, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1, & -2, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 2, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{T}_5 &= \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_7 = \begin{bmatrix} 1, & 0, & -3 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_8 = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 2 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Transformaci matice \mathbf{A} na jednotkovou matici, jak už bylo řečeno, můžeme realizovat pomocí násobení elementárními maticemi. Platí:

$$\mathbf{T}_8 \cdots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \mathbf{A} = \mathbf{I},$$

odtud

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{T}_2^{-1} \cdots \mathbf{T}_8^{-1}. \quad (1.5)$$

Matice $\mathbf{T}_1^{-1}, \dots, \mathbf{T}_8^{-1}$ určíme postupem uvedeným v *příkladu 2* této podkapitoly.

$$\mathbf{T}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ \frac{3}{2}, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1, & 2, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & -2, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_4^{-1} = \begin{bmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_5^{-1} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{2}, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_6^{-1} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_7^{-1} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 3 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_8^{-1} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & -2 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}.$$

Ted' už jenom zbývá dosadit do vzorce (1.5).

Pokud bychom chtěli ověřit, že matice \mathbf{A} se skutečně rovná součinu $\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{T}_2^{-1}\dots\mathbf{T}_8^{-1}$, nemusíme všechny tyto matice násobit. Uvedeme-li ve vzorci (1.5) jednotkovou matici, tj. $\mathbf{A} = \mathbf{T}_1^{-1}\dots\mathbf{T}_8^{-1}\mathbf{I}$, pak je zřejmé, že matici \mathbf{A} můžeme také získat z jednotkové matice pomocí řádkových úprav, které odpovídají po řadě maticím $\mathbf{T}_8^{-1}, \dots, \mathbf{T}_1^{-1}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} +3r_3 \\ -2r_3 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1, & 0, & 3 \\ 0, & 1, & -2 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdot(2) \\ \cdot(\frac{1}{2}) \\ \cdot(-1) \end{array} \sim \begin{bmatrix} 2, & 0, & 6 \\ 0, & \frac{1}{2}, & -1 \\ 0, & 0, & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ -2r_2 \end{array} \sim \\ & \begin{bmatrix} 2, & 0, & 6 \\ 0, & \frac{1}{2}, & -1 \\ 0, & -1, & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} +2r_2 \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 2, & 1, & 4 \\ 0, & \frac{1}{2}, & -1 \\ 0, & -1, & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ +\frac{3}{2}r_1 \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 2, & 1, & 4 \\ 3, & 2, & 5 \\ 0, & -1, & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Poznámka. Vyjádření regulární matice ve tvaru součinu elementárních matic nemusí být jednoznačné. Redukci matice \mathbf{A} na jednotkovou matici v předešlé úloze jsme mohli také zahájit vynásobením prvního řádku $\frac{1}{2}$ a potom první řádek vynásobený -3 přičíst k druhému řádku.

Příklad 4. Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x &+ y - z = 2 \\ 4x &+ 2y - z = 3 \\ -2x &- y + z = 4. \end{aligned}$$

Řešení: Je-li matice soustavy \mathbf{A} regulární, můžeme řešení soustavy vyjádřit ve tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3, & 1, & -1 & 1, & 0, & 0 \\ 4, & 2, & -1 & 0, & 1, & 0 \\ -2, & -1, & 1 & 0, & 0, & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \cdot(3) \\ \cdot(3) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3, & 1, & -1 & 1, & 0, & 0 \\ 12, & 6, & -3 & 0, & 3, & 0 \\ -6, & -3, & 3 & 0, & 0, & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} -4r_1 \\ +2r_1 \end{array} \sim \\ & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3, & 1, & -1 & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 1 & -4, & 3, & 0 \\ 0, & -1, & 1 & 2, & 0, & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_3 \\ r_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3, & 1, & -1 & 1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 1 & 2, & 0, & 3 \\ 0, & 2, & 1 & -4, & 3, & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} +r_2 \\ +2r_2 \end{array} \sim \\ & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3, & 0, & 0 & 3, & 0, & 3 \\ 0, & -1, & 1 & 2, & 0, & 3 \\ 0, & 0, & 3 & 0, & 3, & 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} \cdot(\frac{1}{3}) \\ \cdot(-1) \\ \cdot(\frac{1}{3}) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1, & 0, & 0 & 1, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & -1 & -2, & 0, & -3 \\ 0, & 0, & 1 & 0, & 1, & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ +r_3 \end{array} \sim \\ & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1, & 0, & 0 & 1, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 & -2, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & 1 & 0, & 1, & 2 \end{array} \right] = [\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}]. \end{aligned}$$

Inverzní matice existuje, takže soustava

$$\begin{bmatrix} 3, & 1, & -1 \\ 4, & 2, & -1 \\ -2, & -1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ má řešení } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 1 \\ -2, & 1, & -1 \\ 0, & 1, & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Příklad 5. Najděte číslo λ tak, aby matice

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2, & 4, & 2 \\ 1, & \lambda, & 3 \\ 1, & 1, & 2 \end{bmatrix}$$

byla regulární.

Řešení: Pokusíme se o transformaci matice \mathbf{B} na jednotkovou matici. Příslušné řádkové operace už nebudu uvádět.

$$\begin{bmatrix} 2, & 4, & 2 \\ 1, & \lambda, & 3 \\ 1, & 1, & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1, & 2, & 1 \\ 0, & \lambda-2, & 2 \\ 0, & -1, & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1, & 2, & 1 \\ 0, & -1, & 1 \\ 0, & \lambda-2, & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1, & 2, & 1 \\ 0, & -1, & 1 \\ 0, & 0, & \lambda \end{bmatrix}.$$

Z poslední upravené matice je vidět, že transformace je možná, je-li $\lambda \neq 0$. Matice \mathbf{B} bude regulární pro každé nenulové číslo λ .

Příklad 6. Ukažte, že matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{bmatrix}$$

je regulární právě tehdy, když $ad - bc \neq 0$.

Řešení:

- Nechť matice \mathbf{A} je regulární. Pak alespoň jedno z čísel a nebo c je různé od nuly. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a \neq 0$. Přistupme k redukci \mathbf{A} na \mathbf{I} :

$$\begin{bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1, & \frac{b}{a} \\ c, & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1, & \frac{b}{a} \\ 0, & d - \frac{bc}{a} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1, & \frac{b}{a} \\ 0, & \frac{ad-bc}{a} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1, & \frac{b}{a} \\ 0, & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix};$$

redukce musí být úspěšná, a tudíž $ad - bc \neq 0$.

- Nechť naopak $ad - bc \neq 0$. Pak opět čísla a, c nemohou být současně nulová. To ovšem znamená, že matici \mathbf{A} můžeme úspěšně redukovat na matici jednotkovou, a tedy \mathbf{A} je regulární.

Příklad 7. Dokažte, že platí toto tvrzení: Nechť \mathbf{A} a \mathbf{C} jsou čtvercové matice řádu n . Potom $\mathbf{AC} = \mathbf{I}$ právě tehdy, když $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$.

Řešení:

- Je-li $\mathbf{AC} = \mathbf{I}$, pak soustava rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ má řešení pro libovolný vektor pravých stran \mathbf{b} . Tímto řešením je vektor $\mathbf{x} = \mathbf{Cb}$: $\mathbf{A}(\mathbf{Cb}) = (\mathbf{AC})\mathbf{b} = \mathbf{Ib} = \mathbf{b}$. Označme $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_k$ matice elementárních transformací, které redukuje matici \mathbf{A} na matici \mathbf{H} , kde \mathbf{H} je v normovaném schodovém tvaru, tj. $\mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1 \mathbf{A} = \mathbf{H}$. Ukážeme, že \mathbf{H} je jednotková matice. Kdyby tomu tak nebylo, musela by mít matice \mathbf{H} poslední řádek nulový, a tudíž soustava $\mathbf{Hx} = \mathbf{e}_n$, kde $\mathbf{e}_n = [0, \dots, 0, 1]^T$, by neměla řešení. Pak by ale neměla řešení také původní soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{T}_1^{-1} \cdots \mathbf{T}_k^{-1} \mathbf{e}_n$, což je spor s tím, co jsme v úvodu ukázali. Existuje tedy matice $\mathbf{D} = \mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1$ taková, že $\mathbf{DA} = \mathbf{I}$. Jenže $\mathbf{D} = \mathbf{DI} = \mathbf{D}(\mathbf{AC}) = (\mathbf{DA})\mathbf{C} = \mathbf{IC} = \mathbf{C}$, takže $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$.
- Je-li naopak $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$, pak postupujeme jako v první části s tím, že zaměníme úlohy matic \mathbf{A} a \mathbf{C} .

Cvičení:

1. Vypočítejte inverzní matice k těmto maticím:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & -2, & 3 \\ 2, & -1, & 1 \\ 4, & -5, & 7 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3, & -2, & 0, & -1 \\ 0, & 2, & 2, & 1 \\ 1, & -2, & -3, & -2 \\ 0, & 1, & 2, & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Soustavu lineárních rovnic řešte užitím inverzní matice:

$$\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ \text{a) } 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1; \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ \text{b) } -2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 6 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 = -8. \end{array}$$

3. Matici

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 1, & 2, & 0 \\ 1, & 2, & 3 \end{bmatrix}$$

napište ve tvaru součinu elementárních matic.

4. Dokažte, že pro každou regulární matici \mathbf{A} a libovolné číslo $\alpha \neq 0$ platí

$$(\alpha \mathbf{A})^{-1} = \alpha^{-1} \mathbf{A}^{-1}.$$

5. Určete všechna čísla θ , pro která je matice

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3, & 5, & -1 \\ 1, & \theta, & \frac{2}{3} \\ -1, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

regulární.

6. Najděte několik příkladů regulárních matic 2. stupně takových, že $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}$.

7. Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé (P) nebo nepravdivé (N). O maticích předpokládáme, že mají vhodný rozměr.

- Je-li $\mathbf{AC} = \mathbf{BC}$ a \mathbf{C} je regulární, pak $\mathbf{A} = \mathbf{B}$;
- Je-li $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$ a \mathbf{B} je regulární, pak $\mathbf{A} = \mathbf{O}$;
- Každá regulární matice je součinem elementárních matic;
- Jsou-li matice \mathbf{A} , \mathbf{B} regulární, pak $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$;
- Je-li $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ a dvě z těchto matic jsou regulární, pak i třetí matice je regulární;
- Je-li $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ a dvě z těchto matic jsou singulární, pak i třetí matice je singulární;
- Je-li matice \mathbf{A} regulární, pak $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ a $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$;
- Pro každou elementární permutační matici \mathbf{P}_{ij} platí: $\mathbf{P}_{ij}^{-1} = \mathbf{P}_{ij}^T$.

Výsledky:

$$1. \mathbf{A}^{-1} \text{ neexistuje; } \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}; \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & -2, & -4 \\ 0, & 1, & 0, & -1 \\ -1, & -1, & 3, & 6 \\ 2, & 1, & -6, & -10 \end{bmatrix}.$$

$$2. \text{ a) } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14, & -8, & -1 \\ -17, & 10, & 1 \\ -19, & 11, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix};$$

b) matice soustavy je singulární, soustavu nelze řešit užitím inverzní matice.

3. $\mathbf{L} = \mathbf{G}_{12}(1) \mathbf{G}_{13}(1) \mathbf{G}_{23}(1) \mathbf{M}_2(2) \mathbf{M}_3(3) =$

$$= \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 1, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 3 \end{bmatrix}.$$

4. Návod: držte se definice inverzní matice.
5. Matice je regulární pro libovolné číslo θ .
6. Například: $\begin{bmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 0, & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -6, & -7 \\ 5, & 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 50, & -1 \end{bmatrix}$, ...

Nápověda: určete inverzní matici k matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{bmatrix};$$

$$\left(\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} a_{22}, & -a_{12} \\ -a_{21}, & a_{11} \end{bmatrix}, d = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0 \right).$$

7. a) P; b) P; c) P; d) N; e) P; f) N; g) P; h) P.

1.5 Trojúhelníkový rozklad

Čtvercovou matici

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11}, & u_{12}, & \dots, & u_{1n} \\ 0, & u_{22}, & \dots, & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \dots, & u_{nn} \end{bmatrix},$$

jež má pod hlavní diagonálou samé nuly, nazýváme *horní trojúhelníkovou maticí*. Čtvercovou matici

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11}, & 0, & \dots, & 0 \\ l_{21}, & l_{22}, & \dots, & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1}, & l_{n2}, & \dots, & l_{nn} \end{bmatrix},$$

jež má nad hlavní diagonálou samé nuly, nazveme *dolní trojúhelníkovou maticí*. Matice \mathbf{P} , kterou můžeme získat z jednotkové matice \mathbf{I} postupnou výměnou řádků, se nazývá *permutační matice*.

Libovolná permutační matice \mathbf{P} se dá napsat jako součin elementárních permutačních matic, přičemž platí

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T. \quad (1.6)$$

Každá výměna sloupců v matici \mathbf{A} odpovídá vynásobení matice \mathbf{A} zprava vhodnou elementární permutační maticí: Je-li tedy $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{ij}$, pak \mathbf{B} je matice, jež vznikne z matice \mathbf{A} výměnou i -tého a j -tého sloupce.

Každou čtvercovou regulární matici \mathbf{A} můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}\tilde{\mathbf{P}}, \quad (1.7)$$

*kde \mathbf{L} je dolní trojúhelníková matice, \mathbf{U} je horní trojúhelníková matice a $\tilde{\mathbf{P}}$ je permutační matice. Vyjádření matice \mathbf{A} ve tvaru (1.7) se nazývá *LU rozklad* matice \mathbf{A} . Příslušné matice \mathbf{L} , \mathbf{U} a $\tilde{\mathbf{P}}$ najdeme následujícím způsobem:*

1. Sestavíme rozšířenou matici $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$ a ještě jednou matici \mathbf{I} .

2. Pomocí řádkových operací redukuje $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$ na $[\mathbf{U} \mid \tilde{\mathbf{L}}]$, kde $\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}^{-1}$. Pořadí řádku nezaměňujeme a vždy přičítáme násobek řádku s nižším indexem k řádku s vyšším indexem! Není-li při redukcí zapotřebí vyměňovat sloupce, je $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{I}$. Je-li při redukcí \mathbf{A} na \mathbf{U} nutná i výměna sloupců, použijeme stejných výměn sloupců k transformaci matice \mathbf{I} na permutační matici $\tilde{\mathbf{P}}$. V tomto případě $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^T$.
3. Nakonec vypočteme známým způsobem matici $\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{L}}^{-1}$.

Řešení soustavy rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ s regulární maticí \mathbf{A} pomocí LU rozkladu pak spočívá v tom, že soustavu přepíšeme do tvaru

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}(\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{x})) = \mathbf{b}$$

a položíme $\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $\mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{z}$. Řešení soustavy se tak rozpadne na řešení tří soustav

$$\mathbf{L}\mathbf{z} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{z}, \quad \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{x} = \mathbf{y}. \quad (1.8)$$

Poznámka 1. LU rozklad není jednoznačný. Záleží na tom, jak volíme diagonální prvky matice \mathbf{L} :

$$\begin{bmatrix} 2, & 9 \\ 1, & 4 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ \frac{1}{2}, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2, & 9 \\ 0, & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2, & 9 \\ 0, & -1 \end{bmatrix}.$$

Příklad 1. Užitím LU rozkladu řešte soustavu

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= -2 \\ 6x_1 + 3x_2 - 8x_3 &= -5 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 &= 8. \end{aligned}$$

Řešení: Označíme \mathbf{A} matici soustavy a přistoupíme k výpočtu matic \mathbf{L} , \mathbf{U} , $\tilde{\mathbf{P}}$.

• Úprava $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$ na $[\mathbf{U} \mid \tilde{\mathbf{L}}]$:

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2, & 1, & -3 & 1, & 0, & 0 \\ 6, & 3, & -8 & 0, & 1, & 0 \\ 2, & -1, & 5 & 0, & 0, & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ -3r_1 \\ -r_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2, & 1, & -3 & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 & -3, & 1, & 0 \\ 0, & -2, & 8 & -1, & 0, & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ \mathbf{s}_3 \quad \mathbf{s}_2 \end{matrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2, & -3, & 1 & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 & -3, & 1, & 0 \\ 0, & 8, & -2 & -1, & 0, & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ -8r_2 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2, & -3, & 1 & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 & -3, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & -2 & 23, & -8, & 1 \end{array} \right] = [\mathbf{U} \mid \tilde{\mathbf{L}}].$$

• Výpočet permutační matice $\tilde{\mathbf{P}}$:

$$\mathbf{I} = \left[\begin{array}{ccc} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \mathbf{s}_3 \quad \mathbf{s}_2 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{array} \right] = \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}^T = \left[\begin{array}{ccc} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{array} \right] = \tilde{\mathbf{P}}.$$

• Výpočet matice \mathbf{L} :

$$[\tilde{\mathbf{L}} \mid \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1, & 0, & 0 & 1, & 0, & 0 \\ -3, & 1, & 0 & 0, & 1, & 0 \\ 23, & -8, & 1 & 0, & 0, & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ +3r_1 \\ -23r_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1, & 0, & 0 & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 & 3, & 1, & 0 \\ 0, & -8, & 1 & -23, & 0, & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ +8r_2 \end{matrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1, & 0, & 0 & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 & 3, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 & 1, & 8, & 1 \end{array} \right] = [\mathbf{I} | \mathbf{L}].$$

Nakonec přistoupíme k řešení rovnic (1.8):

$$\mathbf{Lz} = \mathbf{b} : \left[\begin{array}{ccc|c} 1, & 0, & 0 & -2 \\ 3, & 1, & 0 & -5 \\ 1, & 8, & 1 & 8 \end{array} \right] \begin{array}{l} z_1 = -2 \\ z_2 = 1 \\ z_3 = 2 \end{array}, \quad \mathbf{Uy} = \mathbf{z} : \left[\begin{array}{ccc|c} 2, & -3, & 1 & -2 \\ 0, & 1, & 0 & 1 \\ 0, & 0, & -2 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = -1 \end{array},$$

$$\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{x} = \mathbf{y} : \left[\begin{array}{ccc|c} 1, & 0, & 0 & 1 \\ 0, & 0, & 1 & 1 \\ 0, & 1, & 0 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_2 = -1 \end{array}, \text{ řešení soustavy je } x_1 = 1, x_2 = -1 \text{ a } x_3 = 1.$$

Poznámka 2. Případnou výměnu sloupců při úpravě $[\mathbf{A} | \mathbf{I}]$ na $[\mathbf{U} | \tilde{\mathbf{L}}]$ provádíme jen v matici \mathbf{A} nebo upravené matici \mathbf{A} . K úpravě stačila pouze výměna sloupců, a tudíž příslušná permutační matice $\tilde{\mathbf{P}}$ je elementární permutační maticí. Pokud LU rozklad má posloužit pouze k řešení soustavy, nemusíme vyčíslit matici \mathbf{L} explicitně. Vzhledem k tomu, že $\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}^{-1}$, můžeme vyjádřit řešení první soustavy (1.8) ve tvaru $\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{b}$:

$$\left[\begin{array}{ccc} 1, & 0, & 0 \\ -3, & 1, & 0 \\ 23, & -8, & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} -2 \\ -5 \\ 8 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -2 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right].$$

Příklad 2. Najděte trojúhelníkový (LU) rozklad matice

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc} 0, & -1, & 1, & 0 \\ -1, & 4, & -4, & 3 \\ 1, & -2, & 0, & 3 \\ 5, & -8, & 4, & 0 \end{array} \right].$$

Řešení:

- Redukce $[\mathbf{A} | \mathbf{I}]$ na $[\mathbf{U} | \tilde{\mathbf{L}}]$:

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \quad \mathbf{I} \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0, & -1, & 1, & 0 & 1, & 0, & 0, & 0 \\ -1, & 4, & -4, & 3 & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & -2, & 0, & 3 & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 5, & -8, & 4, & 0 & 0, & 0, & 0, & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1, & -1, & 0, & 0 & 1, & 0, & 0, & 0 \\ -4, & 4, & -1, & 3 & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & -2, & 1, & 3 & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 4, & -8, & 5, & 0 & 0, & 0, & 0, & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} +4r_1 \\ \\ -4r_1 \end{array} \sim \\ \mathbf{s}_3 \quad \mathbf{s}_1 \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1, & -1, & 0, & 0 & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -1, & 3 & 4, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & -2, & 1, & 3 & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & -4, & 5, & 0 & -4, & 0, & 0, & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1, & 0, & -1, & 0 & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 3 & 4, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & -2, & 3 & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 5, & -4, & 0 & -4, & 0, & 0, & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ +r_2 \\ +5r_2 \end{array} \sim \\ \mathbf{s}_3 \quad \mathbf{s}_2 \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1, & 0, & -1, & 0 & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 3 & 4, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -2, & 6 & 4, & 1, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & -4, & 15 & 16, & 5, & 0, & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1, & 0, & -1, & 0 & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 3 & 4, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -2, & 6 & 4, & 1, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 3 & 8, & 3, & -2, & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ -2r_3 \end{array} \sim \\ \mathbf{U} \quad \tilde{\mathbf{L}} \end{array}$$

- Odvození permutační matice $\tilde{\mathbf{P}}$:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{\mathbf{s}_3 \\ \mathbf{s}_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{\mathbf{s}_3 \\ \mathbf{s}_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{P},$$

$$\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{P}}.$$

- Vyčíslení matice \mathbf{L} :

$$\begin{array}{c} \tilde{\mathbf{L}} \quad \mathbf{I} \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1, & 0, & 0, & 0 & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 4, & 1, & 0, & 0 & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 4, & 1, & 1, & 0 & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 8, & 3, & -2, & 1 & 0, & 0, & 0, & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ -4r_1 \\ -4r_1 \\ -8r_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1, & 0, & 0, & 0 & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 & -4, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 1, & 0 & -4, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 3, & -2, & 1 & -8, & 0, & 0, & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ -r_2 \\ -3r_2 \end{array} \sim \\ \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1, & 0, & 0, & 0 & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 & -4, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 & 0, & -1, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & -2, & 1 & 4, & -3, & 0, & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ +2r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1, & 0, & 0, & 0 & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 & -4, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 & 0, & -1, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 & 4, & -5, & 2, & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \mathbf{I} \quad \mathbf{L} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Vypočtené matice \mathbf{L} , \mathbf{U} a $\tilde{\mathbf{P}}$ můžeme ještě pro kontrolu dosadit do vzorce (1.7). Platí:

$$\begin{bmatrix} 0, & -1, & 1, & 0 \\ -1, & 4, & -4, & 3 \\ 1, & -2, & 0, & 3 \\ 5, & -8, & 4, & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ -4, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 1, & 0 \\ 4, & -5, & 2, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & -1, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 3 \\ 0, & 0, & -2, & 6 \\ 0, & 0, & 0, & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}.$$

Pozorování. Prvky matice \mathbf{L} se až na znaménko shodují s multiplikátory řádkových operací redukujících matici \mathbf{A} na matici \mathbf{U} . Přesněji řečeno, jestliže jsme při redukcí \mathbf{A} na \mathbf{U} přičetli k řádku r_j α -násobek řádku r_i , je odpovídající prvek l_{ji} matice \mathbf{L} roven $-\alpha$. Můžeme tedy souběžně s úpravou matice \mathbf{A} na matici \mathbf{U} generovat matici \mathbf{L} : *Vyjďeme z jednotkové matice \mathbf{I} stejného stupně. Je-li během úpravy \mathbf{A} na \mathbf{U} k j -tému řádku přičten α -násobek i -tého řádku, nahradíme nulu na místě (j,i) upravované jednotkové matice číslem $-\alpha$.* Ukážeme si to na příkladu matice \mathbf{A} z předešlé úlohy. Místo matice \mathbf{A} budeme ale redukovat hned matici $\mathbf{AP} = \bar{\mathbf{A}}$, abychom se už nemuseli zabývat výměnami sloupců.

$$\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} 0, & -1, & 1, & 0 \\ -1, & 4, & -4, & 3 \\ 1, & -2, & 0, & 3 \\ 5, & -8, & 4, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & -1, & 0 \\ -4, & -1, & 4, & 3 \\ 0, & 1, & -2, & 3 \\ 4, & 5, & -8, & 0 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{A}}.$$

Redukce matice $\bar{\mathbf{A}}$

$$\begin{bmatrix} 1, & 0, & -1, & 0 \\ -4, & -1, & 4, & 3 \\ 0, & 1, & -2, & 3 \\ 4, & 5, & -8, & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ r_2 + 4r_1 \\ \\ r_4 - 4r_1 \end{array} \sim$$

Generování matice \mathbf{L}

$$\begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ -4 \rightarrow l_{21} \\ \\ 4 \rightarrow l_{41} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1, & 0, & -1, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 3 \\ 0, & 1, & -2, & 3 \\ 0, & 5, & -4, & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} r_3 + 1r_2 \\ r_4 + 5r_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ -4, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 4, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 \rightarrow l_{32} \\ -5 \rightarrow l_{42} \end{matrix} \\
\begin{bmatrix} 1, & 0, & -1, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 3 \\ 0, & 0, & -2, & 6 \\ 0, & 0, & -4, & 15 \end{bmatrix} & \begin{matrix} r_4 - 2r_3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ -4, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 1, & 0 \\ 4, & -5, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \rightarrow l_{43} \end{matrix} \\
\begin{bmatrix} 1, & 0, & -1, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 3 \\ 0, & 0, & -2, & 6 \\ 0, & 0, & 0, & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{U} & \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ -4, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 1, & 0 \\ 4, & -5, & 2, & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Poznámka 3. Není obtížné zdůvodnit, že tímto způsobem vždy dostaneme dolní trojúhelníkovou matici \mathbf{L} . Necht' $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_k$ jsou elementární matice, které odpovídají řádkovým operacím transformujícím matici \mathbf{A} , resp. $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\mathbf{P}$ na matici \mathbf{U} . Platí

$$\mathbf{T}_k \mathbf{T}_{k-1} \cdots \mathbf{T}_1 \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{U}. \quad (1.9)$$

Vzhledem k tomu, že matice $\bar{\mathbf{A}}$ má během úpravy (nenulové) vedoucí prvky pokaždé tam, kde je potřebujeme, jsou všechny matice $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_k$ dolní trojúhelníkové matice $\mathbf{G}_{ij} (-\bar{a}_{ji}^{i-1}/\bar{a}_{ii}^{i-1})$ ($i = 1, \dots, n-1; j = i+1, \dots, n$), a tudíž i matice inverzní $\mathbf{T}_1^{-1}, \dots, \mathbf{T}_k^{-1}$ jsou dolní trojúhelníkové matice $\mathbf{G}_{ij} (\bar{a}_{ji}^{i-1}/\bar{a}_{ii}^{i-1})$, jejichž součinem je dolní trojúhelníková matice \mathbf{L} . Ze vztahu (1.9) totiž máme

$$\mathbf{A} \mathbf{P} = \underbrace{\mathbf{T}_1^{-1} \cdots \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{T}_k^{-1}}_{\mathbf{L}} \mathbf{U},$$

takže

$$\mathbf{L} = \mathbf{T}_1^{-1} \cdots \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{T}_k^{-1} \mathbf{I}. \quad (1.10)$$

Podle (1.10) získáme tedy matici \mathbf{L} z jednotkové matice \mathbf{I} užitím řádkových operací, které odpovídají postupně maticím $\mathbf{T}_k^{-1}, \mathbf{T}_{k-1}^{-1}, \dots, \mathbf{T}_1^{-1}$. Necht' $\mathbf{T}_k = \mathbf{G}_{n-1n}(\alpha)$ je matice poslední elementární transformace (α -násobek řádku r_{n-1} přičteme k řádku r_n) při redukci matice $\bar{\mathbf{A}}$ na matici \mathbf{U} . Odtud matice $\mathbf{T}_k^{-1} \mathbf{I} = \mathbf{G}_{n-1n}(-\alpha)$ vznikne z jednotkové matice \mathbf{I} záměnou nuly v pozici $(n, n-1)$ číslem $-\alpha$. Podobně, je-li $\mathbf{T}_{k-1} = \mathbf{G}_{n-2n}(\beta)$, pak součinem $\mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{T}_k^{-1}$ je matice $\mathbf{G}_{n-2n}(-\beta) \mathbf{G}_{n-1n}(-\alpha)$, která se rovná matici, jež vznikne z $\mathbf{G}_{n-1n}(-\alpha)$ přičtením $(-\beta)$ -násobku řádku r_{n-2} k řádku r_n . Ježto matice $\mathbf{G}_{n-1n}(-\alpha)$ má na místě $(n-2, n-2)$ prvek 1, zatímco ostatní prvky řádku jsou nulové, bude mít matice $\mathbf{G}_{n-2n}(-\beta) \mathbf{G}_{n-1n}(-\alpha)$ na místě $(n, n-2)$ číslo $-\beta$. Dále je pak obsazena pozice $(n-1, n-2)$. Vypočteme-li součin $\mathbf{T}_{k-2}^{-1} (\mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{T}_k^{-1})$, kde $\mathbf{T}_{k-2}^{-1} = \mathbf{G}_{n-2n-1}(-\gamma)$, objeví se ve výsledné matici na místě $(n-1, n-2)$ číslo $-\gamma$, atd. Takovým způsobem jsou generovány prvky matice \mathbf{L} , aniž by se pozměnily prvky již vygenerované. To znamená, že matici \mathbf{L} můžeme skutečně vytvářet z jednotkové matice \mathbf{I} spolu s úpravou matice \mathbf{A} na matici \mathbf{U} tím, že v ní obsazujeme příslušná místa pod hlavní diagonálou multiplikátory řádkových operací s opačným znaménkem.

Cvičení:

1. Určete permutační matici \mathbf{P} tak, aby $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$, jestliže

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & 2, & -1 \\ 3, & 7, & 2 \\ 4, & -2, & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2, & -1, & 1 \\ 7, & 2, & 3 \\ -2, & 1, & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Najděte permutační matici \mathbf{P} , matice \mathbf{L} a \mathbf{U} tak, aby $\mathbf{AP} = \mathbf{LU}$, je-li

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & -1 \\ 6, & -5 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4, & 6, & 1 \\ 2, & 3, & 1 \\ 1, & 1, & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Lineární systémy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ řešte pomocí LU rozkladu:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & 2, & -1 \\ 3, & 7, & 2 \\ 4, & -2, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & -1, & -2 \\ 2, & 2, & -1, & 1 \\ -1, & 2, & 1, & -4 \\ 1, & 4, & 2, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix};$$

$$\text{c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & -4, & 1, & -2 \\ 0, & 2, & -1, & 1 \\ 2, & -7, & -2, & 1 \\ 0, & 3, & 0, & -4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -9 \\ 6 \\ 10 \\ -16 \end{bmatrix}.$$

4. Matici \mathbf{L} z příkladu 2 této podkapitoly napište jako součin elementárních matic.

5. Řešte soustavu $\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{b}$, pro

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & -1, & 0 \\ 4, & -1, & 2 \\ -6, & 2, & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 14 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

6. Řešte soustavu $\mathbf{A}^3\mathbf{x} = \mathbf{b}$, je-li

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1, & 0, & 1 \\ 3, & 1, & 0 \\ -2, & 0, & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 27 \\ 29 \\ 122 \end{bmatrix}.$$

7. Budiž \mathbf{L} (\mathbf{U}) dolní (horní) trojúhelníková matice. Označte, které z následujících tvrzení je pravdivé (P) nebo nepravdivé (N):

- Každou čtvercovou matici \mathbf{A} lze rozložit na součin \mathbf{LU} ;
- Každou regulární matici \mathbf{A} můžeme rozložit na součin \mathbf{LU} ;
- Každou regulární matici \mathbf{A} lze vyjádřit jako součin \mathbf{LUP} , kde $\tilde{\mathbf{P}}$ je permutační matice;
- Lineární systém $\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$ řešíme nejprve dopřednou substitucí a pak zpětnou substitucí;
- K výpočtu LU rozkladu je zapotřebí asi $\frac{1}{2}$ počtu násobení než k výpočtu inverzní matice;
- Existuje pouze jediný rozklad dané regulární matice \mathbf{A} na součin \mathbf{LUP} .

Výsledky:

$$1. \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix}.$$

$$2. \text{ a) } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 3, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2, & -1 \\ 0, & -2 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ \frac{1}{2}, & 1, & 0 \\ \frac{1}{4}, & \frac{3}{2}, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4, & 1, & 6 \\ 0, & \frac{1}{2}, & 0 \\ 0, & 0, & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

$$3. \text{ a) } \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{I}, \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 3, & 1, & 0 \\ 4, & -10, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1, & 2, & -1 \\ 0, & 1, & 5 \\ 0, & 0, & 55 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } \tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 2, & 1, & 0, & 0 \\ -1, & 0, & 1, & 0 \\ 1, & 3, & 1, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1, & -1, & 1, & -2 \\ 0, & 1, & 0, & 5 \\ 0, & 0, & 3, & -6 \\ 0, & 0, & 0, & -6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = [1, 2, -1, -2]^T.$$

$$\text{c) } \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{I}, \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 2, & \frac{1}{2}, & 1, & 0 \\ 0, & \frac{3}{2}, & -\frac{3}{7}, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1, & -4, & 1, & -2 \\ 0, & 2, & -1, & 1 \\ 0, & 0, & -\frac{7}{2}, & \frac{9}{2} \\ 0, & 0, & 0, & -\frac{23}{7} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$4. \mathbf{L} = \mathbf{G}_{12}(-4) \mathbf{G}_{14}(4) \mathbf{G}_{23}(-1) \mathbf{G}_{24}(-5) \mathbf{G}_{34}(2) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ -4, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 4, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & -5, & 0, & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 2, & 1 \end{bmatrix}.$$

5. $\mathbf{x} = [-2, 0, 1]^T$; návod: položte $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ a soustavu $\mathbf{Ay} = \mathbf{b}$ řešte užitím LU rozkladu.

$$6. \mathbf{x} = [-1, 2, 2]^T.$$

7. a) N; b) N; c) P; d) P; e) P; f) N.

Kapitola 2

Vektorové prostory

2.1 Vektorové prostory a podprostory

Neprázdná množina \mathcal{V} prvků $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots$ se nazývá *vektorový prostor*, jestliže splňuje následující podmínky:

- Ke každým dvěma prvkům $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ je jednoznačně určen jejich *součet* $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{V}$, přičemž

$$\text{V1 } (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w});$$

$$\text{V2 } \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u};$$

$$\text{V3 } \text{v množině } \mathcal{V} \text{ existuje takový prvek } \mathbf{o}, \text{ že } \mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u} \text{ pro všechna } \mathbf{u} \in \mathcal{V};$$

$$\text{V4 } \text{ke každému } \mathbf{u} \in \mathcal{V} \text{ existuje takový prvek } -\mathbf{u} \in \mathcal{V}, \text{ že } \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}.$$

- Pro libovolné číslo α (reálné nebo komplexní) a libovolný prvek $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ je jednoznačně určen *skalární násobek* $\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, přičemž

$$\text{V5 } \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v};$$

$$\text{V6 } (\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u};$$

$$\text{V7 } \alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u};$$

$$\text{V8 } 1\mathbf{u} = \mathbf{u}.$$

Prvky množiny \mathcal{V} nazýváme *vektory*. Reálná, resp. komplexní čísla nazýváme *skaláry*. Je-li množinou skalárů množina reálných (komplexních) čísel, mluvíme o *reálném (komplexním) vektorovém prostoru*. Vektor \mathbf{o} se nazývá *nulový vektor* a vektor $-\mathbf{u}$ *opačný vektor* k vektoru \mathbf{u} .

Neprázdnou podmnožinu \mathcal{W} vektorového prostoru nazveme *podprostorem* prostoru \mathcal{V} , jestliže je sama vektorovým prostorem vzhledem k operacím sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem definovanými na \mathcal{V} .

Příklad 1. Reálné aritmetické vektory zavedené v *podkapitole 1.1* s operacemi sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem po složkách tvoří vektorový prostor, který se nazývá *aritmetický vektorový prostor*.

Příklad 2. Buď $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ množina všech uspořádaných dvojic reálných čísel. Definujme sčítání uspořádaných dvojic a násobení uspořádané dvojice skalárem následovně:

$$\bullet [x, y] \oplus [r, s] = [x + r, 2y + s];$$

$$\bullet \alpha [x, y] = [\alpha x, \alpha y].$$

Je množina \mathcal{V} pro takto definované sčítání a násobení skalárem vektorový prostor?

Řešení: Ověříme platnost axiomů V1 - V8 vektorového prostoru. Položme $\mathbf{u} = [x, y]$, $\mathbf{v} = [r, s]$ a $\mathbf{w} = [a, b]$. Začneme axiomem V1. Má platit

$$(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w} = \mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}).$$

$$(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w} = ([x, y] \oplus [r, s]) \oplus [a, b] = [x + r, 2y + s] \oplus [a, b] = [x + r + a, 4y + 2s + b].$$

$$\mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = [x, y] \oplus ([r, s] \oplus [a, b]) = [x, y] \oplus [r + a, 2s + b] = [x + r + a, 2y + 2s + b].$$

Axiom V1 neplatí,

$$(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}),$$

množina \mathcal{V} není vektorový prostor. Operaci sčítání uspořádaných dvojic jsme označili " \oplus ", abychom ji odlišili od sčítání po složkách.

Příklad 3. Ukažte, že neprázdna podmnožina \mathcal{W} vektorového prostoru \mathcal{V} je podprostorem prostoru \mathcal{V} , právě když splňuje následující podmínky:

- (1) Jestliže $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{W}$, pak $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{W}$.
- (2) Jestliže $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{u} \in \mathcal{W}$, pak $\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{W}$.

Řešení: Je-li \mathcal{W} vektorový podprostor, tak podmínky (1) a (2) jsou samozřejmě splněny. Nechť \mathcal{W} vyhovuje podmínkám (1) a (2). Položíme-li $\alpha = -1$, pak vzhledem k (2) $-1\mathbf{u} = -\mathbf{u} \in \mathcal{W}$ a podle (1) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o} \in \mathcal{W}$, takže opačný vektor i nulový vektor patří do \mathcal{W} . Ostatní axiomy vektorového prostoru vzhledem k tomu, že $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$, musí v množině \mathcal{W} platit pochopitelně také.

Příklad 4. Buď \mathcal{F} vektorový prostor všech reálných funkcí reálné proměnné x spolu s operacemi

- *sčítání:* pro každé $f, g \in \mathcal{F}$ a libovolné $x \in \mathbb{R}$ klademe $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;
- *skalární násobení:* pro každé $f \in \mathcal{F}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ a libovolné $x \in \mathbb{R}$ klademe $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.

Ukažte, že množina

$$\mathcal{F}_0 = \{f \in \mathcal{F} : f(0) = 0\}$$

je podprostorem prostoru \mathcal{F} .

Řešení: Jak jsme ukázali v předešlé úloze, stačí ověřit, že množina $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ je uzavřena vzhledem ke sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem, tj.

$$\begin{aligned} f, g \in \mathcal{F}_0 &\Rightarrow f + g \in \mathcal{F}_0, \\ \alpha \in \mathbb{R} \wedge f \in \mathcal{F}_0 &\Rightarrow \alpha f \in \mathcal{F}_0. \end{aligned}$$

Nechť tedy $f, g \in \mathcal{F}_0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom

$$\begin{aligned} (f + g)(0) &= f(0) + g(0) = 0, \\ (\alpha f)(0) &= \alpha f(0) = 0, \end{aligned}$$

takže $f + g \in \mathcal{F}_0$ a $\alpha f \in \mathcal{F}_0$. Množina \mathcal{F}_0 je vektorový podprostor.

Příklad 5. Dokažte, že lineární obal množiny $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ vektorů prostoru \mathcal{V} tvoří vektorový podprostor prostoru \mathcal{V} .

Řešení: Lineární obal množiny \mathcal{S} (označujeme $\langle \mathcal{S} \rangle$) je množina všech vektorů, které se dají vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k; \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}.$$

Nechť tedy $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \langle \mathcal{S} \rangle$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Zřejmě $\mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \beta_k \mathbf{v}_k$, odtud

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (\alpha_1 + \beta_1) \mathbf{v}_1 + \cdots + (\alpha_k + \beta_k) \mathbf{v}_k \in \langle \mathcal{S} \rangle, \\ \alpha \mathbf{u} &= (\alpha \alpha_1) \mathbf{v}_1 + \cdots + (\alpha \alpha_k) \mathbf{v}_k \in \langle \mathcal{S} \rangle.\end{aligned}$$

Lineární obal $\langle \mathcal{S} \rangle$ je uzavřen vzhledem ke sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem, a tudíž tvoří vektorový podprostor v prostoru \mathcal{V} .

Poznámka. Lineární obal množiny $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ je v literatuře často označován jako vektorový prostor *generovaný* vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ a píše se $\langle \mathcal{S} \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$.

Pozorování. Snadno ověříme, že $\mathcal{S} \subset \langle \mathcal{S} \rangle$: Pro každý vektor $\mathbf{v}_i \in \mathcal{S}$; $i \in \{1, \dots, k\}$, totiž platí

$$\mathbf{v}_i = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_i \mathbf{v}_i + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k,$$

kde klademe $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_j = 1 \\ \alpha_j = 0 \end{array} \right\}$, je-li $\left\{ \begin{array}{l} j = i \\ j \neq i \end{array} \right\}$; $j = 1, \dots, k$. To znamená, že $\mathbf{v}_i \in \langle \mathcal{S} \rangle$.

Cvičení:

1. Buď $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ množina všech uspořádaných dvojic reálných čísel. Definujme sčítání uspořádaných dvojic a násobení uspořádané dvojice skalárem:

$$\begin{aligned}[x, y] + [r, s] &= [x + r, y + s]; \\ \alpha \odot [x, y] &= [0, 0].\end{aligned}$$

Tvoří množina \mathbb{R}^2 spolu s těmito operacemi vektorový prostor?

2. Ukažte, že množina $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ všech reálných čtvercových matic řádu 2 je vektorový prostor vzhledem ke sčítání matic a násobení matice skalárem ve smyslu *podkapitoly 1.2*.
3. Nechť je dán vektorový prostor \mathbb{R}^2 s operacemi sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem po složkách. Buď $\mathcal{W} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$. Je množina \mathcal{W} podprostorem vektorového prostoru \mathbb{R}^2 ?
4. Budiž dán vektorový prostor \mathbb{R}^2 jako v minulé úloze. Nechť $\mathcal{U} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y = x + 1\}$. Tvoří množina \mathcal{U} podprostor v \mathbb{R}^2 ?
5. Budiž dána soustava homogenních rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{o}$, kde $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{m \times n}$. Je množina všech řešení homogenní soustavy podprostorem vektorového prostoru \mathbb{R}^n ?
6. Dokažte, že množina \mathcal{F}_1 všech reálných funkcí f takových, že $f(0) = 1$, není podprostorem vektorového prostoru \mathcal{F} všech reálných funkcí.

Výsledky:

1. Ne. Neplatí axiom V8.
2. Množina $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ je uzavřena vzhledem k operacím sčítání a skalární násobení, které vyhovují axiomům V1 - V8 (viz vlastnosti maticových operací v *podkapitole 1.2*).
3. Ano.
4. Ne.
5. Ano.
6. Při řešení úloh 3 - 6 postupujte ve shodě s *příkladem 3* této podkapitoly.

2.2 Lineární kombinace, závislost a nezávislost vektorů. Báze vektorového prostoru, souřadnice vektoru, dimenze.

Říkáme, že vektor \mathbf{v} je *lineární kombinací* vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$, existují-li takové skaláry $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, že

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k.$$

Množina vektorů $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ je *lineárně nezávislá*, jestliže rovnice

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

má pouze triviální řešení, tj. $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$. Má-li rovnice (2.1) i jiné řešení než triviální, tzn. alespoň jeden ze skalárů $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ je nenulový, je množina \mathcal{S} *lineárně závislá*. Nekonečná množina vektorů $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots\}$ je lineárně nezávislá, je-li každá její konečná podmnožina lineárně nezávislá.

Množina nenulových vektorů $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ je lineárně závislá, právě když jeden z nich je lineární kombinací předcházejících.

Množina \mathcal{E} vektorů vektorového prostoru \mathcal{V} se nazývá *báze vektorového prostoru \mathcal{V}* , jestliže platí:

- \mathcal{E} je lineárně nezávislá.
- Každý vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů množiny \mathcal{E} .

Je-li $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ uspořádaná báze vektorového prostoru \mathcal{V} , pak každý vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ se dá jednoznačně napsat ve tvaru

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + \dots + v_n \mathbf{e}_n. \quad (2.2)$$

Čísla v_1, \dots, v_n z rovnice (2.2) nazýváme *souřadnice vektoru \mathbf{v}* vzhledem k uspořádané bázi \mathcal{E} a zapisujeme je někdy jako *sloupcový aritmetický vektor* $[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = [v_1, \dots, v_n]^T$.

Počet vektorů báze udává *dimenzi* vektorového prostoru. Je-li báze *konečná (nekonečná)*, mluvíme o *konečněrozměrném (nekonečněrozměrném)* vektorovém prostoru.

Příklad 1. Vyjádřete vektor $\mathbf{u} = [1, 3, 1]$ jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{u}_1 = [2, 1, 1]$, $\mathbf{u}_2 = [1, 1, 2]$ a $\mathbf{u}_3 = [0, 1, 1]$ vektorového prostoru \mathbb{R}^3 .

Řešení: Hledáme takové skaláry $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, aby platilo

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}.$$

Po dosazení za jednotlivé vektory obdržíme porovnáním příslušných složek soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 3 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 1, \end{aligned}$$

jež má řešení $\alpha_1 = \frac{3}{2}$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = \frac{7}{2}$, tedy $\mathbf{u} = \frac{3}{2} \mathbf{u}_1 + (-2) \mathbf{u}_2 + \frac{7}{2} \mathbf{u}_3$.

Příklad 2 Ukažte, že polynomy $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x + 1$, $p_3(x) = (x + 1)^2$ jsou lineárně nezávislé a napište polynom $p(x) = 3x^2 - 4x + 5$ jako lineární kombinaci polynomů p_1, p_2, p_3 .

Řešení: Sestavíme rovnici (2.1) pro zadané polynomy. Funkci nulového vektoru plní polynom $o(x) = 0x^2 + 0x + 0$, jež pro každé $x \in \mathbb{R}$ nabývá hodnoty 0. Platí

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = 0,$$

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2(x+1) + \alpha_3(x^2+2x+1) = 0. \quad (2.3)$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x^0: \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ x^1: \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ x^2: \alpha_3 &= 0, \end{aligned}$$

jež má evidentně pouze triviální řešení $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, tj. polynomy jsou lineárně nezávislé. K dořešení úlohy stačí v rovnici (2.3) uvést na pravé straně polynom $p(x)$ a vyřešit soustavu

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 5 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 &= -4 \\ \alpha_3 &= 3. \end{aligned}$$

Odtud zpětnou substitucí máme $\alpha_3 = 3$, $\alpha_2 = -10$, $\alpha_1 = 12$, takže $p(x) = 12 - 10(x+1) + 3(x+1)^2$.

Poznámka 1. Polynomy $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x+1$, $p_3(x) = (x+1)^2$ tvoří bázi vektorového prostoru \mathcal{P}_2 všech polynomů stupně nejvýše 2. Prostor \mathcal{P}_2 má *standardní bázi* $\mathcal{P} = (1, x, x^2)$, jeho dimenze je tedy 3, a tudíž libovolnou trojici nezávislých polynomů stupně nejvýše 2 lze pokládat za jeho bázi, neboť počet vektorů kterékoliv báze daného vektorového prostoru je vždy stejný.

Přejdeme-li k souřadnicím vektoru, můžeme psát, že polynom $p(x)$ má v uspořádaných bázích $\mathcal{P} = (1, x, x^2)$, resp. $\tilde{\mathcal{P}} = (1, x+1, (x+1)^2)$ souřadnice 5, -4, 3, resp. 12, -10, 3. Píšeme

$$[p(x)]_{\mathcal{P}} = [5, -4, 3]^T, \text{ resp. } [p(x)]_{\tilde{\mathcal{P}}} = [12, -10, 3]^T.$$

Poznámka 2. Podrobné řešení soustav rovnic v předešlých úlohách nechávám na čtenáři, nicméně podívejme se na příslušné rozšířené matice:

$$\text{Příklad 1: } [\mathbf{A}_1 | \mathbf{b}_1] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right]. \quad \text{Příklad 2: } [\mathbf{A}_2 | \mathbf{b}_2] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right].$$

Sloupce matice $[\mathbf{A}_1 | \mathbf{b}_1]$ tvoří souřadnice vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}$ vzhledem ke *standardní bázi* $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ($\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]$, $\mathbf{e}_2 = [0, 1, 0]$, $\mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]$) vektorového prostoru \mathbb{R}^3 . Stejně tak sloupce matice $[\mathbf{A}_2 | \mathbf{b}_2]$ tvoří souřadnice zadaných polynomů vzhledem ke standardní bázi $\mathcal{P} = (1, x, x^2)$ vektorového prostoru \mathcal{P}_2 . Je tedy:

$$1. [\mathbf{A}_1 | \mathbf{b}_1] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} | & | & | & | \\ [\mathbf{u}_1]_{\mathcal{E}} & [\mathbf{u}_2]_{\mathcal{E}} & [\mathbf{u}_3]_{\mathcal{E}} & [\mathbf{u}]_{\mathcal{E}} \\ | & | & | & | \end{array} \right], \quad 2. [\mathbf{A}_2 | \mathbf{b}_2] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} | & | & | & | \\ [p_1]_{\mathcal{P}} & [p_2]_{\mathcal{P}} & [p_3]_{\mathcal{P}} & [p]_{\mathcal{P}} \\ | & | & | & | \end{array} \right].$$

Příklad 3. Najděte bázi prostoru $\mathcal{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \wedge x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$. Zdůvodněte, že se jedná o bázi.

Řešení: Vektorový prostor \mathcal{W} je vlastně množinou všech řešení homogenní soustavy

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Soustava má řešení: $x_1 = 0$, $x_2 = t$, $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Odtud $\mathcal{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = t[0, 1, 1], t \in \mathbb{R}\}$. Vektorový prostor \mathcal{W} je tak lineárním obalem množiny $\mathcal{S} = \{[0, 1, 1]\}$, píšeme $\mathcal{W} = \langle [0, 1, 1] \rangle$. Množina \mathcal{S} je navíc lineárně nezávislá, neboť nenulový vektor $\mathbf{u} = [0, 1, 1]$ je nutně lineárně nezávislý, a tedy množina \mathcal{S} je báze prostoru \mathcal{W} .

Příklad 4. Určete dimenzi vektorového prostoru $\mathcal{U} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle$, je-li $\mathbf{a} = [1, 1, 1]$, $\mathbf{b} = [1, 2, 0]$, $\mathbf{c} = [1, 0, 1]$, $\mathbf{d} = [-1, 5, 4]$.

Řešení: Vektorový prostor \mathcal{U} je lineárním obalem množiny $\mathcal{S} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$. Víme, že nenulové vektory jsou lineárně závislé právě tehdy, když jeden z nich je lineární kombinací předcházejících. Množiny $\mathcal{S}_1 = \{\mathbf{a}\}$ a $\mathcal{S}_2 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ jsou zřejmě lineárně nezávislé. Vektor $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ a neplatí $\mathbf{b} = k \cdot \mathbf{a}$ pro žádný skalár $k \in \mathbb{R}$. Také množina $\mathcal{S}_3 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ je lineárně nezávislá, neboť ani vektor \mathbf{c} není lineární kombinací vektorů \mathbf{a} , \mathbf{b} . Rovnice

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

nemá, jak se dá snadno zjistit řešení. To poznáme jednak tak, že odpovídající soustava

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 1 \\ \alpha + 2\beta &= 0 \\ \alpha &= 1 \end{aligned}$$

nemá řešení, nebo také tak, že porovnáme hodnoty matice \mathbf{A} a matice rozšířené $[\mathbf{A} \mid \mathbf{c}]$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 2 \\ 1, & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_1} \sim \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \\ 0, & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{+r_2} \sim \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \\ 0, & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow h(\mathbf{A}) = 2;$$

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{c}] = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 2, & 0 \\ 1, & 0, & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_1} \sim \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 0, & 1, & -1 \\ 0, & -1, & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{+r_2} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 0, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow h([\mathbf{A} \mid \mathbf{c}]) = 3.$$

Nakonec zbývá ověřit, je-li vektor \mathbf{d} lineární kombinací vektorů \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} :

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{d}. \quad (2.4)$$

Rovnice (2.4) je jednoznačně řešitelná, neboť tentokrát hodnota matice soustavy, která jí odpovídá, se rovná hodnotě matice rozšířené a sloupce matice soustavy jsou navíc lineárně nezávislé:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 2, & 0 \\ 1, & 0, & 1 \end{bmatrix}, h(\tilde{\mathbf{A}}) = 3; [\tilde{\mathbf{A}} \mid \mathbf{d}] = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1, & -1 \\ 1, & 2, & 0, & 5 \\ 1, & 0, & 1, & 4 \end{bmatrix}, h([\tilde{\mathbf{A}} \mid \mathbf{d}]) = 3.$$

Platí $\alpha = 15$, $\beta = -5$, $\gamma = -11$, tj. $\mathbf{d} = 15\mathbf{a} - 5\mathbf{b} - 11\mathbf{c}$, takže množina $\mathcal{S} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ je lineárně závislá. Vektor \mathbf{d} můžeme vyškrtnout, ježto každý vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ se dá vyjádřit jednoduše jen jako lineární kombinace vektorů \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} :

$$\mathcal{U} \ni \mathbf{u} = u_1 \mathbf{a} + u_2 \mathbf{b} + u_3 \mathbf{c} + u_4 \mathbf{d} = (u_1 + 15u_4) \mathbf{a} + (u_2 - 5u_4) \mathbf{b} + (u_3 - 11u_4) \mathbf{c}.$$

Odtud $\mathcal{U} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$, a tedy $\dim(\mathcal{U}) = 3$.

Poznámka 3. Vektorový prostor \mathcal{U} je podprostorem prostoru \mathbb{R}^3 , jehož dimenze je 3. Vektor \mathbf{d} už tedy nutně musel být lineární kombinací vektorů \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} . Úlohu jsme mohli samozřejmě vyřešit přímo určením *hodnoty* matice sestavené po sloupcích z vektorů \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} , tj. nalezením maximálního počtu lineárně nezávislých sloupců matice

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc} | & | & | & | \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ | & | & | & | \end{array} \right]:$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1, & 1, & 1, & -1 \\ 1, & 2, & 0, & 5 \\ 1, & 0, & 1, & 4 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc} 1, & 1, & 1, & -1 \\ 0, & 1, & -1, & 6 \\ 0, & 0, & -1, & 11 \end{array} \right] \Rightarrow h(\mathbf{A}) = 3 \Rightarrow \dim(\mathcal{U}) = 3.$$

Cvičení:

1. Polynom $p(x) = x^3 + 5x^2 + 10x + 11$ napište jako lineární kombinaci polynomů p_1, p_2, p_3, p_4 :
 $p_1(x) = 1, p_2(x) = x + 2, p_3(x) = (x + 2)^2, p_4(x) = (x + 2)^3$.
2. Ukažte, že polynomy $p_1(x) = x^2 - 1, p_2(x) = x^2 + 1$ a $p_3(x) = 2x - 1$ tvoří uspořádanou bázi prostoru $\mathcal{U} = \langle x^2 - 1, x^2 + 1, 3, 2x - 1, x \rangle$ a určete souřadnice polynomu $(x - 3)^2$ vzhledem k této bázi.
3. Je dána standardní báze $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ prostoru \mathbb{R}^3 . Dokažte, že vektory $\mathbf{f}_1 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \mathbf{f}_3 = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ tvoří také bázi prostoru \mathbb{R}^3 a vypočítejte souřadnice vektoru $\mathbf{u} = 7\mathbf{e}_1 + 14\mathbf{e}_2 + 21\mathbf{e}_3$ vzhledem k uspořádané bázi $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$.
4. Určete dimenzi podprostoru \mathcal{W} všech řešení homogenní soustavy

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

5. Buď $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vektorový prostor všech komplexních matic stupně 2. Jaká je dimenze prostoru $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, je-li $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ reálný, respektive komplexní vektorový prostor?

Řešení:

1. $p(x) = 3 + 2(x + 2) - (x + 2)^2 + (x + 2)^3$.
2. $\left[(x - 3)^2 \right]_{\tilde{\mathcal{P}}} = \left[-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, -3 \right]^T$, kde $\tilde{\mathcal{P}} = (x^2 - 1, x^2 + 1, 2x - 1)$.
3. $[\mathbf{u}]_{\mathcal{F}} = [12, 5, 11]^T$.
4. $\mathcal{W} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{x} = r[-1, 0, 1, 0] + s[3, 1, 0, 1]; r, s \in \mathbb{R} \}$, $\dim(\mathcal{W}) = 2$.
5. $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{C})) = 8$, respektive $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{C})) = 4$.
 Návod: rozmyslete si, které čtvercové matice řádu 2 tvoří bázi $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ v případě, že tato množina je reálným, respektive komplexním vektorovým prostorem.

Kapitola 3

Lineární a multilineární zobrazení

3.1 Lineární zobrazení

Zobrazení \mathcal{A} vektorového prostoru \mathcal{U} do vektorového prostoru \mathcal{V} se nazývá *lineární*, jestliže pro libovolné vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}$ a skalár α platí:

$$\mathcal{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathcal{A}(\mathbf{u}) + \mathcal{A}(\mathbf{v}); \quad (3.1)$$

$$\mathcal{A}(\alpha \mathbf{u}) = \alpha \mathcal{A}(\mathbf{u}). \quad (3.2)$$

Lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ se nazývá *lineární transformace*. *Lineární formou (lineárním funkcionálem)* nazýváme lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$. Množinu všech lineárních zobrazení vektorového prostoru \mathcal{U} do vektorového prostoru \mathcal{V} označujeme $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$.

Nulovým prostorem (jádrem) zobrazení $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ rozumíme *množinu*

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{\mathbf{u} \in \mathcal{U} : \mathcal{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{o} \in \mathcal{V}\}. \quad (3.3)$$

Oborem hodnot zobrazení $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ rozumíme množinu

$$\mathcal{H}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \mathcal{U}\}. \quad (3.4)$$

Jádro $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ je podprostorem vektorového prostoru \mathcal{U} , jeho dimenze se označuje $d(\mathcal{A})$ a nazývá *defekt zobrazení* \mathcal{A} . Obor hodnot $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ tvoří zase podprostor prostoru \mathcal{V} , jeho dimenzi označujeme $h(\mathcal{A})$ a nazýváme *hodnost zobrazení* \mathcal{A} . Platí

$$d(\mathcal{A}) + h(\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{U}). \quad (3.5)$$

Příklad 1. Ukažte, že zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je lineární, je-li

$$\mathcal{A}([x_1, x_2, x_3]) = [x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3].$$

Řešení: Nechtě $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]$ jsou libovolné vektory z \mathbb{R}^3 a α libovolný skalár. Potom $\mathbf{x} + \mathbf{y} = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3]$, $\alpha \mathbf{x} = [\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3]$. Zbývá ověřit, má-li zobrazení \mathcal{A} vlastnosti (3.1) a (3.2):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= [(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2), (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2), (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3)] \\ &= [(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2), (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3)] \\ &= [x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3] + [y_1 - y_2, y_1 + y_2, y_1 + y_2 + y_3] \\ &= \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\alpha \mathbf{x}) &= [\alpha x_1 - \alpha x_2, \alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3] \\ &= [\alpha(x_1 - x_2), \alpha(x_1 + x_2), \alpha(x_1 + x_2 + x_3)] \\ &= \alpha[x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3] \\ &= \alpha \mathcal{A}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Zobrazení \mathcal{A} má požadované vlastnosti, je tedy lineární.

Příklad 2. Zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je pro každé $\mathbf{u} = [u_1, u_2] \in \mathbb{R}^2$ definované vztahem

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}) = [u_1 + u_2, u_2^2].$$

Je zobrazení \mathcal{A} lineární?

Řešení: V tomto případě zobrazení \mathcal{A} není lineární. Pro libovolné vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ totiž platí:

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2], \mathbf{v} = [v_1, v_2], \mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2], \mathcal{A}(\mathbf{v}) = [v_1 + v_2, v_2^2]. \text{ Odtud}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= [(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2), (u_2 + v_2)^2], \\ \mathcal{A}(\mathbf{u}) + \mathcal{A}(\mathbf{v}) &= [(u_1 + u_2) + (v_1 + v_2), u_2^2 + v_2^2], \\ \mathcal{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &\neq \mathcal{A}(\mathbf{u}) + \mathcal{A}(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Příklad 3. Nechť $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{m \times n}$ je reálná matice a necht' $\mathbb{R}^{n,1}, \mathbb{R}^{m,1}$ jsou vektorové prostory všech sloupcových aritmetických vektorů dimenze n, m . Dokažte, že zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{n,1} \rightarrow \mathbb{R}^{m,1}$ definované předpisem

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^{n,1} \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax} \in \mathbb{R}^{m,1}$$

je lineární.

Řešení: S využitím vlastností maticových operací (sekce 1.2) snadno ukážeme, že zobrazení \mathcal{A} splňuje pro každé vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n,1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ axiomy (3.1) a (3.2), takže je lineární:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{Ay} = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y}), \\ \mathcal{A}(\alpha\mathbf{x}) &= \mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{Ax}) = \alpha\mathcal{A}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Příklad 4. Buď $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineární zobrazení, pro které platí:

$$\mathcal{A}(\mathbf{f}_1) = [1, 2], \mathcal{A}(\mathbf{f}_2) = [2, 3], \mathcal{A}(\mathbf{f}_3) = [1, 1],$$

kde $\mathbf{f}_1 = [2, 3, -1]$, $\mathbf{f}_2 = [0, 1, 2]$, $\mathbf{f}_3 = [-1, 1, 1]$. Nalezněte všechny vektory $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, které se zobrazí na vektor $\mathbf{v} = [-3, 2]$.

Řešení: Vektory $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ tvoří bázi prostoru \mathbb{R}^3 , neboť jsou lineárně nezávislé. Lineární zobrazení \mathcal{A} je tedy určeno obrazy báze. Je-li totiž $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ libovolný vektor, pak zřejmě

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2 + \alpha_3\mathbf{f}_3. \quad (3.6)$$

Odtud pro jeho obraz v důsledku (3.1) a (3.2) dostaneme

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \alpha_1\mathcal{A}(\mathbf{f}_1) + \alpha_2\mathcal{A}(\mathbf{f}_2) + \alpha_3\mathcal{A}(\mathbf{f}_3) : \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2 + \alpha_3\mathbf{f}_3) &= \mathcal{A}((\alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2) + \alpha_3\mathbf{f}_3) \\ &= \mathcal{A}(\alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2) + \mathcal{A}(\alpha_3\mathbf{f}_3) \\ &= \mathcal{A}(\alpha_1\mathbf{f}_1) + \mathcal{A}(\alpha_2\mathbf{f}_2) + \mathcal{A}(\alpha_3\mathbf{f}_3) \\ &= \alpha_1\mathcal{A}(\mathbf{f}_1) + \alpha_2\mathcal{A}(\mathbf{f}_2) + \alpha_3\mathcal{A}(\mathbf{f}_3). \end{aligned}$$

Nejprve vyřešíme rovnici (3.7):

$$[-3, 2] = \alpha_1[1, 2] + \alpha_2[2, 3] + \alpha_3[1, 1],$$

tj. soustavu

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= -3 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 &= 2. \end{aligned}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení: $\alpha_1 = 13 + s$, $\alpha_2 = -8 - s$, $\alpha_3 = s$; $s \in \mathbb{R}$. Odtud z rovnice (3.6) obdržíme

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (13 + s) [2, 3, -1] + (-8 - s) [0, 1, 2] + s [-1, 1, 1] \\ &= [26 + s, 31 + 3s, -29 - 2s] \\ &= [s, 3s, -2s] + [26, 31, -29]. \end{aligned}$$

Hledaná množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathcal{A}(\mathbf{x}) = [-3, 2]\}$ je tvaru

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = s [1, 3, -2] + [26, 31, -29], s \in \mathbb{R}\}. \quad (3.8)$$

Příklad 5. Najděte jádro a obor hodnot zobrazení \mathcal{A} z předešlé úlohy.

Řešení: Úloha nalézt jádro lineárního zobrazení \mathcal{A} je analogií předešlé úlohy. Místo s vektorem $\mathbf{v} = [-3, 2]$ se pracuje s nulovým vektorem $\mathbf{o} = [0, 0]$. Jádro zobrazení \mathcal{A} však můžeme najít jednodušeji. Uvážíme-li, že $\mathcal{A}[26, 31, -29] = [-3, 2]$ (v (3.8) položíme $s = 0$), dostaneme

$$\mathcal{A}(s [1, 3, -2] + [26, 31, -29]) = [-3, 2],$$

resp.

$$\mathcal{A}(s [1, 3, -2]) + \mathcal{A}([26, 31, -29]) = [-3, 2],$$

odkud nutně $\mathcal{A}(s [1, 3, -2]) = [0, 0]$. Platí tedy

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = s [1, 3, -2], s \in \mathbb{R}\} = \langle [1, 3, -2] \rangle.$$

Obor hodnot $\mathcal{H}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\} = \{\alpha_1 [1, 2] + \alpha_2 [2, 3] + \alpha_3 [1, 1] : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$. Jinak řečeno $\mathcal{H}(\mathcal{A}) = \langle [1, 2], [2, 3], [1, 1] \rangle$. Poslední vektor je lineární kombinací předcházejících dvou vektorů: $-1 \cdot [1, 2] + 1 \cdot [2, 3] = [1, 1]$. Po jeho vyškrtnutí tak dostáváme, že obor hodnot

$$\mathcal{H}(\mathcal{A}) = \langle [1, 2], [2, 3] \rangle.$$

Nakonec můžeme ještě potvrdit platnost vzorce (3.5). Má platit

$$d(\mathcal{A}) + h(\mathcal{A}) = \dim(\mathbb{R}^3).$$

A skutečně

$$\dim(\mathcal{N}(\mathcal{A})) + \dim(\mathcal{H}(\mathcal{A})) = 1 + 2 = 3.$$

Příklad 6. Nechť \mathcal{U} , \mathcal{V} a \mathcal{W} jsou vektorové prostory a necht' $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Dokažte, že platí

$$\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{C}. \quad (3.9)$$

Řešení: Vzorec (3.9) je obdobou distributivního zákona algebry matic: $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C}$. Máme ukázat, že složení zobrazení \mathcal{A} a součtu zobrazení $\mathcal{B} + \mathcal{C}$ se rovná součtu složených zobrazení. Připomeňme si, že *součet zobrazení* \mathcal{B}, \mathcal{C} je definován předpisem $(\mathcal{B} + \mathcal{C})(\mathbf{u}) = \mathcal{B}(\mathbf{u}) + \mathcal{C}(\mathbf{u})$ a že *složené zobrazení (součin zobrazení)* $\mathcal{A}\mathcal{D} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}$ ($\mathcal{D} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$) je definováno předpisem $(\mathcal{A}\mathcal{D})(\mathbf{u}) = \mathcal{A}(\mathcal{D}(\mathbf{u}))$.

Buď $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ libovolný vektor. Platí:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}))(\mathbf{u}) &= \mathcal{A}((\mathcal{B} + \mathcal{C})(\mathbf{u})) \\ &= \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{u}) + \mathcal{C}(\mathbf{u})) \\ &= \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{u})) + \mathcal{A}(\mathcal{C}(\mathbf{u})) \\ &= (\mathcal{A}\mathcal{B})(\mathbf{u}) + (\mathcal{A}\mathcal{C})(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Rovnost (3.9) je dokázána.

Poznámka. Musíme dávat pozor, v jakém pořadí vyhodnocujeme složené zobrazení. V kterém kroku jsme využili, že zobrazení \mathcal{A} je lineární?

Cvičení:

1. Je zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ z příkladu 1 (podkapitoly 3.1) prosté?
2. Dokažte, že zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, pro které platí

$$f([x, y, z]) = [x - 2y, y + 3z],$$

je lineární. Určete jeho jádro (označuje se také $\text{Ker } f$) a obor hodnot.

3. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ takové, že

$$\begin{aligned}\mathcal{A}([2, -3]) &= [2, -1, 3], \\ \mathcal{A}([-1, 1]) &= [-3, 2, 0].\end{aligned}$$

Jak se zobrazí vektor $\mathbf{x} = [7, -9]$?

4. Najděte jádro lineární formy $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, je-li

$$\mathcal{A}([x_1, x_2, x_3]) = 2x_1 - x_2 + 3x_3.$$

Určete $d(\mathcal{A})$ a $h(\mathcal{A})$.

5. Ukažte, že zobrazení

$$\mathcal{A} : \mathbb{C} \ni a + bi \mapsto a - bi \in \mathbb{C}$$

je (není) lineární, jestliže \mathbb{C} je reálný (komplexní) vektorový prostor.

6. Pro lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a $\mathcal{B} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ platí

$$\begin{aligned}\mathcal{A}([2, 1]) &= -1, \mathcal{A}([1, -2]) = 3; \\ \mathcal{B}([2, 3]) &= [0, 1], \mathcal{B}([1, -2]) = [2, 1].\end{aligned}$$

Vypočtěte $(\mathcal{A}\mathcal{B})([7, 0])$.

Řešení:

1. Ano: $\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{\mathbf{o}\}$.
2. $\text{Ker } f = \langle [-6, -3, 1] \rangle$; $\mathcal{H}(f) = \langle [1, 0], [-2, 1], \widehat{[0, 3]} \rangle = \langle [1, 0], [-2, 1] \rangle$.
3. $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = [13, -8, 6]$.
4. $\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \langle [1, 2, 0], [-3, 0, 2] \rangle$; $d(\mathcal{A}) = 2$, $h(\mathcal{A}) = 1$.
5. Zobrazení \mathcal{A} nemá vlastnost (3.2), je-li \mathbb{C} komplexní vektorový prostor.
6. $(\mathcal{A}\mathcal{B})([7, 0]) = -\frac{29}{5}$.

3.2 Lineární zobrazení a matice

Matice zobrazení $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ vzhledem k uspořádaným bázím $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m)$ vektorových prostorů \mathcal{U} , \mathcal{V} nazýváme matici

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} & & & \\ \hline [\mathcal{A}(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{F}} & [\mathcal{A}(\mathbf{e}_2)]_{\mathcal{F}} & \cdots & [\mathcal{A}(\mathbf{e}_n)]_{\mathcal{F}} \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \right]. \quad (3.10)$$

Jinými slovy, obrazy vektorů báze $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů báze $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{e}_1) &= a_{11}\mathbf{f}_1 + a_{21}\mathbf{f}_2 + \cdots + a_{m1}\mathbf{f}_m \\ \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) &= a_{12}\mathbf{f}_1 + a_{22}\mathbf{f}_2 + \cdots + a_{m2}\mathbf{f}_m \\ &\vdots \\ \mathcal{A}(\mathbf{e}_n) &= a_{1n}\mathbf{f}_1 + a_{2n}\mathbf{f}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{f}_m \end{aligned}$$

a příslušné souřadnice napíšeme jako *sloupce* matice $[\mathcal{A}]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}$:

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

V případě, že $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ a $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, budeme hovořit o *matice lineární transformace* vzhledem k bázi \mathcal{E} a psát stručně $[\mathcal{A}]_{\mathcal{E}}$ místo $[\mathcal{A}]_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}$.

Jsou-li \mathcal{U} , \mathcal{V} vektorové prostory s bázemi $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m)$ a $[\mathcal{A}]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}$ matice lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ vzhledem k těmto bázím, vypočteme *souřadnice obrazu* vektoru $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ podle vzorce

$$[\mathcal{A}(\mathbf{x})]_{\mathcal{F}} = [\mathcal{A}]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}. \quad (3.11)$$

Příklad 1 Nechť $\mathbb{R}^{n,1}$, $\mathbb{R}^{m,1}$ jsou vektorové prostory všech sloupcových aritmetických vektorů dimenze n , m a nechť $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{n,1} \rightarrow \mathbb{R}^{m,1}$ je libovolné lineární zobrazení. Ukažte, že existuje taková matice $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{m \times n}$, že pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$ platí

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (3.12)$$

Řešení: Lineární zobrazení na vektorovém prostoru konečné dimenze je jednoznačně určeno obrazy jakékoliv báze. Zvolme tedy standardní bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^{n,1} : \mathcal{S} = (\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}, \mathbf{s}_2^{\mathbf{I}}, \dots, \mathbf{s}_n^{\mathbf{I}})$, kde $\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}} = [1, 0, \dots, 0]^T$, $\mathbf{s}_2^{\mathbf{I}} = [0, 1, \dots, 0]^T$, \dots , $\mathbf{s}_n^{\mathbf{I}} = [0, 0, \dots, 1]^T$, a označme si její obrazy například

$$\mathcal{A}(\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}(\mathbf{s}_2^{\mathbf{I}}) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \mathcal{A}(\mathbf{s}_n^{\mathbf{I}}) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Buď nyní $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^{n,1}$ libovolný vektor. Potom platí

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}} + x_2\mathbf{s}_2^{\mathbf{I}} + \cdots + x_n\mathbf{s}_n^{\mathbf{I}},$$

a následně

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathbf{x}) &= x_1 \mathcal{A}(\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}) + x_2 \mathcal{A}(\mathbf{s}_2^{\mathbf{I}}) + \cdots + x_n \mathcal{A}(\mathbf{s}_n^{\mathbf{I}}) \\
&= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Výsledný vektor v (3.13) je součinem matice $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{m \times n}$ a vektoru $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, čímž je rovnost (3.12) dokázána.

Příklad 2. Buďte $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ uspořádané báze vektorového prostoru \mathcal{U} . Nechť $[\mathcal{A}]_{\mathcal{E}}$ je matice lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ vzhledem k uspořádané bázi \mathcal{E} a nechť $[\mathcal{A}]_{\mathcal{F}}$ je matice tohoto zobrazení vzhledem k uspořádané bázi \mathcal{F} . Dokažte, že platí

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{F}} = \mathbf{P}^{-1} [\mathcal{A}]_{\mathcal{E}} \mathbf{P}, \tag{3.14}$$

kde \mathbf{P} je matice přechodu od uspořádané báze \mathcal{E} k uspořádané bázi \mathcal{F} :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ [\mathbf{f}_1]_{\mathcal{E}} & [\mathbf{f}_2]_{\mathcal{E}} & \cdots & [\mathbf{f}_n]_{\mathcal{E}} \\ | & | & & | \end{bmatrix}, \tag{3.15}$$

tj. matice, jejíž **sloupce** tvoří souřadnice vektorů báze \mathcal{F} vzhledem k bázi \mathcal{E} .

Řešení: Pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ platí

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n,$$

resp.

$$\mathbf{x} = \tilde{x}_1 \mathbf{f}_1 + \tilde{x}_2 \mathbf{f}_2 + \cdots + \tilde{x}_n \mathbf{f}_n. \tag{3.16}$$

Rovnice (3.16) je po dosazení souřadnic ekvivalentní s rovnicí

$$\begin{aligned}
[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} &= \tilde{x}_1 [\mathbf{f}_1]_{\mathcal{E}} + \tilde{x}_2 [\mathbf{f}_2]_{\mathcal{E}} + \cdots + \tilde{x}_n [\mathbf{f}_n]_{\mathcal{E}} \\
&= \begin{bmatrix} | & | & & | \\ [\mathbf{f}_1]_{\mathcal{E}} & [\mathbf{f}_2]_{\mathcal{E}} & \cdots & [\mathbf{f}_n]_{\mathcal{E}} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{P} [\mathbf{x}]_{\mathcal{F}}.
\end{aligned}$$

Matice \mathbf{P} je regulární, takže pro souřadnice vektoru \mathbf{x} v bázích \mathcal{E} a \mathcal{F} dostáváme:

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \mathbf{P} [\mathbf{x}]_{\mathcal{F}}, \tag{3.17}$$

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{F}} = \mathbf{P}^{-1} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}. \tag{3.18}$$

Přejdeme teď k našemu důkazu. Vzorec (3.11) umožňuje vypočítat souřadnice obrazu vektoru pomocí matice lineárního zobrazení. Je-li $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ a $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, můžeme jej uvést v jednom z těchto tvarů:

$$[\mathcal{A}(\mathbf{x})]_{\mathcal{E}} = [\mathcal{A}]_{\mathcal{E}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}, \quad (3.19)$$

$$[\mathcal{A}(\mathbf{x})]_{\mathcal{F}} = [\mathcal{A}]_{\mathcal{F}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{F}}. \quad (3.20)$$

S přihlédnutím k (3.17) položíme v rovnici (3.19) $[\mathcal{A}(\mathbf{x})]_{\mathcal{E}} = \mathbf{P} [\mathcal{A}(\mathbf{x})]_{\mathcal{F}}$, $[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \mathbf{P} [\mathbf{x}]_{\mathcal{F}}$, takže dostane tvar

$$\mathbf{P} [\mathcal{A}(\mathbf{x})]_{\mathcal{F}} = [\mathcal{A}]_{\mathcal{E}} \mathbf{P} [\mathbf{x}]_{\mathcal{F}},$$

neboli

$$[\mathcal{A}(\mathbf{x})]_{\mathcal{F}} = (\mathbf{P}^{-1} [\mathcal{A}]_{\mathcal{E}} \mathbf{P}) [\mathbf{x}]_{\mathcal{F}}. \quad (3.21)$$

Ze vztahů (3.20) a (3.21) už pak vyplývá platnost vzorce (3.14).

Příklad 3. Určete matici lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, pro které platí

$$\begin{aligned} \mathcal{A}([2, -3]) &= [2, -1, 3], \\ \mathcal{A}([-1, 1]) &= [-3, 2, 0], \end{aligned}$$

vzhledem ke standardním bázím vektorových prostorů \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 a použijte ji k určení obrazu vektoru $\mathbf{x} = [7, -9]$.

Řešení: Sestavíme matici (3.10) v bázích $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ a $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, kde $\mathbf{e}_1 = [1, 0]$, $\mathbf{e}_2 = [0, 1]$; $\mathbf{f}_1 = [1, 0, 0]$, $\mathbf{f}_2 = [0, 1, 0]$, $\mathbf{f}_3 = [0, 0, 1]$. Potřebné obrazy vektorů $\mathbf{e}_1 = [1, 0]$, $\mathbf{e}_2 = [0, 1]$ najdeme způsobem, který jsme už tady jednou použili, takže mu čtenář jistě porozumí i bez podrobného komentáře. Označme $\mathbf{u} = [2, -3]$, $\mathbf{v} = [-1, 1]$. Platí

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v}, \\ \mathbf{e}_2 &= \beta_1 \mathbf{u} + \beta_2 \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Obě rovnice vedou k soustavám lineárních rovnic, jež vyřešíme pomocí jedné rozšířené matice:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array} \right] \Rightarrow \alpha_1 = -1, \alpha_2 = -3; \beta_1 = -1, \beta_2 = -2.$$

Odtud

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{e}_1) &= -1\mathcal{A}(\mathbf{u}) + (-3)\mathcal{A}(\mathbf{v}), \\ \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) &= -1\mathcal{A}(\mathbf{u}) + (-2)\mathcal{A}(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

tj. $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = [7, -5, -3]$, $\mathcal{A}(\mathbf{e}_2) = [4, -3, -3]$. Hledaná matice je tedy

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} &= \left[\begin{array}{c|c} [\mathcal{A}(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{F}} & [\mathcal{A}(\mathbf{e}_2)]_{\mathcal{F}} \\ \hline \end{array} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -5 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Užitím vzorce (3.11) získáme souřadnice obrazu vektoru \mathbf{x} v bázi \mathcal{F} a tím prakticky i obraz vektoru \mathbf{x} :

$$[\mathcal{A}(\mathbf{x})]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -5 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}, \text{ a tudíž } \mathcal{A}(\mathbf{x}) = [13, -8, 6].$$

Poznámka. V úlohách tohoto typu studenti často chybují v tom, že vytvoří matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & -3 \\ -1, & 2 \\ 3, & 0 \end{bmatrix},$$

kteřou pak vydávají za matici zadaného lineárního zobrazení vzhledem ke standardním bázím. Ve skutečnosti však vytvořili matici daného zobrazení vzhledem k bázím $\mathcal{X} = ([2, -3], [-1, 1])$ a $\mathcal{F} = ([1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1])$, z nichž pouze báze \mathcal{F} je standardní. Nebude tedy na škodu, když si znovu prostudujete, jak sestavíme správně matici lineárního zobrazení vzhledem k daným bázím. Pro jistotu věnujme matici lineárního zobrazení ještě dvě úlohy.

Příklad 4. Lineární transformace $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je definována předpisem

$$\mathcal{A}([x, y, z]) = [y, x, z].$$

Najděte její matici vzhledem k bázi $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, kde $\mathbf{f}_1 = [1, 1, 0]$, $\mathbf{f}_2 = [0, 1, 1]$, $\mathbf{f}_3 = [1, 0, 1]$.

Řešení: Zobrazení \mathcal{A} zaměňuje první a druhou složku vektoru, takže $\mathcal{A}(\mathbf{f}_1) = \mathbf{f}_1$, $\mathcal{A}(\mathbf{f}_2) = \mathbf{f}_3$, $\mathcal{A}(\mathbf{f}_3) = \mathbf{f}_2$. Hledanou matici označíme stručně $[\mathcal{A}]_{\mathcal{F}}$ místo $[\mathcal{A}]_{\mathcal{F}, \mathcal{F}}$. Druhé označení však vhodně připomíná jak ji máme sestavit. Sloupce matice $[\mathcal{A}]_{\mathcal{F}}$ budou tvořit souřadnice obrazů vektorů báze \mathcal{F} vzhledem k bázi \mathcal{F} . Ježto

$$\mathcal{A}(\mathbf{f}_1) = 1\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2 + 0\mathbf{f}_3, \mathcal{A}(\mathbf{f}_2) = 0\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2 + 1\mathbf{f}_3, \mathcal{A}(\mathbf{f}_3) = 0\mathbf{f}_1 + 1\mathbf{f}_2 + 0\mathbf{f}_3,$$

dostaneme

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [\mathcal{A}(\mathbf{f}_1)]_{\mathcal{F}} & [\mathcal{A}(\mathbf{f}_2)]_{\mathcal{F}} & [\mathcal{A}(\mathbf{f}_3)]_{\mathcal{F}} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [\mathbf{f}_1]_{\mathcal{F}} & [\mathbf{f}_3]_{\mathcal{F}} & [\mathbf{f}_2]_{\mathcal{F}} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix}.$$

Příklad 5. Napište matici lineární transformace z předešlé úlohy vzhledem ke standardní bázi prostoru \mathbb{R}^3 .

Řešení: Úlohu vyřešíme nejprve složitějším způsobem. Vzorec (3.14) udává vztah mezi maticemi lineární transformace v různých bázích. Označíme-li \mathcal{E} standardní bázi prostoru \mathbb{R}^3 , vypočteme matici $[\mathcal{A}]_{\mathcal{E}}$ podle vztahu

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{E}} = \mathbf{P}[\mathcal{A}]_{\mathcal{F}}\mathbf{P}^{-1}, \quad (3.22)$$

kde \mathbf{P} je příslušná matice přechodu od uspořádané báze \mathcal{E} k uspořádané bázi \mathcal{F} :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 1 \\ 1, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 1 \end{bmatrix}.$$

Určíme \mathbf{P}^{-1} a po dosazení do vzorce (3.22) obdržíme

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 1 \\ 1, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5, & 0.5, & -0.5 \\ -0.5, & 0.5, & 0.5 \\ 0.5, & -0.5, & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}.$$

Matici $[\mathcal{A}]_{\mathcal{E}}$ lze však zázkat velmi jednoduše. Jelikož $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$, $\mathcal{A}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1$, $\mathcal{A}(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3$, vyjde

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [\mathcal{A}(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{E}} & [\mathcal{A}(\mathbf{e}_2)]_{\mathcal{E}} & [\mathcal{A}(\mathbf{e}_3)]_{\mathcal{E}} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [\mathbf{e}_2]_{\mathcal{E}} & [\mathbf{e}_1]_{\mathcal{E}} & [\mathbf{e}_3]_{\mathcal{E}} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}.$$

Cvičení:

1. Určete matici lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definovaného předpisem

$$\mathcal{A}([x_1, x_2, x_3]) = [x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3]$$

vzhledem ke standardní bázi prostoru \mathbb{R}^3 .

2. Sestavte matici lineárního zobrazení

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \ni [x, y, z] \mapsto [2x - z, y + 4z] \in \mathbb{R}^2$$

v bázích $\mathcal{G} = ([1, 1, 0], [0, 2, 0], [0, -1, 1])$, $\mathcal{H} = ([0, 1], [1, 1])$.

3. Jsou dána lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a $\mathcal{B} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ taková, že

$$\mathcal{A}([2, 1]) = -1, \mathcal{A}([1, -2]) = 3;$$

$$\mathcal{B}([2, 3]) = [0, 1], \mathcal{B}([1, -2]) = [2, 1].$$

Najděte matice lineárních zobrazení \mathcal{A} (v bázích \mathcal{E}, \mathcal{F}), \mathcal{B} (v bázi \mathcal{E}) i složeného zobrazení \mathcal{AB} (v bázích \mathcal{E}, \mathcal{F}), kde $\mathcal{E} = ([1, 0], [0, 1])$ a $\mathcal{F} = (1)$. Ověřte, že platí

$$[\mathcal{AB}]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} = [\mathcal{A}]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} [\mathcal{B}]_{\mathcal{E}}.$$

Výsledky:

$$1. [\mathcal{A}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1, & -1, & 0 \\ 1, & 1, & 0 \\ 1, & 1, & 1 \end{bmatrix}.$$

$$2. [\mathcal{A}]_{\mathcal{G}, \mathcal{H}} = \begin{bmatrix} -1, & 2, & 4 \\ 2, & 0, & -1 \end{bmatrix}.$$

$$3. [\mathcal{A}]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} = \left[\frac{1}{5}, -\frac{7}{5} \right], [\mathcal{B}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 6/7, & -4/7 \\ 5/7, & -1/7 \end{bmatrix}, [\mathcal{AB}]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} = \left[-\frac{29}{35}, \frac{3}{35} \right];$$

$$\left[-\frac{29}{35}, \frac{3}{35} \right] = \left[\frac{1}{5}, -\frac{7}{5} \right] \begin{bmatrix} 6/7, & -4/7 \\ 5/7, & -1/7 \end{bmatrix}.$$

3.3 Bilineární formy

Říkáme, že na reálném vektorovém prostoru \mathcal{V} je dána *bilineární forma* B , jestliže každé uspořádané dvojici vektorů (\mathbf{u}, \mathbf{v}) je přiřazeno reálné číslo $B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ tak, že pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

$$B(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{w}); \quad (3.23)$$

$$B(\alpha \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha B(\mathbf{u}, \mathbf{v}); \quad (3.24)$$

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{u}, \mathbf{w}); \quad (3.25)$$

$$B(\mathbf{u}, \alpha \mathbf{v}) = \alpha B(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (3.26)$$

Matici

$$[B]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1), & B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2), & \dots, & B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1), & B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2), & \dots, & B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1), & B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_2), & \dots, & B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

jejíž prvky jsou určeny hodnotami formy na vektorech báze $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ vektorového prostoru \mathcal{V} ($b_{ij} = B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$), nazýváme *maticí bilineární formy* v uspořádané bázi \mathcal{E} .

V dané bázi $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ lze každou bilineární formu v n -rozměrném prostoru psát ve tvaru

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = [\mathbf{u}]_{\mathcal{E}}^T [B]_{\mathcal{E}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}, \quad (3.28)$$

kde $[\mathbf{u}]_{\mathcal{E}}$, $[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}$ jsou příslušné souřadnicové vektory vektorů \mathbf{u} , \mathbf{v} v této bázi.

Mezi maticemi bilineární formy B v různých bázích \mathcal{E} , \mathcal{F} vektorového prostoru \mathcal{V} platí vztah

$$[B]_{\mathcal{F}} = \mathbf{P}^T [B]_{\mathcal{E}} \mathbf{P}; \quad (3.29)$$

\mathbf{P} je matice přechodu od uspořádané báze \mathcal{E} k uspořádané bázi \mathcal{F} (viz (3.15)).

Bilineární forma B se nazývá *symetrická*, jestliže pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ platí

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{u}). \quad (3.30)$$

Platí-li pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -B(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \quad (3.31)$$

řekneme, že bilineární forma B je *antisymetrická*.

Každou bilineární formu B můžeme jednoznačně rozložit na *symetrickou* a *antisymetrickou* část:

$$B^S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} (B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{u})); \quad (3.32)$$

$$B^A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} (B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - B(\mathbf{v}, \mathbf{u})). \quad (3.33)$$

Příklad 1. Buď \mathcal{F} vektorový prostor všech reálných funkcí jedné reálné proměnné. Ukažte, že zobrazení $B: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$, definované pro každé $f, g \in \mathcal{F}$ vztahem

$$B(f, g) = 4f(0)g(1) + f(2)g(3),$$

je bilineární forma na \mathcal{F} .

Řešení: Zobrazení musí mít pro libovolné funkce $f, g, h \in \mathcal{F}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ vlastnosti (3.23) - (3.26):

$$\begin{aligned} B(f+g, h) &= 4(f+g)(0)h(1) + (f+g)(2)h(3) \\ &= 4(f(0)+g(0))h(1) + (f(2)+g(2))h(3) \\ &= 4f(0)h(1) + f(2)h(3) + 4g(0)h(1) + g(2)h(3) \\ &= B(f, h) + B(g, h); \\ B(\alpha f, g) &= 4(\alpha f)(0)g(1) + (\alpha f)(2)g(3) \\ &= 4\alpha f(0)g(1) + \alpha f(2)g(3) \\ &= \alpha(4f(0)g(1) + f(2)g(3)) \\ &= \alpha B(f, g); \\ B(f, g+h) &= 4f(0)(g+h)(1) + f(2)(g+h)(3) \\ &= 4f(0)(g(1)+h(1)) + f(2)(g(3)+h(3)) \\ &= 4f(0)g(1) + f(2)g(3) + 4f(0)h(1) + f(2)h(3) \\ &= B(f, g) + B(f, h); \\ B(f, \alpha g) &= 4f(0)(\alpha g)(1) + f(2)(\alpha g)(3) \\ &= 4f(0)\alpha g(1) + f(2)\alpha g(3) \\ &= \alpha(4f(0)g(1) + f(2)g(3)) \\ &= \alpha B(f, g). \end{aligned}$$

Zobrazení B je bilineární forma.

Příklad 2. Budiž \mathcal{F} opět vektorový prostor všech reálných funkcí. Zobrazení $B : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ nechť je pro libovolné $f, g \in \mathcal{F}$ definováno předpisem

$$B(f, g) = f(1)g^2(1).$$

Je zobrazení B bilineární forma na \mathcal{F} ?

Řešení: Při ověřování axiomů bilineární formy zjistíme, že například axiom (3.25) neplatí:

$$\begin{aligned} B(f, g+h) &= f(1)(g+h)^2(1) \\ &= f(1)(g(1)+h(1))^2 \\ &= f(1)(g^2(1)+2g(1)h(1)+h^2(1)); \\ B(f, g) + B(f, h) &= f(1)g^2(1) + f(1)h^2(1). \end{aligned}$$

Je zřejmé, že $B(f, g+h) \neq B(f, g) + B(f, h)$, a tudíž se nejedná o bilineární formu.

Poznámka 1. Nesplnění jednoho z axiomů bilineární formy pochopitelně stačí, abychom dané zobrazení za bilineární formu nepovažovali. Čtenář nechť si však sám zkusí propočítat, které z axiomů bilineární formy zde platí a které ne.

Příklad 3. Dokažte, že zobrazení

$$B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longmapsto x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 \in \mathbb{R}$$

je bilineární forma na prostoru \mathbb{R}^3 .

Řešení: Opět se podíváme, má-li zobrazení B všechny vlastnosti bilineární formy. Nechť $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]$, $\mathbf{z} = [z_1, z_2, z_3]$ a $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} B(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= (x_1 + y_1)z_1 + 2(x_2 + y_2)z_2 + 3(x_3 + y_3)z_3 \\ &= (x_1z_1 + 2x_2z_2 + 3x_3z_3) + (y_1z_1 + 2y_2z_2 + 3y_3z_3) \\ &= B(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + B(\mathbf{y}, \mathbf{z}); \\ B(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (\alpha x_1)y_1 + 2(\alpha x_2)y_2 + 3(\alpha x_3)y_3 \\ &= \alpha(x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3) \\ &= \alpha B(\mathbf{x}, \mathbf{y}); \\ B(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) &= x_1(y_1 + z_1) + 2x_2(y_2 + z_2) + 3x_3(y_3 + z_3) \\ &= (x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3) + (x_1z_1 + 2x_2z_2 + 3x_3z_3) \\ &= B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + B(\mathbf{x}, \mathbf{z}); \\ B(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}) &= x_1(\alpha y_1) + 2x_2(\alpha y_2) + 3x_3(\alpha y_3) \\ &= \alpha(x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3) \\ &= \alpha B(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Zobrazení B má všechny vlastnosti bilineární formy.

Příklad 4. Najděte matici bilineární formy z předchozího příkladu v bázi $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, je-li $\mathbf{f}_1 = [1, 1, 1]$, $\mathbf{f}_2 = [1, 1, -1]$, $\mathbf{f}_3 = [1, -1, -1]$.

Řešení: Matice bilineární formy je určena hodnotami formy na vektorech dané báze. Forma je symetrická ($B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = B(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$), matice formy bude tedy také symetrická

($b_{ij} = b_{ji}$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$). Její prvky dostaneme v souladu s (3.27) :

$$\begin{aligned} b_{11} &= B(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 6; \\ b_{12} &= B(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot (-1) = 0; \\ b_{13} &= B(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_3) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \cdot (-1) = -4; \\ b_{22} &= B(\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot (-1) = 6; \\ b_{23} &= B(\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) \cdot (-1) = 2; \\ b_{33} &= B(\mathbf{f}_3, \mathbf{f}_3) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) \cdot (-1) = 6; \end{aligned}$$

tj.

$$[B]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 6, & 0, & -4 \\ 0, & 6, & 2 \\ -4, & 2, & 6 \end{bmatrix}.$$

Poznámka 2. Mohli jsme také nejprve sestavit matici dané formy vzhledem ke standardní bázi prostoru \mathbb{R}^3 a využít vzorce (3.29). Vzhledem k bázi $\mathcal{E} = ([1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1])$ má matice formy tvar

$$[B]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 3 \end{bmatrix},$$

a matice přechodu od báze \mathcal{E} k bázi \mathcal{F} je

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & -1 \\ 1, & -1, & -1 \end{bmatrix}.$$

Odtud

$$\begin{aligned} [B]_{\mathcal{F}} &= \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & -1 \\ 1, & -1, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & -1 \\ 1, & -1, & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6, & 0, & -4 \\ 0, & 6, & 2 \\ -4, & 2, & 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Poznámka 3. Označíme-li ξ_1, ξ_2, ξ_3 , resp. η_1, η_2, η_3 souřadnice vektoru \mathbf{x} , resp. \mathbf{y} v bázi \mathcal{F} , můžeme danou bilineární formu napsat vzhledem k bázi \mathcal{F} ve tvaru (3.28):

$$\begin{aligned} B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= [\mathbf{x}]_{\mathcal{F}}^T [B]_{\mathcal{F}} [\mathbf{y}]_{\mathcal{F}} \\ &= [\xi_1, \xi_2, \xi_3] \begin{bmatrix} 6, & 0, & -4 \\ 0, & 6, & 2 \\ -4, & 2, & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} \\ &= 6\xi_1\eta_1 - 4\xi_1\eta_3 + 6\xi_2\eta_2 + 2\xi_2\eta_3 - 4\xi_3\eta_1 + 2\xi_3\eta_2 + 6\xi_3\eta_3. \end{aligned}$$

Ve standardní bázi \mathcal{E} má tato forma tvar

$$\begin{aligned} B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}^T [B]_{\mathcal{E}} [\mathbf{y}]_{\mathcal{E}} \\ &= [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ &= x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3. \end{aligned}$$

Příklad 5. Na vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 je dána bilineární forma

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 - 5x_1y_3 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2.$$

Určete symetrickou a antisymetrickou část bilineární formy B .

Řešení: Symetrickou část B^S , resp. antisymetrickou část B^A formy B určíme pomocí vzorce (3.32), resp. (3.33). Můžeme také najít nejprve matici zadané bilineární formy vzhledem ke standardní bázi \mathcal{E} vektorového prostoru \mathbb{R}^3 a použít analogické vzorce k vzorcům (3.32), resp. (3.33) k určení její symetrické, resp. antisymetrické části. Ve standardní bázi \mathcal{E} má forma matici (sestavte sami!)

$$[B]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3, & 2, & -5 \\ 0, & 1, & 2 \\ 1, & -1, & 0 \end{bmatrix}.$$

Označme ji pro jednoduchost \mathbf{B} (tedy $\mathbf{B} = [B]_{\mathcal{E}}$). Pro symetrickou, resp. antisymetrickou část matice \mathbf{B} platí:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^S &= \frac{1}{2} (\mathbf{B} + \mathbf{B}^T) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 3, & 2, & -5 \\ 0, & 1, & 2 \\ 1, & -1, & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3, & 0, & 1 \\ 2, & 1, & -1 \\ -5, & 2, & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 3, & 1, & -2 \\ 1, & 1, & \frac{1}{2} \\ -2, & \frac{1}{2}, & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^A &= \frac{1}{2} (\mathbf{B} - \mathbf{B}^T) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 3, & 2, & -5 \\ 0, & 1, & 2 \\ 1, & -1, & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3, & 0, & 1 \\ 2, & 1, & -1 \\ -5, & 2, & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0, & 1, & -3 \\ -1, & 0, & \frac{3}{2} \\ 3, & -\frac{3}{2}, & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Odtud obdržíme hledanou symetrickou, resp. antisymetrickou část formy B :

$$\begin{aligned} B^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}^T \mathbf{B}^S [\mathbf{y}]_{\mathcal{E}} \\ &= [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 3, & 1, & -2 \\ 1, & 1, & \frac{1}{2} \\ -2, & \frac{1}{2}, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ &= 3x_1y_1 + x_1y_2 - 2x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + \frac{1}{2}x_2y_3 - 2x_3y_1 + \frac{1}{2}x_3y_2; \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} B^A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}^T \mathbf{B}^A [\mathbf{y}]_{\mathcal{E}} \\ &= [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 0, & 1, & -3 \\ -1, & 0, & \frac{3}{2} \\ 3, & -\frac{3}{2}, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ &= x_1y_2 - 3x_1y_3 - x_2y_1 + \frac{3}{2}x_2y_3 + 3x_3y_1 - \frac{3}{2}x_3y_2. \end{aligned}$$

Cvičení:

1. Na vektorovém prostoru \mathcal{P}_2 všech polynomů stupně nejvýše 2 je dána bilineární forma B tak, že pro libovolné polynomy $p, q \in \mathcal{P}_2$ platí:

$$B(p, q) = 4p(0)q(1) + p(2)q(3). \quad (3.34)$$

Napište její matici v bázi $\mathcal{P} = (1, x, x^2)$ a pomocí vztahu (3.28) vypočtete hodnotu formy na polynomech $p(x) = x^2 + 1$, $q(x) = x^2 - 1$.

2. Nechť \mathcal{P}_2 je opět vektorový prostor všech polynomů stupně nejvýše 2. Bilineární forma B je pro každé $p, q \in \mathcal{P}_2$ definována předpisem

$$B(p, q) = p(1)q(0).$$

Určete matice bilineární formy B i její symetrické části B^S v bázi $\tilde{\mathcal{P}} = (1, x+1, (x+1)^2)$.

3. Buď B taková bilineární forma na \mathbb{R}^2 , že pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ platí

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + 5x_2y_1 - x_2y_2.$$

Jaký tvar bude mít forma B vzhledem k bázi $\mathcal{F} = ([2, -1], [1, 3])$?

4. Nechť \mathcal{F} je vektorový prostor všech reálných funkcí, které jsou spojité v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Ukažte, že zobrazení

$$B : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \ni (f, g) \mapsto \int_0^1 f(x)g(x) dx \in \mathbb{R}$$

je bilineární forma na \mathcal{F} .

Výsledky:

1. $[B]_{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} 5, & 7, & 13 \\ 2, & 6, & 18 \\ 4, & 12, & 36 \end{bmatrix}$, (např.: $b_{13} = B(1, x^2) = 4 \cdot 1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 3^2$); $B(p, q) = 40$.

Hodnotu formy na polynomech p, q můžeme pro kontrolu také určit přímo ze vztahu (3.34).

2. $[B]_{\tilde{\mathcal{P}}} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 2, & 2, & 2 \\ 4, & 4, & 4 \end{bmatrix}$, $[B]_{\tilde{\mathcal{P}}}^S = \begin{bmatrix} 1, & 3/2, & 5/2 \\ 3/2, & 2, & 3 \\ 5/2, & 3, & 4 \end{bmatrix}$.

3. $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3\xi_1\eta_1 - 16\xi_1\eta_2 + 40\xi_2\eta_1 - \xi_2\eta_2$.

4. Využijte vlastnosti určitého integrálu.

3.4 Kvadratické formy

Kvadratickou formou na reálném vektorovém prostoru \mathcal{V} příslušnou dané bilineární formě B nazýváme zobrazení $Q_B : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ definované pro každé $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ předpisem

$$Q_B(\mathbf{u}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{u}). \quad (3.35)$$

Stejnou kvadratickou formu také vytváří i symetrická část dané bilineární formy B , takže lze psát

$$Q_B(\mathbf{u}) = B^S(\mathbf{u}, \mathbf{u}).$$

Z tohoto důvodu definujeme matici kvadratické formy Q_B v dané bázi \mathcal{E} jako symetrickou matici

$$[Q_B]_{\mathcal{E}} = [B^S]_{\mathcal{E}}, \quad (3.36)$$

kde $[B^S]_{\mathcal{E}}$ je matice symetrické části bilineární formy B . Podobně jako v (3.28) můžeme každou kvadratickou formu $Q_B(\mathbf{u})$ v dané bázi \mathcal{E} vyjádřit pomocí souřadnic vektoru \mathbf{u} a matice formy vzhledem k této bázi vzorcem

$$Q_B(\mathbf{u}) = [\mathbf{u}]_{\mathcal{E}}^T [Q_B]_{\mathcal{E}} [\mathbf{u}]_{\mathcal{E}}. \quad (3.37)$$

V dalším textu budeme u označení kvadratické formy vynechávat index udávající příslušnou bilineární formu.

Řekneme, že kvadratická forma Q je *pozitivně (negativně) definitní*, jestliže pro každé $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ platí $Q(\mathbf{u}) > 0$ ($Q(\mathbf{u}) < 0$). Platí-li pro každé $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ $Q(\mathbf{u}) \geq 0$ ($Q(\mathbf{u}) \leq 0$), nazýváme formu Q *pozitivně (negativně) semidefinitní*. Existují-li takové vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$, že například $Q(\mathbf{x}) > 0$ a zároveň $Q(\mathbf{y}) < 0$, pak se kvadratická forma nazývá *indefinitní*. Podobně o *symetrické* matici \mathbf{A} stupně n říkáme, že je *pozitivně definitní*, jestliže pro každý sloupcový nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$ platí $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$, tj. příslušná kvadratická forma $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ je pozitivně definitní.

Přejdeme-li od uspořádané báze \mathcal{E} k uspořádané bázi \mathcal{F} (matici přechodu od báze \mathcal{E} k bázi \mathcal{F} označíme jako obvykle \mathbf{P}), změní se matice kvadratické formy podle vztahu

$$[Q]_{\mathcal{F}} = \mathbf{P}^T [Q]_{\mathcal{E}} \mathbf{P}. \quad (3.38)$$

Tento vztah mezi maticemi se nazývá *kongruence*. Při studiu kvadratických forem je zvláště důležité najít takovou bázi \mathcal{F} , vzhledem k níž je matice kvadratické formy *diagonální*, tj.

$$[Q]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix},$$

neboť pak má forma Q v bázi \mathcal{F} pro každé $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ tvar *lineární kombinace čtverců*:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= [\mathbf{x}]_{\mathcal{F}}^T [Q]_{\mathcal{F}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{F}} \\ &= [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \\ &= d_{11}\xi_1^2 + d_{22}\xi_2^2 + \dots + d_{nn}\xi_n^2, \end{aligned} \quad (3.39)$$

z něhož typ formy snadno určíme. Existenci takové vhodné báze zajišťuje věta pojednávající o kongruenci symetrické a diagonální matice:

Ke každé symetrické matici \mathbf{A} existuje regulární matice \mathbf{T} a diagonální matice \mathbf{D} tak, že

$$\mathbf{D} = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^T. \quad (3.40)$$

Matice \mathbf{D} a \mathbf{T} najdeme následovně:

1. Matici \mathbf{A} upravíme pomocí *elementárních kongruencí* (po každé elementární řádkové operaci provedeme i její sloupcovou variantu) na diagonální matici \mathbf{D} .
2. Stejně elementární řádkové operace pak provedeme na jednotkové matici téhož stupně, čímž získáme matici \mathbf{T} .

Vztah (3.40) můžeme interpretovat jako změnu matice kvadratické formy při změně báze s maticí přechodu \mathbf{T}^T . Redukce symetrické matice \mathbf{A} na diagonální matici \mathbf{D} nemusí být jednoznačná. To ale nevadí. Podle *zákona setrvačnosti kvadratických forem* má diagonální matice vždy *stejný počet* kladných, záporných i nulových prvků.

Příklad 1. Na vektorovém prostoru \mathbb{R}^2 je dána bilineární forma B předpisem

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + 5x_2y_1 - x_2y_2.$$

Napište příslušnou kvadratickou formu Q a její matici vzhledem ke standardní bázi \mathcal{E} prostoru \mathbb{R}^2 .

Řešení: Ve shodě s definicí kvadratické formy platí

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \\ &= 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 5x_2x_1 - x_2^2 \\ &= 2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Maticí kvadratické formy je podle definice matice symetrické části dané bilineární formy B . Určíme tedy symetrickou část formy B :

$$\begin{aligned} B^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2}(B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + B(\mathbf{y}, \mathbf{x})) \\ &= \frac{1}{2}((2x_1y_1 - 3x_1y_2 + 5x_2y_1 - x_2y_2) + (2y_1x_1 - 3y_1x_2 + 5y_2x_1 - y_2x_2)) \\ &= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2, \end{aligned}$$

a pak následně její matici

$$[B]_{\mathcal{E}}^S = \begin{bmatrix} 2, & 1 \\ 1, & -1 \end{bmatrix},$$

což je také i naše matice kvadratické formy.

Poznámka. Matici symetrické části B^S jsme také mohli odvodit přímo z matice formy B :

$$\begin{aligned} [B^S]_{\mathcal{E}} &= \frac{1}{2}([B]_{\mathcal{E}} + [B]_{\mathcal{E}}^T) \\ &= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2, & -3 \\ 5, & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2, & 5 \\ -3, & -1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 2, & 1 \\ 1, & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Jiný způsob jak najít matici kvadratické formy spočívá v tom, že ji vyjádříme v maticovém tvaru s horní trojúhelníkovou maticí, z níž pak odvodíme symetrickou matici. Snadno nahlédneme, že pro formu (3.41) platí

$$Q(\mathbf{x}) = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} 2, & 2 \\ 0, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

odkud dostaneme

$$\begin{aligned} [Q]_{\mathcal{E}} &= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2, & 2 \\ 0, & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2, & 0 \\ 2, & -1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 2, & 1 \\ 1, & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Příklad 2. Určete typ kvadratické formy

$$Q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 29x_3^2 + 4x_1x_2 - 12x_1x_3 - 4x_2x_3$$

a napište bázi, v níž má forma Q tvar lineární kombinace čtverců.

Řešení: Sestavíme symetrickou matici kvadratické formy Q ve standardní bázi \mathcal{E} prostoru \mathbb{R}^3 a užitím elementárních kongruencí ji upravíme na diagonální matici. Forma má maticové vyjádření

$$Q(\mathbf{x}) = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 2, & 4, & -12 \\ 0, & 4, & -4 \\ 0, & 0, & 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Horní trojúhelníkovou matici označme \mathbf{U} . Příslušnou symetrickou matici \mathbf{A} získáme známým způsobem:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{2}(\mathbf{U} + \mathbf{U}^T) \\ &= \begin{bmatrix} 2, & 2, & -6 \\ 2, & 4, & -2 \\ -6, & -2, & 29 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nyní už můžeme přejít k elementárním kongruencím:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2, & 2, & -6 \\ 2, & 4, & -2 \\ -6, & -2, & 29 \end{bmatrix} &\xrightarrow[-r_1]{+3r_1} \begin{bmatrix} 2, & 2, & -6 \\ 0, & 2, & 4 \\ 0, & 4, & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow[-s_1 + 3s_1]{} \begin{bmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 4 \\ 0, & 4, & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2r_2]{} \begin{bmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 4 \\ 0, & 0, & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2s_2]{} \\ \begin{bmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 3 \end{bmatrix} &= \mathbf{D}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} &\xrightarrow[-r_1]{+3r_1} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ -1, & 1, & 0 \\ 3, & 0, & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2r_2]{} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ -1, & 1, & 0 \\ 5, & -2, & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}. \end{aligned}$$

Všechny diagonální prvky matice \mathbf{D} jsou kladné, kvadratická forma je tedy pozitivně definitní. Matice \mathbf{T}^T je, jak víme, maticí přechodu od báze \mathcal{E} k bázi \mathcal{F} , v níž je matice formy Q diagonální. Její sloupce (respektive řádky matice \mathbf{T}) tvoří pak hledanou bázi, tj.

$$\mathcal{F} = ([1, 0, 0], [-1, 1, 0], [5, -2, 1]).$$

V nové bázi má forma tvar:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= [\mathbf{x}]_{\mathcal{F}}^T \mathbf{D} [\mathbf{x}]_{\mathcal{F}} \\ &= [\xi_1, \xi_2, \xi_3] \begin{bmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \\ &= 2\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 3\xi_3^2. \end{aligned}$$

Příklad 3. Rozhodněte o typu kvadratické formy

$$Q(\mathbf{u}) = 2u_1u_2 + 2u_1u_3 - 6u_2u_3.$$

Řešení: Opět využijeme elementárních kongruencí. Forma Q má vzhledem ke standardní bázi prostoru \mathbb{R}^3 symetrickou matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & -3 \\ 1, & -3, & 0 \end{bmatrix}.$$

Převédeme ji na diagonální matici:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & -3 \\ 1, & -3, & 0 \end{bmatrix} & \xrightarrow{+r_2} \begin{bmatrix} 1, & 1, & -2 \\ 1, & 0, & -3 \\ 1, & -3, & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2, & 1, & -2 \\ 1, & 0, & -3 \\ -2, & -3, & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{2}r_1 \\ +r_1}} \sim \\ \begin{bmatrix} 2, & 1, & -2 \\ 0, & -\frac{1}{2}, & -2 \\ 0, & -2, & -2 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\substack{+s_2 \\ -\frac{1}{2}s_1 + s_1}} \begin{bmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & -\frac{1}{2}, & -2 \\ 0, & -2, & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & -\frac{1}{2}, & -2 \\ 0, & 0, & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{-4r_2} \begin{bmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & -\frac{1}{2}, & -2 \\ 0, & 0, & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & -\frac{1}{2}, & 0 \\ 0, & 0, & 6 \end{bmatrix} = \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Kvadratická forma je indefinitní. Pro úplnost uvedeme ještě její vyjádření ve formě lineární kombinace čtverců:

$$Q(\mathbf{u}) = 2\xi_1^2 - \frac{1}{2}\xi_2^2 + 6\xi_3^2.$$

Cvičení:

1. Vypočítejte součin matic \mathbf{TAT}^T z příkladu 2 této podkapitoly.
2. Najděte matici přechodu od standardní báze \mathcal{E} k bázi \mathcal{F} , ve které má kvadratická forma z příkladu 3 (podkapitoly 3.4) tvar lineární kombinace čtverců. Napište bázi \mathcal{F} .
3. Určete typ kvadratické formy $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, je-li

$$Q(\mathbf{x}) = -3x_1^2 - 5x_2^2 + 4x_1x_2.$$

4. Sestavte bázi \mathcal{F} , v níž je kvadratická forma

$$Q(\mathbf{u}) = 2u_1^2 + 6u_2^2 + 12u_3^2 - 4u_1u_2 - 8u_1u_3$$

vyjádřena jako lineární kombinace čtverců a určete její typ.

5. Rozhodněte o definitnosti matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3, & 1, & -1 \\ 1, & 2, & 1 \\ -1, & 1, & 2 \end{bmatrix}.$$

Výsledky:

1. $\mathbf{TAT}^T = \begin{bmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 3 \end{bmatrix}$.
2. $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1, & -1/2, & 3 \\ 1, & 1/2, & -1 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$, $\mathcal{F} = ([1, 1, 0], [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0], [3, -1, 1])$.
3. Forma je negativně definitní.
4. $\mathcal{F} = ([1, 0, 0], [1, 1, 0], [3, 1, 1])$. Forma je pozitivně semidefinitní.
5. Matice \mathbf{A} je pozitivně definitní.

Kapitola 4

Skalární součin a ortogonalita

4.1 Skalární součin vektorů

Skalárním součinem na reálném vektorovém prostoru \mathcal{V} nazýváme zobrazení

$$(\cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R},$$

kteřé má pro každé vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ následující vlastnosti:

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w}); \quad (4.1)$$

$$(\alpha \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha (\mathbf{u}, \mathbf{v}); \quad (4.2)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u}); \quad (4.3)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0; \quad (4.4)$$

přičemž rovnost v (4.4) nastane právě tehdy, když $\mathbf{u} = \mathbf{o}$. Jinak řečeno, skalárním součinem na \mathcal{V} rozumíme symetrickou, pozitivně definitní bilineární formu na \mathcal{V} .

Zobrazení, které libovolnému vektoru $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ přiřazuje reálné číslo $\|\mathbf{u}\|$ se nazývá *norma*, jestliže pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|; \quad (4.5)$$

$$\|\alpha \mathbf{u}\| = |\alpha| \|\mathbf{u}\|; \quad (4.6)$$

$$\|\mathbf{u}\| \geq 0; \quad (4.7)$$

rovnost v (4.7) nastane opět právě tehdy, když $\mathbf{u} = \mathbf{o}$. Norma vektoru, jež je pro každé $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ definována jako odmocnina ze skalárního součinu (\mathbf{u}, \mathbf{u}) :

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}, \quad (4.8)$$

se nazývá *norma indukovaná skalárním součinem*.

Příklad 1. Nechť $\mathcal{V} = \mathbb{R}^{2,1}$ je vektorový prostor všech sloupcových aritmetických vektorů dimenze 2. Rozhodněte, zda zobrazení $(\cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ definované vztahem

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{v},$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & -1 \\ -1, & 2 \end{bmatrix},$$

je skalární součin.

Řešení: Podívejme se, zda-li dané zobrazení představuje symetrickou, pozitivně definitní bilineární formu:

$$(4.1): (\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v})^T \mathbf{A} \mathbf{w} = (\mathbf{u}^T + \mathbf{v}^T) \mathbf{A} \mathbf{w} = \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{w} + \mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{w} = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w});$$

$$(4.2): (\alpha \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\alpha \mathbf{u})^T \mathbf{A} \mathbf{v} = \alpha (\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{v}) = \alpha (\mathbf{u}, \mathbf{v});$$

$$(4.3): (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{v} = (\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{v})^T = \mathbf{v}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{u}^T)^T = \mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{u} = (\mathbf{v}, \mathbf{u});$$

$$(4.4): (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = [u_1, u_2] \begin{bmatrix} 2, & -1 \\ -1, & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 2u_1^2 - 2u_1u_2 + 2u_2^2 = 2(u_1 - \frac{1}{2}u_2)^2 + \frac{3}{2}u_2^2 \geq 0.$$

Zobrazení splňuje axiomy (4.1) - (4.4), a definuje tedy skalární součin.

Poznámka 1. Musíme si uvědomit, že $\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{v} \in \mathbb{R}$, a tudíž skutečně $\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{v} = (\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{v})^T$. Nakonec zbývalo ukázat, že kvadratická forma $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 2u_1^2 - 2u_1u_2 + 2u_2^2$ je pozitivně definitní. Zde jsme tentokrát použili metodu doplnění na čtverec.

Příklad 2. Ukažte, že předpis

$$\|\mathbf{u}\|_\infty = \max\{|u_1|, |u_2|\}$$

definuje normu na \mathbb{R}^2 .

Řešení: Je evidentní, že $\|\mathbf{u}\|_\infty$ je nezáporné číslo a že $\|\mathbf{u}\|_\infty = 0$ pouze v případě, je-li $\mathbf{u} = [0, 0]$. Zbývá tak ověřit platnost axiomů (4.5) a (4.6):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|_\infty &= \max\{|u_1 + v_1|, |u_2 + v_2|\} \\ &\leq \max\{|u_1| + |v_1|, |u_2| + |v_2|\} \\ &\leq \max\{|u_1|, |u_2|\} + \max\{|v_1|, |v_2|\} \\ &= \|\mathbf{u}\|_\infty + \|\mathbf{v}\|_\infty; \\ \|\alpha \mathbf{u}\|_\infty &= \max\{|\alpha u_1|, |\alpha u_2|\} \\ &= \max\{|\alpha| |u_1|, |\alpha| |u_2|\} \\ &= |\alpha| \max\{|u_1|, |u_2|\} \\ &= |\alpha| \|\mathbf{u}\|_\infty. \end{aligned}$$

Oba axiomy platí, tj. daný předpis definuje normu na \mathbb{R}^2 .

Poznámka 2. Při důkazu jsme využili vlastností absolutní hodnoty reálného čísla. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ totiž platí:

$$\begin{aligned} |x + y| &\leq |x| + |y|; \\ |xy| &= |x| |y|. \end{aligned}$$

Cvičení:

1. Na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^{2,1}$ všech sloupcových aritmetických vektorů dimenze 2 je definován skalární součin jako v *příkladu 1 (podkapitoly 4.1)*. Vypočtete součiny (\mathbf{u}, \mathbf{v}) , (\mathbf{u}, \mathbf{w}) , (\mathbf{v}, \mathbf{w}) , jestliže:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Nechť $\mathbb{R}^{2,1}$ označuje vektorový prostor z předešlé úlohy. Je vzorcem

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \mathbf{B} \mathbf{v}$$

definován skalární součin na $\mathbb{R}^{2,1}$, je-li

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{bmatrix}?$$

3. Buď \mathbb{R}^n aritmetický vektorový prostor dimenze n . Ukažte, že *euklidovský skalární součin*

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_2 = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

má vlastnosti (4.1) - (4.4).

4. Buď \mathbb{R}^n opět aritmetický vektorový prostor dimenze n . Dokažte, že *euklidovská norma*

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

vyhovuje axiomům (4.5) - (4.7).

Výsledky:

1. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, $(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = -1$, $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{3}{2}$.
2. Není, neplatí axiom (4.4).

4.2 Ortogonalita

Množina vektorů $\mathcal{X} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ vektorového prostoru \mathcal{V} je *ortogonální*, právě když skalární součin $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = 0$, je-li $i \neq j$ ($i, j = 1, \dots, n$). Množina vektorů $\mathcal{X} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ se nazývá *ortonormální*, právě když $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = 0$, je-li $i \neq j$ a navíc $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = 1$, je-li $i = j$ ($i, j = 1, \dots, n$). *Ortogonalní maticí* rozumíme matici \mathbf{U} , pro niž platí $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$. Jinak řečeno

$$\mathbf{U} \mathbf{U}^T = \mathbf{I}.$$

To vlastně znamená, že řádky i sloupce ortogonální matice jsou tvořeny ortonormálními vektory.

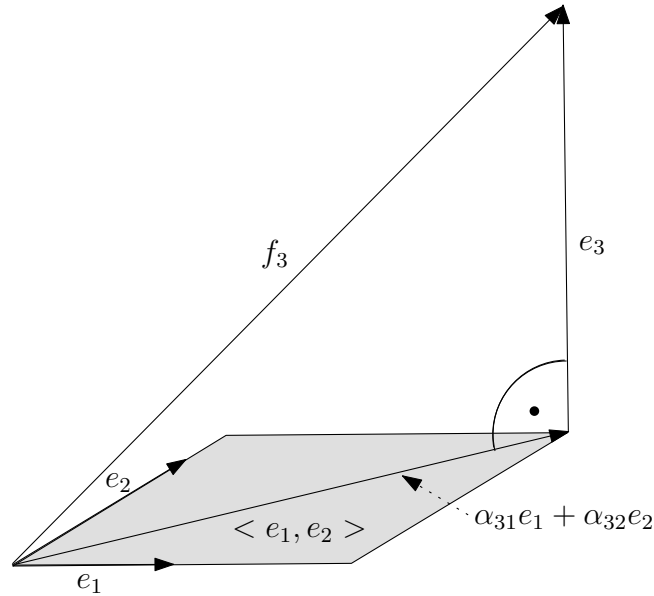
Z každé báze $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ prostoru \mathcal{V} můžeme sestavit ortogonální bázi $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ pomocí Schmidtova ortogonalizačního procesu:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{f}_1, \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{f}_2 - \alpha_{21} \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{f}_3 - \alpha_{31} \mathbf{e}_1 - \alpha_{32} \mathbf{e}_2, \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n &= \mathbf{f}_n - \alpha_{n1} \mathbf{e}_1 - \cdots - \alpha_{nm-1} \mathbf{e}_{n-1}; \end{aligned} \tag{4.9}$$

kde

$$\alpha_{ji} = \frac{(\mathbf{f}_j, \mathbf{e}_i)}{(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)}, \quad j = 2, \dots, n; \quad i = 1, \dots, j-1.$$

Poznámka. Algoritmus Schmidtova procesu spočívá v tom, že vektor \mathbf{f}_1 bereme jako první vektor hledané ortogonální báze a potom každý následující vektor \mathbf{f}_j “rozštěpíme” na dvě ortogonální složky: vektor \mathbf{e}_j a “ortogonální průmět” \mathbf{f}_j do podprostoru $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{j-1} \rangle$. Následující obrázek podává interpretaci Schmidtova procesu na geometrických vektorech v prostoru dimenze 3:



Obrázek 4.1:

Příklad 1. Ortogonalizujte vektory $\mathbf{s}_1^I = [1, 0]^T$, $\mathbf{s}_2^I = [0, 1]^T$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^{2,1}$ vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{v},$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & -1 \\ -1, & 2 \end{bmatrix}.$$

Řešení: Vektory $\mathbf{s}_1^I, \mathbf{s}_2^I$ netvoří ortogonální bázi prostoru $\mathbb{R}^{2,1}$ vzhledem k danému skalárnímu součinu:

$$\begin{aligned} (\mathbf{s}_1^I, \mathbf{s}_2^I) &= [1, 0] \begin{bmatrix} 2, & -1 \\ -1, & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [1, 0] \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Ortogonalní vektory $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2$ najdeme Schmidtovým algoritmem:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{e}}_1 &= \mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}, \\ \alpha_{21} &= \frac{(\mathbf{s}_2^{\mathbf{I}}, \tilde{\mathbf{e}}_1)}{(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_1)} \\ &= \frac{[0, 1] \begin{bmatrix} 2, & -1 \\ -1, & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{[1, 0] \begin{bmatrix} 2, & -1 \\ -1, & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \\ &= -\frac{1}{2}, \\ \tilde{\mathbf{e}}_2 &= \mathbf{s}_2^{\mathbf{I}} - \left(-\frac{1}{2}\right) \tilde{\mathbf{e}}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Hledané ortogonalní vektory jsou $\tilde{\mathbf{e}}_1 = [1, 0]^T$ a $\tilde{\mathbf{e}}_2 = [\frac{1}{2}, 1]^T$.

Příklad 2. Z vektorů $\mathbf{a} = [1, 0, 1]$, $\mathbf{b} = [0, 1, 2]$, $\mathbf{c} = [2, 1, 0]$ sestavte ortonormální bázi prostoru \mathbb{R}^3 vzhledem k euklidovskému skalárnímu součinu.

Řešení: Nejdříve najdeme ortogonalní bázi:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \mathbf{a}, \mathbf{e}_1 = [1, 0, 1]; \alpha_{21} = \frac{(\mathbf{b}, \mathbf{e}_1)_2}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)_2} = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1}{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1} = 1, \mathbf{e}_2 = \mathbf{b} - \alpha_{21} \mathbf{e}_1 = [-1, 1, 1]; \\ \alpha_{31} &= \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{e}_1)_2}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)_2} = \frac{2}{2}, \alpha_{32} = \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{e}_2)_2}{(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)_2} = -\frac{1}{3}, \mathbf{e}_3 = \mathbf{c} - \alpha_{31} \mathbf{e}_1 - \alpha_{32} \mathbf{e}_2 = \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right].\end{aligned}$$

Vypočteme normy vektorů $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\|\mathbf{e}_1\|_2 = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}, \|\mathbf{e}_2\|_2 = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}, \|\mathbf{e}_3\|_2 = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2}.$$

Hledanou ortonormální bázi tvoří vektory:

$$\mathbf{e}_1 / \|\mathbf{e}_1\|_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], \mathbf{e}_2 / \|\mathbf{e}_2\|_2 = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \mathbf{e}_3 / \|\mathbf{e}_3\|_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right].$$

Příklad 3. Jsou polynomy $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$, $p_3(x) = x^2$ ortogonalní vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(p, q) = \int_{-1}^1 p(x) q(x) dx?$$

Pokud ne, ortogonalizujte je.

Řešení: Nejdříve se podíváme, zda-li dané polynomy nejsou náhodou ortogonalní:

$$(1, x) = \int_{-1}^1 (1 \cdot x) dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0; p_1, p_2 \text{ jsou ortogonalní};$$

$$(1, x^2) = \int_{-1}^1 (1 \cdot x^2) dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \neq 0; p_1, p_3 \text{ nejsou ortogonalní}.$$

Přistoupíme k ortogonalizaci p_1, p_2, p_3 . Stačí položit $e_1(x) = 1$, $e_2(x) = x$ a dopočítat $e_3(x)$:

$$e_3(x) = p_3(x) - \alpha_{31} e_1(x) - \alpha_{32} e_2(x),$$

kde

$$\alpha_{31} = \frac{(p_3, e_1)}{(e_1, e_1)} = \frac{\int_{-1}^1 x^2 dx}{\int_{-1}^1 1 dx} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}, \quad \alpha_{32} = \frac{(p_3, e_2)}{(e_2, e_2)} = \frac{\int_{-1}^1 x^3 dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} = \frac{0}{\frac{2}{3}} = 0,$$

takže

$$e_3(x) = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Získali jsme tak dokonce ortogonální bázi prostoru \mathcal{P}_2 všech polynomů stupně nejvýše 2 vzhledem k danému skalárnímu součinu:

$$\mathcal{P}_0 = \left(1, x, x^2 - \frac{1}{3} \right).$$

Cvičení:

1. Využijte ortogonalitu vektorů $\mathbf{x} = [1, 0, 1]$, $\mathbf{y} = [-1, 1, 1]$, $\mathbf{z} = [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}]$ vzhledem ke skalárnímu součinu $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_2 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ k nalezení souřadnic vektoru $\mathbf{u} = [5, 3, -1]$ v bázi $\mathcal{X} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$.
2. Ortogonalizujte vektory $\mathbf{f}_1 = [2, 0, 0, 0]$, $\mathbf{f}_2 = [-1, 2, 4, 0]$ a $\mathbf{f}_3 = [0, 4, 6, 2]$ ve skalárním součinu $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + u_3 v_3 + 2u_4 v_4$.
3. Najděte ortogonální bázi vektorového prostoru \mathcal{P}_2 všech polynomů stupně nejvýše 2 vzhledem ke skalárnímu součinu $(p, q) = \int_0^1 p(x) q(x) dx$.
4. Ukažte, že platí: Je-li matice \mathbf{A} ortogonální, pak také matice \mathbf{A}^2 je ortogonální.

Výsledky:

1. $[\mathbf{u}]_{\mathcal{X}} = [2, -1, 3]^T$; nápověda: $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{x} + \alpha_2 \mathbf{y} + \alpha_3 \mathbf{z} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{x})_2}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})_2}$, atd.
2. $\mathbf{e}_1 = [2, 0, 0, 0]$, $\mathbf{e}_2 = [0, 2, 4, 0]$, $\mathbf{e}_3 = [0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 2]$.
3. $e_1(x) = 1$, $e_2(x) = x - \frac{1}{2}$, $e_3(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$.
4. Musí platit $(\mathbf{A}^2)^T = (\mathbf{A}^2)^{-1}$.

Kapitola 5

Determinanty

Matrice \mathbf{A}_{ij} , která vznikne z čtvercové matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce, se nazývá *submatice* řádu $n - 1$. *Determinantem* matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ nazýváme číslo $|\mathbf{A}| = a_{11}$. Je-li $n > 1$ a jsou-li definovány determinanty matic stupně menšího než n , rozumíme determinantem matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ číslo

$$|\mathbf{A}| = a_{11} |\mathbf{A}_{11}| - a_{12} |\mathbf{A}_{12}| + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} |\mathbf{A}_{1n}|, \quad (5.1)$$

kde $|\mathbf{A}_{1j}|$ jsou determinanty submatic \mathbf{A}_{1j} ($j = 1, \dots, n$). Determinant $|\mathbf{A}_{ij}|$ se nazývá také *minor* (*subdeterminant*) řádu $n - 1$. Opatříme-li subdeterminant $|\mathbf{A}_{ij}|$ znaménkem $(-1)^{i+j}$, dostaneme *algebraický doplněk* \mathbf{A}_{ij}^* prvku a_{ij} ; tedy $\mathbf{A}_{ij}^* = (-1)^{i+j} |\mathbf{A}_{ij}|$. Vzorec (5.1) zapsaný pomocí doplňků má potom podobu

$$|\mathbf{A}| = a_{11} \mathbf{A}_{11}^* + a_{12} \mathbf{A}_{12}^* + \cdots + a_{1n} \mathbf{A}_{1n}^*. \quad (5.2)$$

Determinant regulární matice je vždy nenulový. Inverzní matici k dané regulární matici \mathbf{A} můžeme pak určit pomocí algebraických doplňků:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^* & \mathbf{A}_{12}^* & \cdots & \mathbf{A}_{1n}^* \\ \mathbf{A}_{21}^* & \mathbf{A}_{22}^* & \cdots & \mathbf{A}_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{n1}^* & \mathbf{A}_{n2}^* & \cdots & \mathbf{A}_{nn}^* \end{bmatrix}^T. \quad (5.3)$$

Matrice na pravé straně vzorce je tzv. *adjungovaná matice*.

Řešení $[x_1, \dots, x_n]$ soustavy lineárních rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se čtvercovou regulární maticí řádu n lze vypočítat pomocí determinantů (Cramerových vzorců):

$$x_i = \frac{|\mathbf{A}_i^{\mathbf{b}}|}{|\mathbf{A}|}, \quad (5.4)$$

kde $|\mathbf{A}_i^{\mathbf{b}}|$ je determinant matice, jež vznikne z matice \mathbf{A} tak, že v ní i -tý sloupec nahradíme sloupcem pravých stran.

Příklad 1. Ukažte, že matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4, & 0, & 1 \\ 2, & 2, & 0 \\ 3, & 1, & 1 \end{bmatrix}$$

je regulární a najděte inverzní matici \mathbf{A}^{-1} .

Řešení: Podíváme se, je-li determinant matice \mathbf{A} různý od nuly. K jeho výpočtu zvolíme rozvoj podle 1. řádku (vzorec (5.1)):

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= 4 \cdot \begin{vmatrix} 2, & 0 \\ 1, & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2, & 0 \\ 3, & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2, & 2 \\ 3, & 1 \end{vmatrix} \\ &= 4(2 \cdot 1 - 1 \cdot 0) - 0 + (2 \cdot 1 - 3 \cdot 2) \\ &= 4. \end{aligned}$$

Matice \mathbf{A} má nenulový determinant, je tedy regulární a můžeme přistoupit k výpočtu inverzní matice pomocí vzorce (5.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^* & \mathbf{A}_{12}^* & \mathbf{A}_{13}^* \\ \mathbf{A}_{21}^* & \mathbf{A}_{22}^* & \mathbf{A}_{23}^* \\ \mathbf{A}_{31}^* & \mathbf{A}_{32}^* & \mathbf{A}_{33}^* \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (-1)^2 \begin{vmatrix} 2, & 0 \\ 1, & 1 \end{vmatrix}, & (-1)^3 \begin{vmatrix} 2, & 0 \\ 3, & 1 \end{vmatrix}, & (-1)^4 \begin{vmatrix} 2, & 2 \\ 3, & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^3 \begin{vmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 1 \end{vmatrix}, & (-1)^4 \begin{vmatrix} 4, & 1 \\ 3, & 1 \end{vmatrix}, & (-1)^5 \begin{vmatrix} 4, & 0 \\ 3, & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^4 \begin{vmatrix} 0, & 1 \\ 2, & 0 \end{vmatrix}, & (-1)^5 \begin{vmatrix} 4, & 1 \\ 2, & 0 \end{vmatrix}, & (-1)^6 \begin{vmatrix} 4, & 0 \\ 2, & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2, & -2, & -4 \\ 1, & 1, & -4 \\ -2, & 2, & 8 \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2, & 1, & -2 \\ -2, & 1, & 2 \\ -4, & -4, & 8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Příklad 2. Určete neznámou x_2 ze soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 &= 0 \\ x_2 - 6x_3 - x_4 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Řešení: Neznámou x_2 vypočteme užitím Cramerova vzorce, tj. v (5.4) položíme $i = 2$:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{|\mathbf{A}_2^{\mathbf{b}}|}{|\mathbf{A}|} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} 1, & 1, & -3, & 1 \\ 2, & 0, & 0, & 2 \\ 0, & 5, & -6, & -1 \\ 3, & 1, & 0, & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1, & 1, & -3, & 1 \\ 2, & 1, & 0, & 2 \\ 0, & 1, & -6, & -1 \\ 3, & 1, & 0, & 1 \end{vmatrix}}. \end{aligned}$$

Při výpočtu determinantů přejdeme k efektivnějším postupům než nabízí vzorce (5.1), resp. (5.2):

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1, & 1, & -3, & 1 \\ 2, & 1, & 0, & 2 \\ 0, & 1, & -6, & -1 \\ 3, & 1, & 0, & 1 \end{vmatrix} & \xrightarrow{-2r_1} \begin{vmatrix} 1, & 1, & -3, & 1 \\ 2, & 1, & 0, & 2 \\ -2, & -1, & 0, & -3 \\ 3, & 1, & 0, & 1 \end{vmatrix} \\
 & = -3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2, & 1, & 2 \\ -2, & -1, & -3 \\ 3, & 1, & 1 \end{vmatrix} + r_1 \\
 & = -3 \begin{vmatrix} 2, & 1, & 2 \\ 0, & 0, & -1 \\ 3, & 1, & 1 \end{vmatrix} \\
 & = -3(-1)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2, & 1 \\ 3, & 1 \end{vmatrix} \\
 & = 3.
 \end{aligned}$$

Poznámka 1. Využili jsme, že přičtení násobku jednoho řádku k jinému nezmění hodnotu determinantu a že determinant můžeme vypočítat rozvojem podle libovolného řádku, resp. sloupce. V našem případě to byl 3. sloupec a 2. řádek.

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1, & 1, & -3, & 1 \\ 2, & 0, & 0, & 2 \\ 0, & 5, & -6, & -1 \\ 3, & 1, & 0, & 1 \end{vmatrix} & \xrightarrow{\substack{-2r_1 \\ -3r_1}} \begin{vmatrix} 1, & 1, & -3, & 1 \\ 0, & -2, & 6, & 0 \\ 0, & 5, & -6, & -1 \\ 0, & -2, & 9, & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} +\frac{5}{2}r_2 \\ -r_2 \end{matrix} \\
 & = \begin{vmatrix} 1, & 1, & -3, & 1 \\ 0, & -2, & 6, & 0 \\ 0, & 0, & 9, & -1 \\ 0, & 0, & 3, & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -\frac{1}{3}r_3 \end{matrix} \\
 & = \begin{vmatrix} 1, & 1, & -3, & 1 \\ 0, & -2, & 6, & 0 \\ 0, & 0, & 9, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & -\frac{5}{3} \end{vmatrix} \\
 & = 30.
 \end{aligned}$$

Poznámka 2. Zde jsme přičtení násobku řádku k jinému prováděli tolikrát, až jsme obdrželi horní trojúhelníkovou matici, jejíž determinant je roven jednoduše součinu diagonálních prvků. Neznámá $x_2 = 10$.

Poznámka 3. Při výpočtu determinantu úpravou matice na horní trojúhelníkovou matici musíme dávat pozor, zda-li skutečně přičítáme násobek řádku k jinému řádku, nebo násobek řádku k násobku řádku. Pokud by například někdo při výpočtu předchozího determinantu při poslední úpravě odečetl 3. řádek od trojnásobku 4. řádku, změnil by zrovna tak trojnásobně i hodnotu determinantu!

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1, & 1, & -3, & 1 \\ 0, & -2, & 6, & 0 \\ 0, & 0, & 9, & -1 \\ 0, & 0, & 3, & -2 \end{vmatrix} & \xrightarrow{3r_4 - r_3} \begin{vmatrix} 1, & 1, & -3, & 1 \\ 0, & -2, & 6, & 0 \\ 0, & 0, & 9, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & -5 \end{vmatrix} \\
 & = 90.
 \end{aligned}$$

V takovém případě nesmíme zapomenout vynásobit hodnotu determinantu odpovídající *reciprokou* (*převrácenou*) hodnotou násobku:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1, & 1, & -3, & 1 \\ 0, & -2, & 6, & 0 \\ 0, & 0, & 9, & -1 \\ 0, & 0, & 3, & -2 \end{vmatrix} & \stackrel{3r_4 - r_3}{=} \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1, & 1, & -3, & 1 \\ 0, & -2, & 6, & 0 \\ 0, & 0, & 9, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & -5 \end{vmatrix} \\ & = 30. \end{aligned}$$

Cvičení:

1. Vypočítejte determinanty daných matic:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5, & 2, & 1 \\ 1, & -1, & 4 \\ 3, & 0, & 2 \end{bmatrix}; \text{ b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2, & 0, & -1, & 7 \\ 6, & 1, & 0, & 4 \\ 8, & -2, & 1, & 0 \\ 4, & 1, & 0, & 2 \end{bmatrix}; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 4 \\ 2, & 3, & 1 \\ 1, & 4, & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Pro které hodnoty λ je matice

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda, & 0, & 2 \\ 0, & 4 - \lambda, & 3 \\ 0, & 4, & -\lambda \end{bmatrix}$$

singulární.

3. Pomocí adjungované matice najděte inverzní matice \mathbf{A}^{-1} , \mathbf{B}^{-1} , je-li

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & 1, & 1 \\ 0, & 1, & 1 \\ -2, & 1, & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3, & 0, & 3 \\ 4, & 1, & -2 \\ -5, & 1, & 4 \end{bmatrix}.$$

Výsledky:

1. a) $|\mathbf{A}| = 13$; b) $|\mathbf{B}| = -14$; c) $|\mathbf{C}| = 19$.

2. 1, 6, -2.

3. \mathbf{A} je singulární; $\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 2, & 1, & -1 \\ -2, & 9, & 6 \\ 3, & -1, & 1 \end{bmatrix}$.

Kapitola 6

Úvod do spektrální teorie

6.1 Vlastní čísla a vektory

Nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ a číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ se nazývají *vlastní vektor* a *vlastní číslo* lineární transformace $\mathcal{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, jestliže platí

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}. \quad (6.1)$$

Je-li $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ uspořádaná báze vektorového prostoru \mathcal{V} a $[\mathcal{A}]_{\mathcal{E}}$ matice lineární transformace $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ vzhledem k bázi \mathcal{E} , můžeme rovnici (6.1) přepsat na rovnici (viz (3.19))

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{E}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \lambda [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}, \quad (6.2)$$

kde $[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = [x_1, \dots, x_n]^T$ je souřadnicový vektor vektoru \mathbf{x} v bázi \mathcal{E} . Úloha najít vlastní čísla a vektory lineární transformace se potom shoduje s úlohou najít vlastní čísla a vektory matice $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{n \times n}$, tj. najít takový sloupcový vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ a takové číslo λ , aby platilo

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}. \quad (6.3)$$

Rovnice (6.3) je ekvivalentní s rovnicí

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{o}, \quad (6.4)$$

což je soustava homogenních lineárních rovnic. Výraz $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ nazýváme *charakteristickým polynomem* matice \mathbf{A} a rovnice

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad (6.5)$$

se nazývá *charakteristická rovnice*.

V komplexním prostoru \mathcal{V} má každé lineární zobrazení \mathbf{A} alespoň jeden vlastní vektor.

Příklad 1. Najděte všechna vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & -3, & 3 \\ 0, & -5, & 6 \\ 0, & -3, & 4 \end{bmatrix}.$$

Řešení: Hledáme netriviální řešení soustavy (6.4). Z kapitoly věnované determinantům je zřejmé, že soustava (6.4) bude mít netriviální řešení právě tehdy, když matice soustavy bude singulární. V případě regulární matice by totiž soustava měla pouze jediné řešení a to právě triviální řešení.

Determinant singulární matice je roven vždy nule, vlastní čísla matice \mathbf{A} jsou tedy nulové body charakteristického polynomu, tj. kořeny rovnice (6.5):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 0 & -5-\lambda & 6 \\ 0 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -5-\lambda & 6 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) \\ &= (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+2). \end{aligned}$$

Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$. Nyní je dosadíme do soustavy (6.4) a vyhledáme k nim příslušné vlastní vektory.

$$\lambda_{1,2} = 1: \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 & | & 0 \\ 0 & -6 & 6 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 = r \\ x_2 = s \\ x_3 = s \end{matrix}, \quad \mathbf{x} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Parametry r, s jsou libovolná reálná čísla, která se nesmí současně rovnat nule. Vlastnímu číslu 1 odpovídá tedy nekonečně mnoho vlastních vektorů, které jsou lineární kombinací dvou lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{x}_1 = [1, 0, 0]^T$ a $\mathbf{x}_2 = [0, 1, 1]^T$, přičemž každý z nich je vlastním vektorem matice \mathbf{A} , o čemž se přesvědčíme dosazením do (6.3):

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_3 = -2: \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 & | & 0 \\ 0 & -3 & 6 & | & 0 \\ 0 & -3 & 6 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 & | & 0 \\ 0 & -3 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} y_1 = t \\ y_2 = 2t \\ y_3 = t \end{matrix}, \quad \mathbf{y} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Parametr t je opět libovolné nenulové reálné číslo. Vlastnímu číslu -2 odpovídá opět nekonečně mnoho vlastních vektorů, které jsou nenulovými násobky vektoru $\mathbf{x}_3 = [1, 2, 1]^T$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matice \mathbf{A} má tři lineárně nezávislé vlastní vektory $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ a $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Příklad 2. Určete všechna vlastní čísla a vlastní vektory lineární transformace $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definované předpisem

$$\mathcal{A}([x_1, x_2, x_3]) = [2x_1 + x_2, -x_1 + x_3, x_1 + 3x_2 + x_3].$$

Řešení: Nejprve sestavíme matici lineární transformace \mathcal{A} ve standardní bázi \mathcal{E} prostoru \mathbb{R}^3 . To už jistě není pro nás žádný problém. Matici označíme \mathbf{A} místo $[\mathcal{A}]_{\mathcal{E}}$. Platí

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vlastní čísla a vektory matice \mathbf{A} najdeme jako v předešlém příkladě:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 3) - (\lambda - 2) \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) \\ &= (2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2). \end{aligned}$$

Charakteristický polynom má kořeny $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = 2$. Známe tak vlastní čísla lineární transformace a můžeme přistoupit k určení vlastních vektorů.

$$\lambda_1 = -1: \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 3 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 4 & 3 & | & 0 \\ 0 & 4 & 3 & | & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} r \\ -3r \\ 4r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, r \neq 0.$$

$$\lambda_{2,3} = 2: \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ -1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 3 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, s \neq 0.$$

Matice \mathbf{A} má tentokrát dva lineárně nezávislé vlastní vektory $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ a $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Napišeme-li vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ jako řádky, dostaneme vlastní vektory naší lineární transformace:

$$\mathcal{A}([1, -3, 4]) = [2 \cdot 1 + (-3), -1 + 4, 1 + 3(-3) + 4] = [-1, 3, -4] = -1 \cdot [1, -3, 4];$$

$$\mathcal{A}([1, 0, 1]) = [2 \cdot 1 + 0, -1 + 1, 1 + 3 \cdot 0 + 1] = [2, 0, 2] = 2 \cdot [1, 0, 1].$$

Příklad 3. Nechť \mathcal{V} je n -rozměrný vektorový prostor. Má-li lineární transformace $\mathcal{A}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ n lineárně nezávislých vlastních vektorů, pak jejich volbou za bázi prostoru \mathcal{V} převedeme matici zobrazení \mathcal{A} na diagonální tvar. Dokažte.

Řešení: Budiž $\mathcal{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ uspořádaná báze prostoru \mathcal{V} , kde $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ jsou vlastní vektory zobrazení \mathcal{A} . Sestavíme matici zobrazení \mathcal{A} v bázi \mathcal{X} (*podkapitola 3.2*):

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}]_{\mathcal{X}} &= \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) \\ \hline \end{array} \right]_{\mathcal{X}} & \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A}(\mathbf{x}_2) \\ \hline \end{array} \right]_{\mathcal{X}} & \cdots & \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A}(\mathbf{x}_n) \\ \hline \end{array} \right]_{\mathcal{X}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 \mathbf{x}_1 \\ \hline \end{array} \right]_{\mathcal{X}} & \left[\begin{array}{c|c} \lambda_2 \mathbf{x}_2 \\ \hline \end{array} \right]_{\mathcal{X}} & \cdots & \left[\begin{array}{c|c} \lambda_n \mathbf{x}_n \\ \hline \end{array} \right]_{\mathcal{X}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Označme \mathbf{A} matici našeho zobrazení vzhledem k nějaké jiné bázi prostoru \mathcal{V} , příslušnou matici přechodu \mathbf{P} a položme $\mathbf{D} = [\mathcal{A}]_{\mathcal{X}}$. Vzorec (3.14), který vyjadřuje vztah mezi maticemi lineárního zobrazení v různých bázích, teď můžeme napsat ve tvaru

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}, \quad (6.6)$$

jež tak představuje transformaci matice lineárního zobrazení \mathcal{A} na diagonální matici.

Poznámka. Vztah (3.14), resp. (6.6) se nazývá *podobnost matic*. Má-li tedy matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ n lineárně nezávislých vlastních vektorů, je podobná diagonální matici, která má na diagonále její vlastní čísla. Tak například matice \mathbf{A} z *příkladu 1* této podkapitoly je podobná diagonální matici

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & -2 \end{bmatrix}.$$

Matici přechodu \mathbf{P} tvoří po sloupcích vlastní vektory matice \mathbf{A} odpovídající vlastním číslům v tom pořadí, jak jsou napsána na diagonále. K ověření vztahu (6.6) nemusíme hledat matici \mathbf{P}^{-1} , stačí jednoduše ověřit $\mathbf{PD} = \mathbf{AP}$:

$$\begin{bmatrix} 1, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 2 \\ 0, & 1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & -3, & 3 \\ 0, & -5, & 6 \\ 0, & -3, & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 2 \\ 0, & 1, & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1, & 0, & -2 \\ 0, & 1, & -4 \\ 0, & 1, & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & -2 \\ 0, & 1, & -4 \\ 0, & 1, & -2 \end{bmatrix}.$$

Na druhé straně lineární zobrazení $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (*příklad 2 podkapitola 6.1*) má jen dva lineárně nezávislé vektory, a tudíž matici zobrazení nelze převést na diagonální matici.

Příklad 4. Ukažte, že platí toto tvrzení: Odpovídají-li vlastní vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ matice \mathbf{A} navzájem různým vlastním číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, jsou lineárně nezávislé.

Řešení: Nechť platí předpoklady našeho tvrzení. Nezávislost vlastních vektorů dokážeme matematickou indukcí:

1. Je-li $k = 1$, tvrzení platí. Vlastní vektor \mathbf{x}_1 je nenulový, a tedy lineárně nezávislý.
2. Nechť $k > 1$ a nechť vlastní vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$ jsou lineárně nezávislé. Ukažeme, že také vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ jsou lineárně nezávislé. Kdyby tomu tak nebylo, vektor \mathbf{x}_k by byl lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$, tj.

$$\mathbf{x}_k = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}. \quad (6.7)$$

Rovnici (6.7) vynásobíme nejprve maticí \mathbf{A} a potom vlastním číslem λ_k . Dostaneme tak dvě nové rovnice:

$$\begin{aligned} \lambda_k \mathbf{x}_k &= \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}, \\ \lambda_k \mathbf{x}_k &= \alpha_1 \lambda_k \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_{k-1} \lambda_k \mathbf{x}_{k-1}. \end{aligned}$$

Jejich odečtením pak nakonec získáme rovnici

$$\mathbf{0} = \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) \mathbf{x}_{k-1}. \quad (6.8)$$

Z rovnice (6.8) tak vyplývá, že vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$ jsou lineárně závislé, neboť všechny skaláry na pravé straně nemohou být nulové. Tím se ale dostáváme do sporu s indukčním předpokladem. Vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ jsou tudíž lineárně nezávislé.

Cvičení:

1. Najděte charakteristický polynom, vlastní čísla a vektory daných matic:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1, & -2 \\ 4, & 5 \end{bmatrix}; \text{ b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8, & 0, & 0 \\ 7, & -1, & -2 \\ -7, & 0, & 1 \end{bmatrix}; \text{ c) } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2, & 0, & 0 \\ -5, & -2, & -5 \\ 5, & 0, & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Mějme matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & -1, & -1 \\ -1, & 1, & -1 \\ -1, & -1, & 1 \end{bmatrix}$$

a vektory $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Rozhodněte, který z vektorů je vlastním vektorem matice \mathbf{A} .

3. Určete součet a součin vlastních čísel matice

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 1, & -1, & -2 \\ -1, & 0, & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Najděte bázi prostoru \mathbb{R}^2 , v níž je matice lineární transformace $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ diagonální, jestliže

$$\mathcal{A}([x_1, x_2]) = [x_1, x_1 + 2x_2].$$

5. Vypočítejte vlastní čísla a vektory matice \mathbf{A} , potom sestavte regulární matici \mathbf{P} a diagonální matici \mathbf{D} tak, aby platilo $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$, je-li

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2, & 0, & -1 \\ 0, & 2, & 0 \\ 3, & 0, & 2 \end{bmatrix}; \text{ b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1, & 0, & 1 \\ -7, & 2, & 5 \\ 3, & 0, & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Nechť \mathbf{A} je libovolná regulární matice. Dokažte, že platí: Je-li λ vlastním číslem matice \mathbf{A} , pak λ^{-1} je vlastním číslem matice \mathbf{A}^{-1} .

Výsledky:

1. a) Charakteristický polynom: $\lambda^2 - 4\lambda + 3$, vlastní čísla: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$,

vlastní vektory: pro $\lambda_1 = 1$: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -r \\ r \end{bmatrix}$, $r \neq 0$, pro $\lambda_2 = 3$: $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -s \\ 2s \end{bmatrix}$, $s \neq 0$;

b) charakteristický polynom: $-\lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda - 8$, vlastní čísla: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 8$,

vlastní vektory: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix}$, $r \neq 0$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -s \\ s \end{bmatrix}$, $s \neq 0$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -t \\ -t \\ t \end{bmatrix}$, $t \neq 0$;

c) charakteristický polynom: $-\lambda^3 - \lambda^2 + 8\lambda + 12$, vlastní čísla: $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$,

vlastní vektory: pro $\lambda_{1,2} = -2$: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -r \\ s \\ r \end{bmatrix}$, r a s se nesmí současně rovnat 0,

pro $\lambda_3 = 3$: $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{bmatrix}$, $t \neq 0$. Vhodnou volbou parametrů r , s , t získáme 3 lineárně

nezávislé vlastní vektory: $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. Vlastní vektory matice \mathbf{A} jsou \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_3 . Jim odpovídají vlastní čísla -1 a 2 . Vektor \mathbf{v}_2 není vlastním vektorem matice \mathbf{A} . (Vlastní čísla a vektory nemusíme počítat!)
3. $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2$, $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2$. (Vlastní čísla opět nemusíme počítat!)
4. Hledaná báze je například $\mathcal{X} = ([-1, 1], [0, 1])$.
5. a) Vlastní čísla: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$,

$$\text{vlastní vektory: } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -r \\ 0 \\ r \end{bmatrix}, r \neq 0, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ 3s \end{bmatrix}, s \neq 0, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}, t \neq 0,$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 1, & 3, & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 2 \end{bmatrix};$$

- b) vlastní čísla: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$,

$$\text{vlastní vektory: pro } \lambda_1 = -2 : \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -r \\ -3r \\ r \end{bmatrix}, r \neq 0, \text{ pro } \lambda_{2,3} = 2 : \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{bmatrix}, s \neq 0.$$

Matice má pouze 2 lineárně nezávislé vlastní vektory, regulární matici \mathbf{P} nelze sestavit.

6.2 Spektrální rozklad symetrické matice.

Ke každé reálné symetrické matici \mathbf{A} existují ortogonální matice \mathbf{U} a diagonální matice \mathbf{D} tak, že

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T. \quad (6.9)$$

Sloupce $\mathbf{s}_i^{\mathbf{U}}$ matice \mathbf{U} jsou ortonormální vlastní vektory matice \mathbf{A} příslušné vlastním číslům λ_i uvedeným na diagonále matice \mathbf{D} . Vzorci (6.9) lze také dát podobu

$$\mathbf{D} = \mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{U}.$$

Mluvíme potom o *ortogonální diagonalizaci* reálné symetrické matice.

Příklad 1. Určete spektrální rozklad matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & -1 \\ -1, & 2 \end{bmatrix}.$$

Řešení: Matice \mathbf{A} má vlastní čísla $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, kterým odpovídají vlastní vektory

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektory \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 jsou ortogonální, ale nejsou ortonormální. Ortonormální vlastní vektory získáme normalizováním těchto vektorů:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_1 / \|\mathbf{x}_1\|_2 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{x}_2 / \|\mathbf{x}_2\|_2 \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nyní můžeme sestavit ortogonální matici

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Snadno si ověříme, že $\mathbf{A} = \mathbf{UDU}^T$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Příklad 2. Najděte co nejmenší část \mathcal{S} komplexní roviny \mathbb{C} , v níž se nachází všechna vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a potom sestavte ortogonální matici \mathbf{U} a diagonální matici \mathbf{D} tak, aby platilo $\mathbf{A} = \mathbf{UDU}^T$.

Řešení: Lokalizaci spektra provedeme pomocí *Geršgorinovy věty*. Ježto \mathbf{A} je reálná symetrická matice, platí $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} r_1 &= |-1| + |-1| = 2 \Rightarrow \mathcal{S}_1 = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| \leq 2\} = \langle -1, 3 \rangle; \\ r_2 &= |-1| + |-1| = 2 \Rightarrow \mathcal{S}_2 = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| \leq 2\} = \langle -1, 3 \rangle; \\ r_3 &= |-1| + |-1| = 2 \Rightarrow \mathcal{S}_3 = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| \leq 2\} = \langle -1, 3 \rangle. \end{aligned}$$

Odtud máme $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 = \langle -1, 3 \rangle$.

Nyní přistoupíme k výpočtu vlastních čísel a vektorů naší matice:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1-\lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) + (\lambda - 2) - (2 - \lambda) \\ &= (1-\lambda)(\lambda - 2)\lambda + 2(\lambda - 2) \\ &= (\lambda - 2)(-\lambda^2 + \lambda + 2) \\ &= -(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2. \end{aligned}$$

Matice má vlastní čísla $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Všimněme si, že $-1, 2 \in \langle -1, 3 \rangle$. Dostáváme tak diagonální matici

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_1 = -1 : \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & | & 0 \\ -1 & 2 & -1 & | & 0 \\ -1 & -1 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 3 & -3 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} r \\ r \\ r \end{bmatrix}, r \neq 0.$$

$$\lambda_{2,3} = 2 : \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & | & 0 \\ -1 & -1 & -1 & | & 0 \\ -1 & -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix}, s^2 + t^2 > 0.$$

Vlastnímu číslu -1 přísluší jeden lineárně nezávislý vlastní vektor $\mathbf{x}_1 = [1, 1, 1]^T$. Vlastnímu číslu 2 , které je dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice, odpovídají dva lineárně nezávislé vlastní vektory $\mathbf{x}_2 = [-1, 1, 0]^T$ (klademe $s = 1, t = 0$) a $\mathbf{x}_3 = [-1, 0, 1]^T$ (volíme $s = 0, t = 1$). Pro sestavení ortogonální matice \mathbf{U} musíme z vektorů $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ vytvořit Schmidtovým procesem ortonormální vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, tj. ortonormální bázi prostoru $\mathbb{R}^{3,1}$. Vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ jsou ortogonální, neboť patří různým vlastním číslům, takže stačí položit:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \mathbf{x}_1 / \|\mathbf{x}_1\|_2 \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right]^T; \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{x}_2 / \|\mathbf{x}_2\|_2 \\ &= \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right]^T.\end{aligned}$$

Zbývá tak jenom určit vektor \mathbf{u}_3 . To uděláme tak, že nejprve najdeme vektor $\tilde{\mathbf{x}}_3$, pro který platí $(\tilde{\mathbf{x}}_3, \mathbf{x}_1)_2 = 0, (\tilde{\mathbf{x}}_3, \mathbf{x}_2)_2 = 0$:

$$\tilde{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{x}_3 - \alpha_{31}\mathbf{x}_1 - \alpha_{32}\mathbf{x}_2, \quad \alpha_{31} = \frac{(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_1)_2}{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1)_2} = 0, \quad \alpha_{32} = \frac{(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2)_2}{(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2)_2} = \frac{1}{2}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_3 = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right]^T.$$

Položíme

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_3 &= \tilde{\mathbf{x}}_3 / \|\tilde{\mathbf{x}}_3\|_2 \\ &= \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right]^T.\end{aligned}$$

Ted' už můžeme sestavit i ortogonální matici a ověřit vztah (6.9):

$$\begin{aligned}\mathbf{U} &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Příklad 3. Buď \mathbf{A} ortogonální matice řádu n a $\mathbb{R}^{n,1}$ aritmetický vektorový prostor všech sloupcových vektorů dimenze n . Ukažte, že lineární transformace $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{n,1} \rightarrow \mathbb{R}^{n,1}$ definovaná pro každé $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n,1}$ předpisem

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^{n,1} \ni \mathbf{u} \longmapsto \mathbf{A}\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n,1},$$

zachovává euklidovský skalární součin a normu, tj. $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_2 = (\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v})_2$ a $\|\mathbf{u}\|_2 = \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|_2$.

Řešení: Euklidovský skalární součin na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^{n,1}$ můžeme vyjádřit vzorcem:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}, \mathbf{v})_2 &= \mathbf{u}^T \mathbf{v} \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.\end{aligned}$$

Pro skalární součin vektorů $\mathbf{A}\mathbf{u}$ a $\mathbf{A}\mathbf{v}$ potom platí:

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v})_2 = (\mathbf{A}\mathbf{u})^T (\mathbf{A}\mathbf{v}) = \mathbf{u}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{I} \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_2.$$

Zachování normy už je jenom důsledkem, neboť euklidovskou normu lze definovat pomocí skalárního součinu:

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_2}.$$

Cvičení:

1. Určete spektrální rozklad matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3, & 2 \\ 2, & 0 \end{bmatrix}$$

a využijte jej pak k výpočtu matic \mathbf{A}^{-1} a \mathbf{A}^3 .

2. Lokalizujte vlastní čísla matice
- \mathbf{A}
- a pak ji transformujte na diagonální matici:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 1 \\ 1, & 2, & 1 \\ 1, & 1, & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Najděte ortogonální transformaci
- $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z}$
- (
- \mathbf{P}
- je ortogonální matice), jež převádí kvadratickou formu

$$Q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$$

na lineární kombinaci čtverců.

4. Dokažte, že platí: Je-li matice
- \mathbf{A}
- ortogonální, pak
- $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$
- .

5. Existuje taková matice
- $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{2 \times 2}$
- , že
- $\det(\mathbf{A}) = 1$
- a není ortogonální?

6. Budiž dán nenulový vektor
- $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n,1}$
- . Dokažte, že

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{2}{\|\mathbf{w}\|_2^2} (\mathbf{w}\mathbf{w}^T)$$

je ortogonální matice.

Výsledky:

- 1.
- $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 4 \end{bmatrix}$
- ,
- $\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1, & 2 \\ 2, & 1 \end{bmatrix}$
- ; platí:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= \mathbf{U}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}^T \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1, & 2 \\ 2, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1, & 0 \\ 0, & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1, & 2 \\ 2, & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0, & 1/2 \\ 1/2, & -3/4 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^3 &= \mathbf{U}\mathbf{D}^3\mathbf{U}^T \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1, & 2 \\ 2, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1, & 2 \\ 2, & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 51, & 26 \\ 26, & 12 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Všechna vlastní čísla matice patří do množiny
- $\mathcal{S} \subset \langle -2, 4 \rangle$
- .

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}, & 0, & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}}, & -\frac{1}{\sqrt{3}}, & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}}, & \frac{2}{\sqrt{6}}, & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0, & 1, & 1 \\ 1, & 2, & 1 \\ 1, & 1, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{3}}, & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0, & -\frac{1}{\sqrt{3}}, & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{3}}, & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$3. \mathbf{P} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\sqrt{2}, & 0, & \sqrt{2} \\ 1, & -\sqrt{2}, & 1 \\ 1, & \sqrt{2}, & 1 \end{bmatrix}, \text{ tj. } \mathbf{x} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\sqrt{2}, & 0, & \sqrt{2} \\ 1, & -\sqrt{2}, & 1 \\ 1, & \sqrt{2}, & 1 \end{bmatrix} \mathbf{z}, \text{ respektive}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{2}z_1 + \sqrt{2}z_3 \right),$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(z_1 - \sqrt{2}z_2 + z_3 \right),$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left(z_1 + \sqrt{2}z_2 + z_3 \right).$$

Návod: určete spektrální rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^T$ matice kvadratické formy:

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{Pz})^T \mathbf{A} (\mathbf{Pz}) = \mathbf{z}^T (\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}) \mathbf{z} = \mathbf{z}^T \mathbf{D} \mathbf{z} = (2 - \sqrt{2}) z_1^2 + 2z_2^2 + (2 + \sqrt{2}) z_3^2.$$

4. Využijte: $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$, $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$.

5. Například

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & 1 \\ 1, & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Využijte, že $\|\mathbf{w}\|_2^2 = \mathbf{w}^T \mathbf{w}$.