Matematika II, úroveň B – ukázkový test č. 1 (2019)

1. a) Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y) = 2y - y^2 - xe^x$ (určete jejich polohu, typ a funkční hodnotu).

   b) Určete absolutní extrémy funkce $f(x,y) = xy - x^2 + 3y^2 - 4y$ na úsečce $M = \{\, [x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ y = 1 - x,\ -1 \le x \le 1\}$.

2. a) Vypočítejte parciální derivace 1. řádu funkce $g(x,y) = \left(\dfrac{x^3}{2} - \dfrac{2}{y^3}\right) \mathrm{e}^{2x}$.

   b) Rovnicí $F(x,y) = \dfrac{1}{2}\,x^2 + y^3 - xy - 1 = 0$ je v okolí bodu $[x_0, y_0] = [2,1]$ implicitně určena funkce $y = f(x)$, která má spojitou 1. a 2. derivaci (nemusíte ověřovat).
   Určete derivaci $f'(2)$. Popište chování funkce $y = f(x)$ v okolí bodu $x_0 = 2$, tj. rostoucí, resp. klesající, jak rychle (odhad sklonu tečny).

   c) Určete hodnotu 2. derivace $f''(2)$. Napište Taylorův polynom 2. stupně $T_2(x)$ funkce $y = f(x)$ se středem $x_0 = 2$. Pomocí $T_2(x)$ vypočítejte přibližně funkční hodnotu $f(1.8)$.

3. Dána množina $\Omega = \left\{[x;y] \in \mathbb{E}_2 :\ \dfrac{1}{x} \le y \le \sqrt{x}; x \le 3\right\}$.

   a) Načrtněte množinu Ω a určete dolní mez pro proměnnou x.

   b) Vypočítejte dvojný integrál $\iint_\Omega x^2\, y\; dx\, dy$.
   Uveďte alespoň dva příklady fyzikálního významu tohoto integrálu (hmotnost, statický moment nebo moment setrvačnosti, při jaké hustotě, k jaké ose).

4. a) Načrtněte těleso D omezené plochami o rovnicích $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = x^2 + y^2 + 4$. Popište toto těleso (jeho hraniční plochy).
   Zakreslete též průmět D_{xy} tělesa D do roviny $z = 0$.

   b) Vypočítejte objem tohoto tělesa.

5. a) Načrtněte křivku $C = \{[x,y];\ x^2 + y^2 = 9,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ a navrhněte její parametrizaci $X = P(t)$.
   Vypočítejte hmotnost struny tvaru této křivky, je-li délková hustota $\varrho(x,y) = xy$.

   b) Vektorové pole $\vec{f} = \left(\dfrac{y^2}{x},\ 2y\, \ln x - \sqrt{y}\right)$ je potenciální v 1. kvadrantu (nemusíte ověřovat).
   Určete potenciál φ tohoto pole. Pomocí potenciálu vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f}$ podél libovolné křivky v 1. kvadrantu s počátečním bodem $A = [1;\, 2]$ a koncovým bodem $B = [\mathrm{e};\, 4]$.

6. a) Načrtněte plochu Q (část roviny):
   $Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3\,;\ x + 2y + z = 6,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$. Navrhněte vhodnou parametrizaci plochy Q a jejím užitím vypočítejte vektor kolmý k této ploše.

   b) Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{f} = (z, y, 2x)$ touto plochou, je-li orientována normálovým vektorem, který svírá s vektorem $\vec{k} = (0,0,1)$ ostrý úhel.

1. a) Určete a načrtněte množinu M, ve které je funkce $f(x,y) = \dfrac{4x}{\sqrt{y}} - y\,\ln x$ diferencovatelná. Odpověď zdůvodněte.
   b) Vypočítejte gradient funkce f v bodě $A = [1;\,4]$. Jaký je význam gradientu v bodě A ?
   c) Napište rovnici tečné roviny, její normálový vektor a parametrické vyjádření normály ke grafu funkce f v bodě dotyku $[1;\,4;\,?]$.
   d) Vypočítejte derivaci funkce f v bodě A ve směru daném vektorem $\vec{s} = (3,-4)$. Popište chování dané funkce f v bodě A v tomto směru, tj. rostoucí, resp. klesající, jak rychle (odhad sklonu tečny).

2. Je dána funkce $f(x,y) = x^3 + y^2 - 2x^2 - 4xy$.
   a) Vypočítejte parciální derivace 1. a 2. řádu funkce f.
   b) Vyšetřete lokální extrémy funkce f (najděte jejich polohu, určete typ a napište funkční hodnotu).

3. a) Načrtněte množinu $D = \{[x;y] \in \mathbb{E}_2 :\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4; y \ge 0; y \le x\}$.
   Vyjádřete množinu D v polárních souřadnicích (t.j. uveďte transformační vztahy a odpovídající meze pro proměnné).
   b) Vypočítejte dvojný integrál $\iint_D \dfrac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy$.

4. a) Načrtněte těleso
   $W = \big\{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 9 - x^2 - y^2\big\}$.
   Zakreslete též průmět W_{xy} tělesa W do roviny $z = 0$.
   b) Vypočítejte objem tohoto tělesa.

5. a) Křivka C (část šroubovice) je popsána parametrizací $X = P(t)$:
   $x = 3\cos t,\ y = 3\sin t,\ z = t,\ t \in \langle 0, \pi\rangle$. Vypočítejte křivkový integrál skalární funkce $\int_C f\ \mathrm{d}s$, kde $f(x,y,z) = 2z + 1$.
   b) Křivka K je orientovaná úsečka AB s počátečním bodem $A = [2;1]$ a koncovým bodem $B = [1;3]$. Navrhněte parametrizaci křivky K a vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (\sqrt[3]{y},\ xy)$ působením po křivce K.

6. Je dáno vektorové pole $\vec{f} = (x^3 + x^2, -2xy, 3y^2\,z)$ a plocha Q, která je povrchem tělesa $T = \big\{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2 + y^2 \le 4,\ z \in \langle 0, 2\rangle\ \big\}$. Plocha Q je orientována vnější normálou.
   a) Napište tvrzení Gaussovy-Ostrogradského věty (vzorec).
   b) Vypočítejte divergenci dané funkce $\vec{f}$. Načrtněte plochu Q (včetně její orientace) a vypočítejte tok daného pole $\vec{f}$ danou plochou Q.

Matematika II, úroveň B – ukázkový test č. 3 (2019)

1. Je dána funkce $z = f(x, y) = \ln(6 - x^2 - y^2)$.

   a) Určete a načrtněte definiční obor $D(f)$. Napište rovnice izokřivek (tj. $f(x, y) = k$) této funkce pro $k = 0, k = \ln 2$. Izokřivky načrtněte.

   b) Vypočítejte parciální derivace 1. řádu funkce f. Určete množinu D, ve které jsou tyto parciální derivace spojité.

   c) Určete diferenciál df funkce f v bodě $A = [1; 2]$. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě dotyku $[1; 2; ?]$. Výsledku použijte pro výpočet přibližné hodnoty funkce f v bodě $[1,1;\ 1,9]$.

   d) Napište směr, ve kterém funkce f v bodě A nejrychleji klesá. Určete derivaci funkce f v bodě A v tomto směru.

2. Rovnicí $F(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0$ je v okolí bodu $[x_0, y_0] = [0; 1]$ implicitně určena funkce jedné proměnné $y = f(x)$, která má spojitou 1. a 2. derivaci (nemusíte ověřovat).

   b) Určete hodnoty 1. a 2. derivace $f'(0)$ a $f''(0)$. Zdůvodněte, zda v bodě $x_0 = 0$ má funkce f lokální extrém. Pokud ano, určete jeho typ (maximum, minimum) a funkční hodnotu.

   c) Napište rovnici tečny a rovnici normály ke grafu funkce f v bodě $[0;\ 1]$. Načrtněte tuto tečnu a zakreslete tvar grafu funkce f v okolí daného bodu.

3. Je dána množina $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2\,;\ y \leqq x + 2,\ y \geqq x^2,\ x \geqq 0\}$. Křivka $C = \partial D$ je záporně orientovaná hranice této množiny.

   a) Načrtněte množinu D, vyznačte na ní křivku C (včetně dané orientace).

   b) Vypočítejte cirkulaci vektorového pole $\vec{f} = (-2xy,\ x^2\, y + \sqrt{y})$ podél křivky C, tj. $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$. *Doporučení:* K výpočtu lze použít Greenovu větu.

4. a) Načrtněte těleso $M = \{[x, y, z];\ x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$. Popište toto těleso (jeho hraniční plochy). Vyznačte též průmět M_{xy} tělesa M do roviny $z = 0$.

   b) Vypočítejte hmotnost tělesa M, má-li hustotu $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

5. Dána vektorová funkce: $\vec{f}(x, y) = \big(2y^{3/2}; 3x\sqrt{y}\big)$ a orintovaná křivka $C \subset \mathbb{E}_2 : y = x^2$ s počátečním bodem $P = [1; ?]$ a koncovým bodem $Q = [2; ?]$.

   a) Načrtněte křivku C a napište její parametrizaci $P(t)$. Užitím parametrizace $P(t)$ vypočítejte křivkový integrál $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$.

   b) Dané vektorové pole $\vec{f}(x, y)$ je potenciální (nemusíte ověřovat). Napište podmínku, ze které počítáme podle definice potenciál φ vektorového pole (obecně) $\vec{f} = (U, V)$. Pak vypočítejte potenciál zadaného pole $\vec{f}$. Pomocí potenciálu vypočítejte stejný křivkový integrál jako v úloze a).

6. Je dána plocha $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : z = 4 - x^2 - y^2;\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0\}$.

   a) Načrtněte plochu Q a její průmět B do roviny $z = 0$. Navrhněte vhodnou parametrizaci plochy Q a jejím užitím vypočítejte vektor kolmý k této ploše.

   b) Určete hmotnost plochy Q, je-li plošná hustota $\rho(x, y, z) = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$.