Matematika II, úroveň A – ukázkový test č. 1 (2017)

1. a) Napište postačující podmínku pro diferencovatelnost funkce n-proměnných v otevřené mn. $M \subset \mathbb{E}_n$. Zapište a načrtněte množinu D, ve které je diferencovatelná funkce $f(x,y) = \ln(xy-4)$. Odpověď zdůvodněte.
   b) Určete vektor $\vec{s}$, v jehož směru je derivace funkce f v bodě $A = [-2,\ -4]$ nulová. Odpověď zdůvodněte nebo nulovou hodnotu derivace ověřte výpočtem.
   c) Určete diferenciál funkce f v bodě A. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě dotyku $[-2,-4,?]$. Výsledku použijte pro výpočet přibližné hodnoty funkce f v bodě $[-1,8;\ -3,9]$.
   d) Napište rovnice izokřivek této funkce pro $k = 0, k = \ln 4$. Izokřivky načrtněte (tj. křivky $f(x,y) = k$).
2. a) Ověřte (všechny předpoklady), že rovnicí $F(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - y = 0$ je v okolí bodu $[x_0, y_0] = [1,1]$ implicitně určena funkce jedné proměnné $y = f(x)$, která má spojitou 1. a 2. derivaci.
   b) Určete hodnotu derivace $f'(1)$. Ověřte, že v bodě $x_0 = 1$ je splněna nutná podmínka pro lokální extrém funkce f.
   c) Pomocí 2. derivace $f''(1)$ rozhodněte o extrému funkce f v bodě $x_0 = 1$.
3. a) Napište Fubiniho větu pro funkce dvou proměnných.
   b) Načrtněte omezenou množinu $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ y \geq 1/x,\ y \geq x/4,\ y \leq 2\}$.
   c) Vypočítejte integrál $\iint_D xy\ dx\,dy$. Uveďte alespoň dva příklady možného fyzikálního významu tohoto integrálu, tj. hmotnost, statický moment nebo moment setrvačnosti, při jaké hustotě, vzhledem k jaké ose (to u momentu).
4. a) Načrtněte a slovně popište těleso M, které je omezené plochami $z = x^2 + y^2,\ z = 18 - x^2 - y^2$. Zakreslete průmět M_{xy} tělesa M do roviny $z = 0$.
   b) Vypočítejte objem tohoto tělesa.
5. a) Načrtněte křivku $C : y = \dfrac{1}{2}\,x^2 + 2$ mezi body $A = [0,2]$, $B = [2,4]$. Navrhněte parametrizaci této křivky.
   b) Vypočítejte hmotnost této křivky, je-li délková hustota $\varrho(x,y) = x$.
   c) Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (x+y\,,\,xy)$ působením podél této křivky C, je-li orientována od bodu B do bodu A.
6. a) Napište Gaussovu-Ostrogradského větu. Ověřte, že jsou splněny její předpoklady pro výpočet toku vektorového pole $\vec{f} = (x^3, z, y)$ plochou Q, která je povrchem tělesa $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leqq z \leqq 3\}$. Plocha Q je vně orientovaná.
   b) Načrtněte plochu Q a vypočítejte tok daného pole $\vec{f}$ touto plochou.

Matematika II, úroveň B – ukázkový test č. 1 (2017)

1. Je dána funkce $f(x, y) = 2y - y^2 - xe^x$.

   a) Vypočítejte parciální derivace 1. řádu této funkce. Určete diferenciál funkce f v bodě $A = [2, 3]$.

   b) Vyšetřete lokální extrémy zadané funkce f (určete jejich polohu, typ a funkční hodnotu).

2. a) Stavová rovnice ideálního plynu zní: $p \cdot V = C \cdot T$, kde p je tlak, V je objem, T je teplota a C je konstanta. Ověřte, že $\dfrac{\partial p}{\partial V} \cdot \dfrac{\partial V}{\partial T} \cdot \dfrac{\partial T}{\partial p} = -1$.

   b) Ověřte (všechny předpoklady), že rovnicí $F(x, y) = x^2y - x^3 - 2\sqrt{y} + 1 = 0$ je v okolí bodu $[x_0, y_0] = [1;\ 4]$ implicitně určena funkce jedné proměnné $y = f(x)$, která má spojitou derivaci.

   c) Určete hodnotu derivace $f'(1)$. Popište chování funkce $y = f(x)$ v okolí bodu $x_0 = 1$, tj. rostoucí, resp. klesající, jak rychle (odhad sklonu tečny).

   d) Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[1;\ 4]$. Výsledku použijte pro výpočet přibližné hodnoty funkce f v bodě $x = 0,8$. Tečnu načrtněte.

3. a) Načrtněte v $\mathbb{E}_2$ množinu M, která je omezena křivkami $x = 2$, $y = x$, $y = \dfrac{1}{x}$. Nezapomeňte na popis os, měřítko, průsečíky křivek.

   b) Vypočítejte dvojný integrál $\iint_M x^2\, y\, dx\, dy$.
   Uveďte alespoň dva příklady fyzikálního významu tohoto integrálu (hmotnost, statický moment nebo moment setrvačnosti, při jaké hustotě, k jaké ose).

4. a) Načrtněte těleso D omezené plochami o rovnicích $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = x^2 + y^2 + 4$. Popište toto těleso (jeho hraniční plochy).
   Zakreslete též průmět D_{xy} tělesa D do roviny $z = 0$.

   b) Vypočítejte objem tohoto tělesa.

5. a) Křivka C je úsečka AB, kde $A = [2, 0]$, $B = [1, 3]$. Navrhněte parametrizaci křivky C a vypočítejte její hmotnost, je-li délková hustota $\varrho(x, y) = x^2 + y^2$ (tj. křivkový integrál $\int_C \rho(x, y)\, ds$).

   b) Vektorové pole $\vec{f} = (\dfrac{y^2}{x},\ 2y \ln x - \sqrt{y})$ je potenciální v 1. kvadrantu (nemusíte ověřovat). Určete potenciál φ tohoto pole. Pomocí potenciálu vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f}$ podél libovolné křivky v 1. kvadrantu s počátečním bodem $A = [1, 2]$ a koncovým bodem $B = [\mathrm{e}, 4]$.

6. Je dána množina $M = \{[x, y] :\ x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$, křivka C je záporně orientovaná hranice této množiny.

   a) Načrtněte množinu M, vyznačte na ní křivku C (včetně dané orientace).

   b) Vypočítejte cirkulaci vektorového pole $\vec{f} = (xy,\ x^2)$ podél křivky C, tj. $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$. *Doporučení:* K výpočtu lze použít Greenovu větu.

1. a) Zapište a načrtněte v $\mathbb{E}_2$ množinu D, ve které je diferencovatelná funkce $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-9}$. Odpověď zdůvodněte (postačující podm. pro diferencovatelnost). Načrtněte a popište graf této funkce.

   b) Vypočítejte derivaci funkce f v bodě $A = [3,-4]$ ve směru, který je určen vektorem $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$, kde bod $B = [2,6]$. Popište chování dané funkce f v bodě A v tomto směru, tj. rostoucí, resp. klesající, jak rychle (odhad sklonu tečny).

   c) Je tento vektor $\vec{s}$ směrem, ve kterém daná funkce v bodě A nejrychleji roste ? Odpověď zdůvodněte ! Určete derivaci ve směru maximálního růstu v bodě A.

   d) Napište rovnici tečné roviny, její normálový vektor a parametrické vyjádření normály ke grafu funkce f v bodě dotyku $[3,-4,\,?]$.

2. a) Vyšetřete, zda funkce $u(x,y) = \mathrm{e}^{-x}\cos y - \mathrm{e}^{-y}\cos x$ je řešením diferenciální rovnice $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (Laplaceova rovnice).

   b) Napište postačující podmínky pro to, aby funkce $f(x,y)$ měla v bodě $[x_0\, y_0]$ lokální minimum. Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2+xy+y^2-6\ln x$.

3. a) Načrtněte množinu $M = \left\{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2+4y^2 \le 4,\ y \ge 0\right\}$.
   Transformujte integrál $\iint_M y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ do zobecněných polárních souřadnic.
   Vypočítejte Jacobián této transformace.

   b) Integrál $\iint_M y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ vypočítejte.

4. Je dáno těleso $D = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3; 0 \le x \le 3,\ x \le y \le 3,\ 0 \le z \le xy\right\}$.

   a) Načrtněte průmět D_{xy} tělesa D do roviny $z = 0$.
   Vypočítejte integrál $\iiint_D (x^2+y^2)\,z\ \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

   b) Uveďte alespoň dva příklady možného fyzikálního významu tohoto integrálu (hmotnost, statický moment nebo moment setrvačnosti, při jaké hustotě, vzhledem k jaké ose či rovině.)

5. a) Napište postačující podmínky pro to, aby vektorové pole $\vec{f} = (U,V)$ bylo potenciální v oblasti $G \subset \mathbb{E}_2$. Ověřte, že vektorové pole
   $\vec{f} = (\dfrac{y^2}{x} + x^2,\ 2y\ln x\ - \cos y)$ je potenciální. Uveďte největší možnou oblast.

   b) Napište dvě podmínky, ze kterých počítáme podle definice potenciál φ potenciálního vektorového pole $\vec{f} = (U,V)$.
   Vypočítejte potenciál daného vektorového pole $\vec{f}$ z části a).

   c) Užijte potenciálu k výpočtu křivkového integrálu daného pole $\vec{f}$ podél křivky C s počátečním bodem $A = [1,\pi/2]$ a koncovým bodem $B = [2,0]$.

6. a) Načrtněte plochu $Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3\,;\ z = \sqrt{x^2+y^2},\ z \le 2,\ y \ge 0\}$.
   Navrhněte její parametrizaci a napište vektor kolmý v bodě $[x,y,z]$ k ploše Q při této parametrizaci.

   b) Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{f} = (-y,x,z)$ plochou Q orientovanou normálovým vektorem, který svírá s vektorem $\vec{k} = (0,0,1)$ ostrý úhel.

Matematika II, úroveň B – ukázkový test č. 2 (2017)

1. a) Určete a načrtněte množinu D, ve které má funkce $f(x, y) = \sqrt{x - y^2}$ spojité parciální derivace 1. řádu..

   b) Vypočítejte gradient funkce f v bodě $A = [5, -1]$. Jaký je význam gradientu v bodě A ?

   c) Napište rovnici tečné roviny, její normálový vektor a parametrické vyjádření normály ke grafu funkce f v bodě dotyku $[5, -1, ?]$.

   d) Vypočítejte derivaci funkce f v bodě $A = [5, -1]$ ve směru daném vektorem $\vec{s} = (3, -4)$. Popište chování dané funkce f v bodě A v tomto směru, tj. rostoucí, resp. klesající, jak rychle (odhad sklonu tečny).

2. Je dána funkce $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2x^2 - 4xy$.

   a) Vypočítejte parciální derivace 1. a 2. řádu funkce f.

   b) Vyšetřete lokální extrémy funkce f (najděte jejich polohu, určete typ a napište funkční hodnotu).

3. a) Načrtněte množinu $D \subset \mathbb{E}_2$, která je popsána nerovnicemi $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

   b) Určete hmotnost rovinné desky tvaru této množiny D, je-li plošná hustota $\rho(x, y) = xy$.

4. a) Načrtněte těleso $M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq 9 - x^2 - y^2\right\}$. Zakreslete též průmět M_{xy} tělesa M do roviny $z = 0$.

   b) Vypočítejte objem tohoto tělesa.

5. a) Křivka C (část šroubovice) je popsána parametrizací $X = P(t)$: $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = t$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$. Vypočítejte křivkový integrál skalární funkce $\int_C f\, \mathrm{d}s$, kde $f(x, y, z) = 2z + 1$.

   b) K je část křivky $y = x^2$ s počátečním bodem $A = [1, ?]$ a koncovým bodem $B = [2, ?]$. Navrhněte parametrizaci křivky a vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (\sqrt[3]{x}, xy)$ působením po křivce K (tj. vypočítejte křivkový integrál $\int_K \vec{f} \cdot d\vec{s}$).

6. a) Načrtněte plochu Q (část roviny): $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ x + 2y + z = 6,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$. Navrhněte její parametrizaci a napište vektor kolmý k ploše Q při této parametrizaci.

   b) Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{f} = (z, y, 2x)$ touto plochou, je-li orientována normálovým vektorem, který svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ ostrý úhel.

Matematika II, úroveň A – ukázkový test č. 3 (2017)

1. a) Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.
   Nezapomeňte uvést funkční hodnoty.

   b) Zdůvodněte existenci a najděte absolutní extrémy funkce $f(x,y) = x + \ln x - y^2$ na množině $M = \{\, [x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ y = x+1,\ 1/4 \leq x \leq 1\}$.

2. a) Ověřte, že rovnicí $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ je implicitně určena funkce dvou proměnných $z = f(x,y)$, jejíž graf prochází bodem $T = [1,2,-1]$ a která má spojité parciální derivace 1. řádu v okolí bodu $[x_0,y_0] = [1,2]$.

   b) Určete hodnoty parciálních derivací $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ v bodě $[1,2]$. Popište chování dané funkce v okolí bodu $[1,2]$ v kladném směru osy x a v kladném směru osy y, tj. rostoucí, resp. klesající, jak rychle (odhad sklonu tečny).

   c) Určete derivaci funkce f v bodě $[1,2]$ ve směru $\overrightarrow{u} = (-1,2)$. Je vektor $\overrightarrow{u}$ směrem, ve kterém funkce f v bodě A nejrychleji klesá ? Zdůvodněte !

   d) Určete diferenciál funkce f v bodě $[1,2]$. Napište rovnici tečné roviny a rovnici normály ke grafu funkce f v bodě T.

3. a) Načrtněte množinu $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ x \geqq 1,\ y \leqq 1,\ y \geqq \ln x\}$.

   b) Integrál $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ převeďte na dvojnásobný, a to oběma způsoby (s elementárním oborem integrace vzhledem k ose x, resp. vzhledem k ose y).

   c) Zvolte jednu z možností a daný dvojný integrál vypočítejte.

4. Načrtněte a pojmenujte těleso $M = \{\, [x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq 0\}$.
   Určete jeho hmotnost, je-li hustota $\rho(x,y,z) = z$.

5. Načrtněte kladně orientovanou křivku $C = \{[x,y] \in E_2\,;\ x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1\}$.

   a) Napište tvrzení Greenovy věty. Pomocí tohoto vztahu vypočítejte cirkulaci vektorového pole $\vec{f} = (3x - y,\, x)$ po dané orientované křivce C (tj. křivkový integrál $\displaystyle\oint_C \vec{f} \cdot \vec{ds}$).

   b) Tento křivkový integrál vypočítejte přímým výpočtem, tj. pomocí parametrizace dané křivky C.

6. a) Je dána plocha Q (část hyperbolického paraboloidu):
   $Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : z = xy, x^2 + y^2 \leq R^2\}$, kde $R > 0$ je konstanta.
   Do tří samostatných obrázků načrtněte křivky, které vzniknou v řezech grafu funkce $z = xy$ rovinou $z = 1$, rovinou $x - y = 0$ a rovinou $x + y = 0$.

   b) Navrhněte vhodnou parametrizaci plochy Q, napište vektor kolmý k ploše Q a vypočítejte jeho délku (při této parametrizaci).

   c) Určete plošný obsah plochy Q.

Matematika II, úroveň B – ukázkový test č. 3 (2017)

1. Je dána funkce $z = f(x, y) = \ln(6 - x^2 - y^2)$.

   a) Určete a načrtněte definiční obor $D(f)$. Napište rovnice izokřivek této funkce pro $k = 0, k = \ln 2$. Izokřivky načrtněte (tj. křivky $f(x, y) = k$).

   b) Vypočítejte parciální derivace 1. řádu funkce f v bodě $A = [1, 2]$. Popište chování dané funkce v okolí bodu A (funkce je rostoucí, resp. klesající, v jakém směru a odhadněte, jak rychle, tj. sklon tečny).

   c) Určete diferenciál funkce f v bodě A. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě dotyku $[1, 2, ?]$. Výsledku použijte pro výpočet přibližné hodnoty funkce f v bodě $[1.1,\ 1.9]$.

   d) Napište směr, ve kterém funkce f v bodě A nejrychleji klesá. Určete derivaci funkce f v bodě A v tomto směru.

2. a) Vypočítejte parciální derivace 1. řádu funkce $g(x, y) = \left(\dfrac{x^3}{2} - \dfrac{2}{y^3}\right) \mathrm{e}^{2x}$.

   b) Ověřte (všechny předpoklady), že rovnicí $F(x, y) = x^3 + 2y^2 + 2xy + y = 0$ je v okolí bodu $[x_0, y_0] = [-1; 1]$ implicitně určena funkce jedné proměnné $y = f(x)$, která má spojitou derivaci.

   c) Určete hodnotu derivace $f'(-1)$. Popište chování funkce $y = f(x)$ v okolí bodu $x_0 = -1$, tj. rostoucí, resp. klesající, jak rychle (odhad sklonu tečny).

   d) Napište rovnici tečny a rovnici normály ke grafu funkce f v bodě $[-1; 1]$. Obě přímky načrtněte do jednoho obrázku.

3. a) Načrtněte množinu $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2\,;\ y \leqq x + 2,\ y \geqq x^2,\ x \geqq 0\}$. Nezapomeňte na popis os, měřítko, průsečíky křivek. Uveďte dva příklady fyzikálního významu integrálu $\iint_D 2x(y+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (tj. hmotnost, statický moment, při jaké hustotě, u momentu k jaké ose).

   b) Vypočítejte dvojný integrál z úlohy a).

4. a) Načrtněte těleso $M = \{[x, y, z];\ x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$. Popište toto těleso (jeho hraniční plochy). Vyznačte též průmět M_{xy} tělesa M do roviny $z = 0$.

   b) Vypočítejte hmotnost tělesa M, má-li hustotu $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

5. a) Pomocí křivkového integrálu vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (2x,\ 2x - y)$ působící podél úsečky AB orientované od bodu $A = [1, 3]$ do bodu $B = [2, 2]$.

   b) Určete potenciál φ pole $\vec{f} = (2x,\ 2x - y)$. Pomocí potenciálu vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f}$ podél libovolné křivky s počátečním bodem $A = [1, 3]$ a koncovým bodem $B = [2, 2]$.

6. Je dána plocha $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : z = 4 - x^2 - y^2;\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0\}$.

   a) Načrtněte plochu Q a její průmět B do roviny $z = 0$. Navrhněte vhodnou parametrizaci plochy Q a napište vektor k ní kolmý (při této parametrizaci).

b) Určete hmotnost plochy Q, je-li její plošná hustota $\rho(x, y, z) = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$.