

Matematika I A – ukázkový test 1 pro 2014/2015

1. Je dána soustava rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$

$$x - y + z = 1$$

$$x + y + 3z = 1$$

$$(2a - 1)x + (a + 1)y + z = 1 - a$$

- Napište *Frobeniovu větu* (existence i počet řešení).
- Vyšetřete počet řešení soustavy v závislosti na hodnotě parametru $a \in \mathbb{R}$.
- Najděte řešení zadané soustavy pro $a = 1$.

2. Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Definujte pojem *inverzní matice* ke čtvercové matici \mathbf{A} .
- Uveďte některou z nutných a postačujících podmínek existence inverzní matice. Ověřte splnění této podmínky pro zadanou matici \mathbf{A} .
- Vypočítejte \mathbf{A}^{-1} , $\det \mathbf{A}$, $\det(\mathbf{A}^{-1})$ a $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})$. Ověřte správnost matice \mathbf{A}^{-1} .

3. Je dána funkce $f(x) = \sqrt{2x+1} - \frac{x^2}{2}$.

- Určete definiční obor $D(f)$ a vypočítejte 1. a 2. derivaci této funkce. Napište rovnici tečny a rovnici normály ke grafu dané funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0 = 0$.
 - Pro tuto funkci napište Taylorův polynom $T_2(x)$ druhého stupně se středem $x_0 = 0$. Výsledku použijte pro výpočet přibližné hodnoty dané funkce f v bodě $x = 1/2$.
 - Napište Lagrangeův tvar zbytku $R_3(x)$. Odhadněte velikost chyby při výpočtu přibližné hodnoty funkce f v bodě $x = 1/2$ pomocí polynomu T_2 .
 - Určete největší možný interval $\langle 0, b \rangle$, na němž je $|R_3(x)| \leq 1/100$.
4. Je dána funkce $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

- Určete definiční obor funkce f a vypočítejte limity v jeho krajních bodech.
- Určete intervaly monotonie a lokální extrémy této funkce.
- Nalezněte asymptoty grafu funkce f . Graf načrtněte.

5. Vypočítejte následující integrály. Nezapomeňte na intervaly jejich existence.

a) $\int \ln^2 x \, dx$

b) $\int (\cos^2 \varphi + \cos^3 \varphi) \, d\varphi$

V úloze a) ověřte derivováním správnost výsledku.

6. a) Najděte primitivní funkci (též interval existence) k funkci $f(x) = \frac{1}{4+x^2}$.

b) Vypočítejte obsah obrazce, který je ohraničen osou x a křivkami

$$y = \frac{1}{4+x^2}, \quad x = 0, \quad x = 2.$$

c) Vypočítejte nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx$.

Matematika I B – ukázkový test 1 pro 2014/2015

- 1a) Definujte pojem *lineární závislost* skupiny vektorů $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$.
- b) Rozhodněte, zda vektory $\vec{u} = (1; 2; 3)$, $\vec{v} = (0; 1; 1)$ a $\vec{w} = (3; 2; 1)$ jsou lineárně nezávislé.
- c) Je-li to možné, vyjádřete vektor $\vec{a} = (1; 2; 1)$ jako lineární kombinaci vektorů \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} (tzn. určete koeficienty této lineární kombinace).

2. Jsou dány matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

- a) Zdůvodněte existenci a určete inverzní matici \mathbf{A}^{-1} . Ověřte správnost výsledku.
- b) Z rovnice $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$ vypočítejte neznámou matici \mathbf{X} .
- c) Vypočítejte matici $\mathbf{Y} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

3. Je dána funkce $f(x) = e^{2x-4}$.

- a) Vypočítejte derivace $f'(x)$, $f''(x)$.
- b) Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0 = 2$.
- c) Určete hodnotu druhé derivace $f''(2)$.
Napište Taylorův polynom 2. stupně $T_2(x)$ funkce f se středem $x_0 = 2$.
- d) Na základě znalosti hodnot $f(2)$, $f'(2)$, $f''(2)$ načrtněte graf zadané funkce v okolí bodu $x_0 = 2$. Do téhož obrázku zakreslete i tečnu z úlohy b).

4. Dána funkce $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$.

- a) Určete její definiční obor. Je funkce f sudá nebo lichá? (Odpověď zdůvodněte.)
- b) Vypočítejte derivaci funkce f a určete intervaly monotónie.
- c) Vypočítejte limity funkce f pro $x \rightarrow -\infty$ a $x \rightarrow +\infty$. Načrtněte graf.

5. Vypočítejte následující integrály. Nezapomeňte na intervaly jejich existence.

a) $\int r \sqrt{1 - r^2} \, dr$

b) $\int \frac{5x - 4}{x^2 - 8x + 12} \, dx$

V úloze a) ověřte derivováním správnost výsledku.

6. a) Vypočítejte integrál (uved'te též interval existence): $\int (3x + 2) \cos x \, dx$

b) Vypočítejte obsah obrazce, který je pro $x \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ ohraničen osou x a křivkou $y = (3x + 2) \cos x$.

Matematika I A – ukázkový test 2 pro 2014/2015

1. Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) Napište definici pojmů *vlastní číslo* a *vlastní vektor* matice.
- b) Napište *charakteristický polynom* zadané matice \mathbf{A} . Ověřte, že čísla $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ a $\lambda_3 = 3$ jsou kořeny příslušné charakteristické rovnice.
- c) Pro vlastní číslo λ_1 napište odpovídající soustavu rovnic pro výpočet vlastních vektorů. *Vlastní vektory* odpovídající tomuto vlastnímu číslu pak určete.

2. Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a & -1 \\ 2 & 2 & b & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

- a) Definujte pojmy *regulární* a *singulární matice*.
- b) Vypočítejte determinant matice \mathbf{A} . Určete hodnotu matice \mathbf{A} , je-li $a = 1$, $b = 2$.
- c) Pro které hodnoty parametrů $a, b \in \mathbb{R}$ má homogenní soustava $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$ pouze nulové řešení? Odpověď zdůvodněte.

3. a) Definujte pojem *limita posloupnosti* reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

b) Uveďte příklad posloupnosti, která nemá limitu. Odpověď zdůvodněte.

c) Vypočítejte limitu posloupnosti: $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n(n-2)} - \sqrt{n^2 - 3})$.

4. Je dána funkce $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.

- a) Určete definiční obor funkce f a průsečíky grafu funkce f s osami x a y .
- b) Určete intervaly monotónie a lokální extrémů.
- c) Vypočítejte limitu pro $x \rightarrow +\infty$. Načrtněte graf dané funkce na intervalu $\langle -1, +\infty \rangle$.

5. Vypočítejte následující integrály. Nezapomeňte na intervaly jejich existence. Ověřte derivováním správnost výsledku (stačí u jednoho integrálu).

a) $\int (x^2 + 2) \sin x \, dx$

b) $\int \frac{x^3}{\sqrt{16-x^4}} \, dx$

6. Je dána funkce $f(x) = \frac{6x+2}{(x^2-1)(x+3)}$.

- a) Vypočítejte integrál $\int f(x) \, dx$. Určete intervaly existence.
- b) Vypočítejte obsah obrazce, který je pro $x \in \langle 2, 4 \rangle$ ohraničen osou x a křivkou $y = f(x)$. Výsledek upravte.
- c) Rozhodněte výpočtem, zda konverguje nevlastní integrál $\int_1^{+\infty} f(x) \, dx$.

Matematika I B – ukázkový test 2 pro 2014/2015

1. Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned}x + y - 2z &= 1 \\2x + y &= -4 \\5x + y - 3z &= -13\end{aligned}$$

a) Pomocí Gaussova algoritmu nebo Cramerova pravidla určete řešení dané soustavy. Proved'te zkoušku.

b) Určete hodnotu matice této soustavy a hodnotu matice rozšířené.

2. Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Nalezněte vlastní čísla této matice. Zvolte jedno z nich a napište odpovídající soustavu rovnic pro výpočet vlastních vektorů. Vlastní vektory pak určete.

b) Zdůvodněte, zda k dané matici \mathbf{A} existuje matice inverzní \mathbf{A}^{-1} . Pokud ano, vypočítejte ji. Ověřte správnost výsledku.

3. a) Vypočítejte derivace 1. řádu daných funkcí:

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 5x + 8}, \quad g(x) = \operatorname{tg} x \cdot \ln(x^2 + 1).$$

b) Definujte, kdy posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme *klesající*.

c) Uveďte příklad klesající posloupnosti, která má limitu rovnou 1. Správnost odpovědi ověřte.

d) Vypočítejte limitu posloupnosti: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n - 3)(1 - 2n)}{5n^2 - 1}$.

4. Je dána funkce $f(x) = \sqrt{2x - 3} - x$.

a) Určete $D(f)$, vypočítejte derivaci a stanovte její definiční obor.

b) Určete intervaly, na nichž je funkce f rostoucí, resp. klesající.

c) Určete lokální extrémy funkce f a načrtněte její graf na intervalu $\langle 3/2; 6 \rangle$.

5. Vypočítejte následující integrály. Nezapomeňte na intervaly jejich existence. Ověřte derivováním správnost výsledku (stačí u jednoho integrálu).

a) $\int x^6 \ln x \, dx$

b) $\int \sin(2 - 3\varphi) \, d\varphi$

6. Je dána funkce $f(x) = \sin^3 x \cos x$.

a) Najděte neurčitý integrál funkce f (včetně intervalu existence).

b) Vypočítejte určitý integrál $\int_0^{\pi/2} f(x) \, dx$.

c) Určete střední hodnotu funkce f na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$,

tj. hodnotu $\mu = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx$.

Matematika I A – ukázkový test 3 pro 2014/2015

1. a) Vypočítejte determinant matice soustavy (a je reálný parametr):

$$\begin{aligned}x + 2y + az &= 0 \\x - 3y - az &= 8 \\3x - y + 2z &= 13\end{aligned}$$

- b) Vysvěte Cramerovo pravidlo. Určete hodnoty parametru a , pro něž lze při řešení zadané soustavy toto pravidlo použít. Odpověď zdůvodněte !
- c) Pro tyto hodnoty a vypočítejte neznámou y (v závislosti na parametru a).

2. a) Vypočítejte limitu funkce $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{\cos x - 1}$.

Pokud se rozhodnete pro l'Hospitalovo pravidlo, ověřte, zda ho lze použít.

- b) Vypočítejte limitu posloupnosti $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+3)^2 - 8n}{4n^2 - (2n+1)^2}$.

3. Je dána funkce $f(x) = \frac{x^2}{2} + \sqrt{5 - x^2}$.

- a) Vypočítejte derivaci $f'(x)$ a určete definiční obory $D(f)$, $D(f')$.

Napište rovnici tečny ke grafu této funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0 = -1$.

Výsledku použijte pro výpočet přibližné hodnoty funkce f v bodě $x_0 = -1.2$.

- b) Zdůvodněte existenci a nalezněte absolutní extrémy funkce f na intervalu $I = \langle -2, 2 \rangle$ (stanovte polohu extrémů a jejich hodnotu).

4. Je dána funkce $f(x) = e^{x^2+2x}$.

- a) Určete intervaly monotónie a intervaly, na kterých je funkce konvexní, resp. konkávní.

- b) Určete lokální extrémy. Najděte průsečíky grafu dané funkce s osami x , y .

- c) Vypočítejte limity pro $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$ a načrtněte graf.

5. Vypočítejte integrály a) $\int (\ln x + \sqrt{\ln x}) \frac{1}{x} dx$, b) $\int (2 - 3x) \cos 5x dx$.

Nezapomeňte na intervaly existence integrálů.

Ověřte derivováním správnost výsledku (stačí u jednoho integrálu).

6. a) Určete definiční obor a načrtněte graf funkce $y = \sqrt{x-1}$.

- b) Načrtněte obrazec ohraničený křivkami $y = \sqrt{x-1}$, $x = 0$, $y = 0$ a $y = 1$ a vypočítejte jeho plošný obsah.

- c) Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací tohoto obrazce kolem **osy** y .

Matematika I B – ukázkový test 3 pro 2014/2015

1. Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 5 \\ 2x + y + z &= 9 \\ 6x + 3y - 2z &= 2 \end{aligned}$$
 - a) Napište matici této soustavy a spočítejte její determinant.
 - b) Vysvětlete *Cramerovo pravidlo* pro řešení soustavy lineárních rovnic $A \cdot X = B$. Uveďte předpoklady, kdy lze toto pravidlo použít. Ověřte splnění těchto předpokladů pro zadanou soustavu.
 - c) Vypočítejte hodnotu neznámé x .

2. a) Vypočítejte limitu posloupnosti $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2 - 3n + 2}{9n^2 - (3n - 2)^2}$.
- b) Užitím l'Hospitalova pravidla vypočítejte limitu funkce $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x/2 - 3x^2}{2x - \sin 3x}$.

3. Je dána funkce $f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 + 1}$.
 - a) Najděte průsečíky grafu funkce f s osami x a y .
 - b) Vypočítejte derivaci této funkce a stanovte její definiční obor.
 - c) Napište rovnici tečny ke grafu této funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$, kde $x_0 = -1$. Pomocí rovnice tečny vypočítejte přibližně hodnotu funkce f v bodě $x = -0,8$.
 - d) Popište chování dané funkce v okolí bodu $x_0 = -1$, tj. zda je rostoucí nebo klesající, jak rychle (odhad sklonu tečny).

4. Je dána funkce $f(x) = (x - 2)e^x$.
 - a) Určete intervaly, na kterých je daná funkce rostoucí, případně klesající.
 - b) Určete intervaly, na nichž je tato funkce konvexní, případně konkávní.
 - c) Určete průsečíky grafu s osami. Vypočítejte funkční hodnoty ve významných bodech (lokální extrém, inflexní body) a načrtněte graf v intervalu $\langle -1, 2 \rangle$.

5. Vypočítejte integrály a) $\int_0^1 (4 - 3x)e^x dx$, b) $\int \frac{x^2}{x^3 + 8} dx$.
 Uveďte interval existence druhého integrálu.

6. a) Vypočítejte integrály $\int_0^1 \sqrt{x} dx$
 - b) Načrtněte obrazec, který je omezen osou x a grafy funkcí $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$. Vypočítejte obsah tohoto obrazce.
 - c) Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací tohoto obrazce kolem osy x .