

Matematika II, úroveň A – ukázkový test č. 1 (2015)

1. a) Napište postačující podmínku pro diferencovatelnost funkce n -proměnných v otevřené mn. $M \subset \mathbb{E}_n$. Zapište a načrtněte množinu D , ve které je diferencovatelná funkce $f(x, y) = \ln(xy - 4)$. Odpověď zdůvodněte.
 - b) Určete vektor \vec{s} , v jehož směru je derivace funkce f v bodě $A = [-2, -4]$ nulová. Zdůvodněte nebo nulovou hodnotu derivace ověřte výpočtem.
 - c) Určete diferenciál funkce f v bodě A . Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě dotyku $[-2, -4, ?]$. Výsledku použijte pro výpočet přibližné hodnoty funkce f v bodě $[-1, 8; -3, 9]$.
 - d) Napište rovnice izokřivek této funkce pro $k = 0, k = \ln 4$. Izokřivky načrtněte (tj. křivky $f(x, y) = k$).
2. a) Ověřte (všechny předpoklady), že rovnicí $F(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - y = 0$ je v okolí bodu $[x_0, y_0] = [1, 1]$ implicitně určena funkce jedné proměnné $y = f(x)$, která má spojitou 1. a 2. derivaci.
 - b) Určete hodnotu derivace $f'(1)$. Ověřte, že v bodě $x_0 = 1$ je splněna nutná podmínka pro lokální extrém funkce f .
 - c) Pomocí 2. derivace $f''(1)$ rozhodněte o extrému funkce f v bodě $x_0 = 1$.
3. a) Napište Fubiniho větu pro funkce dvou proměnných.
 - b) Načrtněte omezenou množinu $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y \geq 1/x, y \geq x/4, y \leq 2\}$.
 - c) Vypočítejte integrál $\iint_D xy \, dx \, dy$. Uveďte alespoň dva příklady možného fyzikálního významu tohoto integrálu, tj. hmotnost, statický moment nebo moment setrvačnosti, při jaké hustotě, vzhledem k jaké ose (to u momentu).
4. a) Načrtněte a slovně popište těleso M , které je omezené plochami $z = x^2 + y^2, z = 18 - x^2 - y^2$. Zakreslete průmět M_{xy} tělesa M do roviny $z = 0$.
 - b) Vypočítejte objem tohoto tělesa.
5. a) Načrtněte křivku $C : y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ mezi body $A = [0, 2], B = [2, 4]$. Navrhněte parametrizaci této křivky.
 - b) Vypočítejte hmotnost této křivky, je-li délková hustota $\rho(x, y) = x$.
 - c) Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (x + y, xy)$ působením podél této křivky C , je-li orientována od bodu B do bodu A .
6. a) Napište Gaussovu-Ostrogradského větu. Ověřte, že jsou splněny její předpoklady pro výpočet toku vektorového pole $\vec{f} = (x^3, z, y)$ plochou Q , která je povrchem tělesa $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3\}$. Plocha Q je vně orientovaná.
 - b) Načrtněte plochu Q a vypočítejte tok daného pole \vec{f} touto plochou.

Matematika II, úroveň B – ukázkový test č. 1 (2015)

1. a) Vypočítejte parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $f(x, y) = 2y - y^2 - xe^x$.
 b) Vyšetřete lokální extrémů funkce f (určete jejich polohu, typ a funkční hodnotu).
2. a) Vypočítejte parciální derivace 1. řádu funkce $F(x, y) = x^2y - x^3 - 2\sqrt{y} + 1$.
 b) Ověřte (všechny předpoklady), že rovnicí $F(x, y) = 0$ je v okolí bodu $[x_0, y_0] = [1; 4]$ implicitně určena funkce jedné proměnné $y = f(x)$, která má spojitou derivaci.
 c) Určete hodnotu derivace $f'(1)$. Popište chování funkce $y = f(x)$ v okolí bodu $x_0 = 1$, tj. rostoucí, resp. klesající, jak rychle (odhad sklonu tečny).
 d) Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[1; 4]$. Výsledku použijte pro výpočet přibližné hodnoty funkce f v bodě $x = 0,8$. Tečnu načrtněte.
3. a) Načrtněte v \mathbb{E}_2 množinu M , která je omezena křivkami $x = 2$, $y = x$, $y = \frac{1}{x}$. Nezapomeňte na popis os, měřítko, průsečíky křivek.
 b) Vypočítejte dvojný integrál $\iint_M x^2 y \, dx \, dy$.
 Uveďte alespoň dva příklady fyzikálního významu tohoto integrálu (hmotnost, statický moment nebo moment setrvačnosti, při jaké hustotě, k jaké ose).
4. a) Načrtněte těleso D omezené plochami o rovnicích $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = x^2 + y^2 + 4$. Popište toto těleso (jeho hraniční plochy).
 Zakreslete též průmět D_{xy} tělesa D do roviny $z = 0$.
 b) Vypočítejte objem tohoto tělesa.
5. a) C_1 je část křivky $y = x^2$ s počátečním bodem $A = [0, 0]$ a koncovým bodem $B = [2, 4]$. Navrhněte parametrizaci křivky a vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (x^2, xy)$ působením po křivce C_1 (tj. vypočítejte křivkový integrál $\int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{s}$).
 b) Křivka C_2 je úsečka AB , kde $A = [2, 0]$, $B = [1, 3]$. Navrhněte parametrizaci křivky C_2 a vypočítejte její hmotnost, je-li délková hustota $\rho(x, y) = x^2 + y^2$ (tj. křivkový integrál $\int_{C_2} \rho(x, y) \, ds$).
6. Je dána množina $M = \{[x, y] : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, křivka C je záporně orientovaná hranice této množiny.
 a) Načrtněte množinu M , vyznačte na ní křivku C (včetně dané orientace).
 b) Vypočítejte cirkulaci vektorového pole $\vec{f} = (xy, x^2)$ podél křivky C , tj. $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$. *Doporučení:* K výpočtu lze použít Greenovu větu.

1. a) Zapište a načrtněte v \mathbb{E}_2 množinu D , ve které je diferencovatelná funkce $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$. Odpověď zdůvodněte (postačující podm. pro diferencovatelnost). Načrtněte a popište graf této funkce.
- b) Vypočítejte derivaci funkce f v bodě $A = [3, -4]$ ve směru, který je určen vektorem $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$, kde bod $B = [2, 6]$. Popište chování dané funkce f v bodě A v tomto směru, tj. rostoucí, resp. klesající, jak rychle (odhad sklonu tečny).
- c) Je tento vektor \vec{s} směrem, ve kterém daná funkce v bodě A nejrychleji roste? Odpověď zdůvodněte! Určete derivaci ve směru maximálního růstu v bodě A .
- d) Napište rovnici tečné roviny, její normálový vektor a parametrické vyjádření normály ke grafu funkce f v bodě dotyku $[3, -4, ?]$.
2. a) Napište postačující podmínky pro to, aby funkce $f(x, y)$ měla v bodě $[x_0, y_0]$ lokální minimum.
- b) Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6 \ln x$. Nezapomeňte uvést funkční hodnoty.
3. a) Načrtněte množinu $M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + 4y^2 \leq 4, y \geq 0\}$. Transformujte integrál $\iint_M y^2 dx dy$ do zobecněných polárních souřadnic. Vypočítejte Jacobián této transformace.
- b) Integrál $\iint_M y^2 dx dy$ vypočítejte.
4. Je dáno těleso $D = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; 0 \leq x \leq 3, x \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq xy\}$.
 - a) Načrtněte průmět D_{xy} tělesa D do roviny $z = 0$. Vypočítejte integrál $\iiint_D (x^2 + y^2) z dx dy dz$.
 - b) Uveďte alespoň dva příklady možného fyzikálního významu tohoto integrálu (hmotnost, statický moment nebo moment setrvačnosti, při jaké hustotě, vzhledem k jaké ose či rovině.)
5. a) Napište postačující podmínky pro to, aby vektorové pole $\vec{f} = (U, V)$ bylo potenciální v oblasti $G \subset \mathbb{E}_2$. Ověřte, že vektorové pole $\vec{f} = \left(\frac{y^2}{x} + x^2, 2y \ln x - \cos y\right)$ je potenciální. Uveďte největší možnou oblast.
- b) Napište dvě podmínky, ze kterých počítáme podle definice potenciál φ potenciálního vektorového pole $\vec{f} = (U, V)$. Vypočítejte potenciál daného vektorového pole \vec{f} z části a).
- c) Užijte potenciálu k výpočtu křivkového integrálu daného pole \vec{f} podél křivky C s počátečním bodem $A = [1, \pi/2]$ a koncovým bodem $B = [2, 0]$.
6. a) Načrtněte plochu $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z = \sqrt{x^2 + y^2}, z \leq 2, y \geq 0\}$. Navrhněte její parametrizaci a napište vektor kolmý v bodě $[x, y, z]$ k ploše Q při této parametrizaci.
- b) Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{f} = (-y, x, z)$ plochou Q orientovanou normálovým vektorem, který svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ ostrý úhel.

1. a) Určete definiční obor $D(f)$ funkce $f(x, y) = \sqrt{x - y^2}$. (Napište podmínky a $D(f)$ načrtněte).
 - b) Vypočítejte gradient funkce f v bodě $A = [5, -1]$. Jaký je význam gradientu v bodě A ?
 - c) Napište rovnici tečné roviny, její normálový vektor a parametrické vyjádření normály ke grafu funkce f v bodě dotyku $[5, -1, ?]$.
 - d) Vypočítejte derivaci funkce f v bodě $A = [5, -1]$ ve směru daném vektorem $\vec{s} = (3, -4)$. Popište chování dané funkce f v bodě A v tomto směru, tj. rostoucí, resp. klesající, jak rychle (odhad sklonu tečny).
2. Je dána funkce $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2x^2 - 4xy$.
 - a) Vypočítejte parciální derivace 1. a 2. řádu funkce f .
 - b) Vyšetřete lokální extrémy funkce f (najděte jejich polohu, určete typ a napište funkční hodnotu).
3. a) Načrtněte množinu $D \subset \mathbb{E}_2$, která je popsána nerovnicemi $x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$.
 - b) Určete hmotnost rovinné desky tvaru této množiny D , je-li plošná hustota $\rho(x, y) = xy$.
4. a) Načrtněte těleso $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 9 - x^2 - y^2\}$. Zakreslete též průmět M_{xy} tělesa M do roviny $z = 0$.
 - b) Vypočítejte objem tohoto tělesa.
5. Křivka C (část šroubovice) je popsána parametrizací $X = P(t)$: $x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = t, t \in \langle 0, \pi \rangle$.
 - a) Napište vektor $\dot{P}(t)$ a vypočítejte jeho délku $\|\dot{P}(t)\|$.
 - b) Vypočítejte křivkový integrál skalární funkce $\int_C f ds$, kde $f(x, y, z) = 2z + 1$.
6. a) Načrtněte plochu Q (část roviny): $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x + 2y + z = 6, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Navrhněte její parametrizaci a napište vektor kolmý k ploše Q při této parametrizaci.
 - b) Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{f} = (z, y, 2x)$ touto plochou, je-li orientována normálovým vektorem, který svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ ostrý úhel.

1. a) Vyšetřete lokální extrémů funkce $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.
Nezapomeňte uvést funkční hodnoty.
- b) Zdůvodněte existenci a najděte absolutní extrémů funkce $f(x, y) = x + \ln x - y^2$ na množině $M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y = x + 1, 1/4 \leq x \leq 1\}$.
2. a) Ověřte, že rovnicí $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ je implicitně určena funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$, jejíž graf prochází bodem $A = [1, 2, -1]$ a která má spojité parciální derivace 1. řádu v okolí bodu $[x_0, y_0] = [1, 2]$.
- b) Určete hodnoty parciálních derivací $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ v bodě $[1, 2]$. Popište chování dané funkce v okolí bodu $[1, 2]$ v kladném směru osy x a v kladném směru osy y , tj. rostoucí, resp. klesající, jak rychle (odhad sklonu tečny).
- c) Určete derivaci funkce f v bodě $[1, 2]$ ve směru $\vec{u} = (-1, 2)$. Je vektor \vec{u} směrem, ve kterém funkce f v bodě A nejrychleji klesá? Zdůvodněte!
- d) Napište rovnici tečné roviny a rovnici normály ke grafu funkce f v bodě A .
3. a) Načrtněte množinu $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x \geq 1, y \leq 1, y \geq \ln x\}$.
- b) Integrál $\iint_D \frac{1}{x} dx dy$ převed'te na dvojnásobný, a to oběma způsoby (s elementárním oborem integrace vzhledem k ose x , resp. vzhledem k ose y).
- c) Zvolte jednu z možností a daný dvojný integrál vypočítejte.
4. Načrtněte a pojmenujte těleso $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$. Určete jeho hmotnost, je-li hustota $\rho(x, y, z) = z$.
5. Načrtněte kladně orientovanou křivku $C = \{[x, y] \in E_2; x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\}$.
 - a) Napište tvrzení Greenovy věty. Pomocí tohoto vztahu vypočítejte cirkulaci vektorového pole $\vec{f} = (3x - y, x)$ po dané orientované křivce C (tj. křivkový integrál $\oint_C \vec{f} \cdot \vec{ds}$).
 - b) Tento křivkový integrál vypočítejte přímým výpočtem, tj. pomocí parametrizace dané křivky C .
6. a) Je dána plocha Q (část hyperbolického paraboloidu):
 $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : z = xy, x^2 + y^2 \leq R^2\}$, kde $R > 0$ je konstanta.
Do tří samostatných obrázků načrtněte křivky, které vzniknou v řezech grafu funkce $z = xy$ rovinou $z = 1$, rovinou $x - y = 0$ a rovinou $x + y = 0$.
- b) Navrhněte vhodnou parametrizaci plochy Q , napište vektor kolmý k ploše Q a vypočítejte jeho délku (při této parametrizaci).
- c) Určete plošný obsah plochy Q .

1. Je dána funkce $z = f(x, y) = \ln(6 - x^2 - y^2)$.
 - a) Určete definiční obor $D(f)$. (Napište podmínky a $D(f)$ načrtněte.)
 - b) Vypočítejte parciální derivace 1. řádu funkce f v bodě $A = [1, 2]$. Popište chování dané funkce v okolí bodu A (funkce je rostoucí, resp. klesající, v jakém směru a odhadněte, jak rychle, tj. sklon tečny).
 - c) Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě dotyku $[1, 2, ?]$. Výsledku použijte pro výpočet přibližné hodnoty funkce f v bodě $[1.1, 1.9]$.
 - d) Napište směr, ve kterém funkce f v bodě A nejrychleji klesá. Určete derivaci funkce f v bodě A v tomto směru.

2. a) Vypočítejte parciální derivace 1. řádu funkce $g(x, y) = \left(x^3 + \frac{y}{4}\right) e^{2x}$.
 - b) Ověřte (všechny předpoklady), že rovnicí $F(x, y) = x^3 + 2y^2 + 2xy + y = 0$ je v okolí bodu $[x_0, y_0] = [-1; 1]$ implicitně určena funkce jedné proměnné $y = f(x)$, která má spojitou derivaci.
 - c) Určete hodnotu derivace $f'(-1)$. Popište chování funkce $y = f(x)$ v okolí bodu $x_0 = -1$, tj. rostoucí, resp. klesající, jak rychle (odhad sklonu tečny).
 - d) Napište rovnici tečny a rovnici normály ke grafu funkce f v bodě $[-1; 1]$. Obě přímky načrtněte do jednoho obrázku.

3. a) Načrtněte množinu $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y \leq x + 2, y \geq x^2, x \geq 0\}$.
 Nezapomeňte na popis os, měřítko, průsečíky křivek. Uveďte dva příklady fyzikálního významu integrálu $\iint_D 2x(y+1) dx dy$ (tj. hmotnost, statický moment, při jaké hustotě, u momentu k jaké ose).
 - b) Vypočítejte dvojný integrál z úlohy a).

4. a) Načrtněte těleso $M = \{[x, y, z]; x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$. Popište toto těleso (jeho hraniční plochy). Vyznačte též průmět M_{xy} tělesa M do roviny $z = 0$.
 - b) Vypočítejte hmotnost tělesa M , má-li hustotu $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

5. a) Pomocí křivkového integrálu vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (2x, 2y)$ působící podél úsečky AB orientované od bodu $A = [1, 3]$ do bodu $B = [2, 2]$.
 - b) Určete potenciál φ pole $\vec{f} = (2x, 2y)$. Pomocí potenciálu vypočítejte práci, kterou vykoná síla \vec{f} podél libovolné křivky s počátečním bodem $A = [1, 3]$ a koncovým bodem $B = [2, 2]$.

6. Je dána plocha $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : z = 4 - x^2 - y^2; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.
 - a) Načrtněte plochu Q a její průmět B do roviny $z = 0$. Navrhněte vhodnou parametrizaci plochy Q a napište vektor k ní kolmý (při této parametrizaci).
 - b) Určete hmotnost plochy Q , je-li její plošná hustota $\rho(x, y, z) = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$. Návod: Při parametrizaci $z = g(x, y)$, $[x, y] \in B$ je $m = \iint_Q \rho(x, y, z) dp = \iint_B \rho(x, y, g(x, y)) \|P_x \times P_y\| dx dy$.