Matematika II, úroveň A – ukázkový test č. 1 (2018)

1. a) Napište postačující podmínku pro diferencovatelnost funkce n-proměnných v otevřené mn. $M \subset \mathbb{E}_n$. Zapište a načrtněte množinu D, ve které je diferencovatelná funkce $f(x, y) = \ln(xy - 4)$. Odpověď zdůvodněte.

   b) Určete vektor $\vec{s}$, v jehož směru je derivace funkce f v bodě $A = [-2,\ -4]$ nulová. Odpověď zdůvodněte nebo nulovou hodnotu derivace ověřte výpočtem.

   c) Určete diferenciál funkce f v bodě A. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě dotyku $[-2, -4, ?]$. Výsledku použijte pro výpočet přibližné hodnoty funkce f v bodě $[-1,8;\ -3,9]$.

   d) Napište rovnice izokřivek této funkce pro $k = 0, k = \ln 4$. Izokřivky načrtněte (tj. křivky $f(x, y) = k$).

2. a) Ověřte (všechny předpoklady), že rovnicí $F(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - y = 0$ je v okolí bodu $[x_0, y_0] = [1, 1]$ implicitně určena funkce jedné proměnné $y = f(x)$, která má spojitou 1. a 2. derivaci.

   b) Určete hodnotu derivace $f'(1)$. Ověřte, že v bodě $x_0 = 1$ je splněna nutná podmínka pro lokální extrém funkce f.

   c) Pomocí 2. derivace $f''(1)$ rozhodněte o extrému funkce f v bodě $x_0 = 1$.

3. a) Napište Fubiniho větu pro dvojný integrál (úplnou větu obsahující předpoklady a tvrzení, s popisem použitého značení).

   b) Načrtněte v $\mathbb{E}_2$ množinu Ω, která je omezena křivkami $x = 0,\ x = \pi,\ y = x,$ $y = 2x$ (popis os, měřítko, průsečíky křivek). Vypočítejte integrál $\iint_\Omega \sin x \, dx \, dy$. Uveďte příklad možné fyzikální (nebo geometrické) interpretace tohoto integrálu.

4. a) Načrtněte a slovně popište těleso M, které je omezené plochami $z = x^2 + y^2,\ z = 18 - x^2 - y^2$. Zakreslete průmět M_{xy} tělesa M do roviny $z = 0$.

   b) Vypočítejte objem tohoto tělesa.

5. a) Načrtněte křivku $C : y = \dfrac{1}{2}\, x^2 + 2$ mezi body $A = [0, 2]$, $B = [2, 4]$. Navrhněte parametrizaci této křivky.

   b) Vypočítejte hmotnost této křivky, je-li délková hustota $\varrho(x, y) = x$.

   c) Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (x + y\,,\ xy)$ působením podél této křivky C, je-li orientována od bodu B do bodu A.

6. a) Napište Gaussovu-Ostrogradského větu. Ověřte, že jsou splněny její předpoklady pro výpočet toku vektorového pole $\vec{f} = (x^3, z, y)$ plochou Q, která je povrchem tělesa $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leqq z \leqq 3\}$. Plocha Q je vně orientovaná.

   b) Načrtněte plochu Q a vypočítejte tok daného pole $\vec{f}$ touto plochou.

Matematika II, úroveň B – ukázkový test č. 1 (2018)

1. Je dána funkce $f(x,y) = 2y - y^2 - xe^x$.

   a) Vypočítejte parciální derivace 1. a 2. řádu této funkce. Určete diferenciál funkce f v bodě $A = [2,3]$.

   b) Vyšetřete lokální extrémy zadané funkce f (určete jejich polohu, typ a funkční hodnotu).

2. a) Stavová rovnice ideálního plynu zní: $p \cdot V = C \cdot T$, kde p je tlak, V je objem, T je teplota a C je konstanta. Ověřte, že $\dfrac{\partial p}{\partial V} \cdot \dfrac{\partial V}{\partial T} \cdot \dfrac{\partial T}{\partial p} = -1$.

   b) Ověřte (všechny předpoklady), že rovnicí $F(x,y) = x^2y - x^3 - 2\sqrt{y} + 1 = 0$ je v okolí bodu $[x_0, y_0] = [1;\, 4]$ implicitně určena funkce jedné proměnné $y = f(x)$, která má spojitou derivaci.

   c) Určete hodnotu derivace $f'(1)$. Popište chování funkce $y = f(x)$ v okolí bodu $x_0 = 1$, tj. rostoucí, resp. klesající, jak rychle (odhad sklonu tečny).

   d) Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[1;\, 4]$. Výsledku použijte pro výpočet přibližné hodnoty funkce f v bodě $x = 0,8$. Tečnu načrtněte.

3. Dána množina $\Omega = \left\{[x;y] \in \mathbb{E}_2 : \dfrac{1}{x} \le y \le \sqrt{x}; x \le 3\right\}$.

   a) Načrtněte množinu Ω a určete dolní mez pro proměnnou x.

   b) Vypočítejte dvojný integrál $\iint_\Omega x^2\, y\; dx\, dy$.
   Uveďte alespoň dva příklady fyzikálního významu tohoto integrálu (hmotnost, statický moment nebo moment setrvačnosti, při jaké hustotě, k jaké ose).

4. a) Načrtněte těleso D omezené plochami o rovnicích $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = x^2 + y^2 + 4$. Popište toto těleso (jeho hraniční plochy).
   Zakreslete též průmět D_{xy} tělesa D do roviny $z = 0$.

   b) Vypočítejte objem tohoto tělesa.

5. a) Křivka C je úsečka AB, kde $A = [2,0]$, $B = [1,3]$. Navrhněte parametrizaci křivky C a vypočítejte její hmotnost, je-li délková hustota $\varrho(x,y) = x^2 + y^2$ (tj. křivkový integrál $\int_C \rho(x,y)\; ds$).

   b) Vektorové pole $\vec{f} = (\dfrac{y^2}{x},\, 2y \ln x - \sqrt{y})$ je potenciální v 1. kvadrantu (nemusíte ověřovat). Určete potenciál φ tohoto pole. Pomocí potenciálu vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f}$ podél libovolné křivky v 1. kvadrantu s počátečním bodem $A = [1,2]$ a koncovým bodem $B = [\mathrm{e}, 4]$.

6. Je dána množina $M = \{[x,y] :\, x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$, křivka C je záporně orientovaná hranice této množiny.

   a) Načrtněte množinu M, vyznačte na ní křivku C (včetně dané orientace).

   b) Vypočítejte cirkulaci vektorového pole $\vec{f} = (xy,\, x^2)$ podél křivky C, tj. $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$. *Doporučení:* K výpočtu lze použít Greenovu větu.

1. a) Zapište a načrtněte v $\mathbb{E}_2$ množinu D, ve které je diferencovatelná funkce $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$. Odpověď zdůvodněte (postačující podm. pro diferencovatelnost). Načrtněte a popište graf této funkce.

   b) Vypočítejte derivaci funkce f v bodě $A = [3, -4]$ ve směru, který je určen vektorem $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$, kde bod $B = [2, 6]$. Popište chování dané funkce f v bodě A v tomto směru, tj. rostoucí, resp. klesající, jak rychle (odhad sklonu tečny).

   c) Je tento vektor $\vec{s}$ směrem, ve kterém daná funkce v bodě A nejrychleji roste ? Odpověď zdůvodněte ! Určete derivaci ve směru maximálního růstu v bodě A.

   d) Napište rovnici tečné roviny, její normálový vektor a parametrické vyjádření normály ke grafu funkce f v bodě dotyku $[3, -4, ?]$.

2. a) Vyšetřete, zda funkce $u(x, y) = \mathrm{e}^{-x} \cos y - \mathrm{e}^{-y} \cos x$ je řešením diferenciální rovnice $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (Laplaceova rovnice).

   b) Napište postačující podmínky pro to, aby funkce $f(x, y)$ měla v bodě $[x_0\, y_0]$ lokální minimum. Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6 \ln x$.

3. a) Načrtněte množinu $M = \left\{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + 4y^2 \leq 4,\ y \geq 0\right\}$.
   Transformujte integrál $\iint_M y^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ do zobecněných polárních souřadnic.
   Vypočítejte Jacobián této transformace.

   b) Integrál $\iint_M y^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ vypočítejte.

4. Je dáno těleso $D = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; 0 \leq x \leq 3,\ x \leq y \leq 3,\ 0 \leq z \leq xy\right\}$.

   a) Načrtněte průmět D_{xy} tělesa D do roviny $z = 0$.
   Vypočítejte integrál $\iiint_D (x^2 + y^2)\, z \;\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$.

   b) Uveďte alespoň dva příklady možného fyzikálního významu tohoto integrálu (hmotnost, statický moment nebo moment setrvačnosti, při jaké hustotě, vzhledem k jaké ose či rovině.)

5. a) Napište postačující podmínky pro to, aby vektorové pole $\vec{f} = (U, V)$ bylo potenciální v oblasti $G \subset \mathbb{E}_2$. Ověřte, že vektorové pole
   $\vec{f} = (\dfrac{y^2}{x} + x^2,\ 2y \ln x\ - \cos y)$ je potenciální. Uveďte největší možnou oblast.

   b) Napište dvě podmínky, ze kterých počítáme podle definice potenciál φ vektorového pole $\vec{f} = (U, V)$. Vypočítejte potenciál daného pole $\vec{f}$ z části a).

   c) Vypočítejte křivkový integrál daného pole $\vec{f}$ podél křivky C s počátečním bodem $A = [1, \pi/2]$ a koncovým bodem $B = [2, 0]$.

   d) Je dána skalární funkce $\psi(x, y, z) = xy^2 + y\mathrm{e}^{3z}$. Vypočítejte vektorové pole $\vec{g}(x, y, z) = \operatorname{grad} \psi(x, y, z)$ a dále vypočítejte rotaci $\operatorname{rot} \vec{g}(x, y, z)$. Je vektorové pole $\vec{g}(x, y, z)$ potenciální (v $\mathbb{E}_3$) ? Odpověď zdůvodněte.

6. a) Načrtněte plochu $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3\,;\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z \leq 2,\ y \geq 0\}$.
   Navrhněte její parametrizaci a napište vektor kolmý v bodě $[x, y, z]$ k ploše Q při této parametrizaci.

   b) Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{f} = (-y, x, z)$ plochou Q orientovanou normálovým vektorem, který svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ ostrý úhel.

1. a) Určete a načrtněte množinu D, ve které je $f(x, y) = \sqrt{x - y^2}$ diferencovatelná. Odpověď zdůvodněte.

   b) Vypočítejte gradient funkce f v bodě $A = [5, -1]$. Jaký je význam gradientu v bodě A ?

   c) Napište rovnici tečné roviny, její normálový vektor a parametrické vyjádření normály ke grafu funkce f v bodě dotyku $[5, -1, ?]$.

   d) Vypočítejte derivaci funkce f v bodě $A = [5, -1]$ ve směru daném vektorem $\vec{s} = (3, -4)$. Popište chování dané funkce f v bodě A v tomto směru, tj. rostoucí, resp. klesající, jak rychle (odhad sklonu tečny).

2. Je dána funkce $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2x^2 - 4xy$.

   a) Vypočítejte parciální derivace 1. a 2. řádu funkce f.

   b) Vyšetřete lokální extrémy funkce f (najděte jejich polohu, určete typ a napište funkční hodnotu).

3. a) Načrtněte množinu $D = \{[x; y] \in \mathbb{E}_2 :\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4; y \ge 0; y \le x\}$. Vyjádřete množinu D v polárních souřadnicích (t.j. uveďte transformační vztahy a odpovídající meze pro proměnné).

   b) Vypočítejte dvojný integrál $\iint_D \dfrac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\, dxdy$.

4. a) Načrtněte těleso
   $M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 9 - x^2 - y^2\right\}$.
   Zakreslete též průmět M_{xy} tělesa M do roviny $z = 0$.

   b) Vypočítejte objem tohoto tělesa.

5. a) Křivka C (část šroubovice) je popsána parametrizací $X = P(t)$:
   $x = 3\cos t,\ y = 3\sin t,\ z = t,\ t \in \langle 0, \pi \rangle$. Vypočítejte křivkový integrál skalární funkce $\int_C f\ \mathrm{d}s$, kde $f(x, y, z) = 2z + 1$.

   b) K je část křivky $y = x^2$ s počátečním bodem $A = [1, ?]$ a koncovým bodem $B = [2, ?]$. Navrhněte parametrizaci křivky a vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (\sqrt[3]{x},\ xy)$ působením po křivce K (tj. vypočítejte křivkový integrál $\int_K \vec{f} \cdot d\vec{s}$).

6. a) Načrtněte plochu Q (část roviny):
   $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ x + 2y + z = 6,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$. Navrhněte její parametrizaci a napište vektor kolmý k ploše Q při této parametrizaci.

   b) Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{f} = (z, y, 2x)$ touto plochou, je-li orientována normálovým vektorem, který svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ ostrý úhel.

1. a) Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.
Nezapomeňte uvést funkční hodnoty.

b) Zdůvodněte existenci a najděte absolutní extrémy funkce $f(x,y) = x + \ln x - y^2$ na množině $M = \{\, [x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ y = x+1,\ 1/4 \leq x \leq 1\}$.

2. a) Ověřte, že rovnicí $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ je implicitně určena funkce dvou proměnných $z = f(x,y)$, jejíž graf prochází bodem $T = [1,2,-1]$ a která má spojité parciální derivace 1. řádu v okolí bodu $[x_0,y_0] = [1,2]$.

b) Určete hodnoty parciálních derivací $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ v bodě $[1,2]$. Popište chování dané funkce v okolí bodu $[1,2]$ v kladném směru osy x a v kladném směru osy y, tj. rostoucí, resp. klesající, jak rychle (odhad sklonu tečny).

c) Určete derivaci funkce f v bodě $[1,2]$ ve směru $\overrightarrow{u} = (-1,2)$. Je vektor $\overrightarrow{u}$ směrem, ve kterém funkce f v bodě A nejrychleji klesá ? Zdůvodněte !

d) Určete diferenciál funkce f v bodě $[1,2]$. Napište rovnici tečné roviny a rovnici normály ke grafu funkce f v bodě T.

3. a) Načrtněte množinu $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ x \geqq 1,\ y \leqq 1,\ y \geqq \ln x\}$.

b) Integrál $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ převeďte na dvojnásobný, a to oběma způsoby (s elementárním oborem integrace vzhledem k ose x, resp. vzhledem k ose y).

c) Zvolte jednu z možností a daný dvojný integrál vypočítejte.

4. Načrtněte těleso $M = \{\, [x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq \sqrt{x^2+y^2}\}$. Těleso je homogenní s hustotou $\rho(x,y,z) = 1$.

a) Užitím trojného integrálu (ve sférických souřadnicích) vypočítejte hmotnost m tohoto tělesa.

b) Vypočítejte statický moment M_{xy} tělesa M vzhledem k rovině xy.

c) Vypočítejte z-souřadnici těžiště tohoto tělesa M.

5. Načrtněte kladně orientovanou křivku $C = \{[x,y] \in E_2\,;\ x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1\}$.

a) Napište Greenovu větu. Pomocí této věty vypočítejte cirkulaci vektorového pole $\vec{f} = (3x - y,\, x)$ po dané orientované křivce C (tj. křivkový integrál $\displaystyle\oint_C \vec{f} \cdot \vec{ds}$).

b) Tento křivkový integrál vypočítejte pomocí parametrizace dané křivky C.

6. a) Je dána plocha Q (část hyperbolického paraboloidu):
$Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : z = xy, x^2 + y^2 \leq R^2\}$, kde $R > 0$ je konstanta.
Do tří samostatných obrázků načrtněte křivky, které vzniknou v řezech grafu funkce $z = xy$ rovinou $z = 1$, rovinou $x - y = 0$ a rovinou $x + y = 0$.

b) Navrhněte vhodnou parametrizaci plochy Q, napište vektor kolmý k ploše Q a vypočítejte jeho délku (při této parametrizaci).

c) Určete plošný obsah plochy Q.

Matematika II, úroveň B – ukázkový test č. 3 (2018)

1. Je dána funkce $z = f(x, y) = \ln(6 - x^2 - y^2)$.

   a) Určete a načrtněte definiční obor $D(f)$. Napište rovnice izokřivek této funkce pro $k = 0, k = \ln 2$. Izokřivky načrtněte (tj. křivky $f(x, y) = k$).

   b) Vypočítejte parciální derivace 1. řádu funkce f. Určete množinu D, ve které jsou tyto parciální derivace spojité.

   c) Určete diferenciál funkce f v bodě $A = [1, 2]$. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě dotyku $[1, 2, ?]$. Výsledku použijte pro výpočet přibližné hodnoty funkce f v bodě $[1.1,\ 1.9]$.

   d) Napište směr, ve kterém funkce f v bodě A nejrychleji klesá. Určete derivaci funkce f v bodě A v tomto směru.

2. a) Vypočítejte parciální derivace 1. řádu funkce $g(x, y) = \left(\dfrac{x^3}{2} - \dfrac{2}{y^3}\right) \mathrm{e}^{2x}$.

   b) Ověřte (všechny předpoklady), že rovnicí $F(x, y) = \sin(x + y) - y^2 \cos x = 0$ je v okolí bodu $P = [\pi; 0]$ implicitně určena funkce jedné proměnné $y = f(x)$, která má spojitou derivaci.

   c) Určete hodnotu derivace $f'(\pi)$. Popište chování funkce $y = f(x)$ v okolí bodu $x_0 = \pi$, tj. rostoucí, resp. klesající, jak rychle (odhad sklonu tečny).

   d) Napište rovnici tečny a rovnici normály ke grafu funkce f v bodě P.

3. a) Načrtněte množinu $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 ;\ y \leqq x + 2,\ y \geqq x^2,\ x \geqq 0\}$. Nezapomeňte na popis os, měřítko, průsečíky křivek. Uveďte dva příklady fyzikálního významu integrálu $\iint_D 2x(y+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (tj. hmotnost, statický moment, při jaké hustotě, u momentu k jaké ose).

   b) Vypočítejte dvojný integrál z úlohy a).

4. a) Načrtněte těleso $M = \{[x, y, z];\ x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$. Popište toto těleso (jeho hraniční plochy). Vyznačte též průmět M_{xy} tělesa M do roviny $z = 0$.

   b) Vypočítejte hmotnost tělesa M, má-li hustotu $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

5. Dána vektorová funkce: $\vec{f}(x, y) = \left(2y^{3/2}; 3x\sqrt{y}\right)$ a orintovaná křivka $C \subset \mathbb{E}_2$: $y = x^2$ s počátečním bodem $P = [1; ?]$ a koncovým bodem $Q = [2; ?]$.

   a) Načrtněte křivku C a napište její parametrizaci $P(t)$. Užitím parametrizace $P(t)$ vypočítejte křivkový integrál $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$.

   b) Dané vektorové pole $\vec{f}(x, y)$ je potenciální (nemusíte ověřovat). Napište dvě podmínky, ze kterých počítáme podle definice potenciál φ vektorového pole (obecně) $\vec{f} = (U, V)$. Pak vypočítejte potenciál zadaného pole $\vec{f}$. Pomocí potenciálu vypočítejte stejný křivkový integrál jako v a).

6. Je dána plocha $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : z = 4 - x^2 - y^2;\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0\}$.

   a) Načrtněte plochu Q a její průmět B do roviny $z = 0$. Navrhněte vhodnou parametrizaci plochy Q a napište vektor k ní kolmý (při této parametrizaci).

   b) Určete hmotnost plochy Q, je-li plošná hustota $\rho(x, y, z) = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$.