Matematika II: plochy, tělesa

sestavil František Mráz, 2012

Následující úlohy jsou přípravou pro výpočet trojného integrálu a plošného integrálu.

V úlohách 1 až 10

a) Pojmenujte plochu (tj. paraboloid, kuželová plocha, ...)

b) Popište plochu podrobněji (tj. např. hyperboloid dvoudílný, rotační, osa z, ...) a načrtněte v $\mathbb{E}_3$. Obrázek stačí od ruky, ale výstižně: popis os, měřítko, případně důležité křivky atd.

1. $z = x^2 + 4y^2$
2. $z^2 = x^2 + y^2$
3. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
4. $z = x^2 + y^2 + 1$
5. $z^2 = x^2 + y^2 + 1$
6. $z^2 = 4x^2 + y^2 - 1$
7. $z^2 = 4 - x^2 - 4y^2$
8. $z = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$
9. $z = \sqrt{y - x^2}$
10. $z = \sqrt{9 + x^2 + y^2}$

V úlohách 11 až 15

a) Načrtněte v $\mathbb{E}_3$ dané plochy a těleso, které je jimi ohraničeno. Obrázek opět stačí od ruky, ale výstižně: popis os, měřítko, průniky ploch atd.

b) Zkuste těleso popsat slovně.

c) Popište a v obrázku vyznačte průmět M_{xy} tělesa do roviny $z = 0$, v úloze 14 pak průmět M_{yz} do roviny $x = 0$.

11. $z = x^2 + 4y^2,\ z = 16.$
12. $x^2 + y^2 = 4,\ z = 0,\ z = 7 + x^2 + y^2.$
13. $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 6 - x^2 - y^2.$
14. $2x^2 - y^2 - z^2 = 4,\ x = 2.$
15. Těleso $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3\,;\ 3z \geq x^2 + y^2,\ z \leq \sqrt{10 - x^2 - y^2}\}$. (Načrtněte nejprve hraniční plochy).

V úlohách 16 a 17 se jedná o úlohu "opačnou". Načrtněte popsané těleso a pak ho popište pomocí rovnic hraničních ploch nebo pomocí nerovnic.

16. Těleso tvaru zmrzlinového kornoutu, který je postaven na špičku (tj. tvaru kužele s vrcholem v počátku), výškou $v = 6$, boční hrany svírají s rovinou $z = 0$ úhel 60^o a s kopečkem zmrzliny ve tvaru kulové plochy, jejíž poloměr je roven poloměru podstavy kornoutu.

17. Těleso tvaru kužele, který má podstavu v rovině $z = 0$, poloměr podstavy $r = 3$ a vrchol v bodě $[0, 0, 3]$.

Výsledky (prosím o upozornění, pokud objevíte nějakou nejasnost či nesrovnalost):
Odpověď nestřílejte "od boku", přesto v úlohách 1 až 10 byste mohli zvládnout část a) za 10 až 15 vteřin, odpověď b) pak v průměru do dvou minut. Takže prvních 10 úloh za 20 minut ?

1. a) paraboloid b) eliptický, není rotační (jaké jsou poloosy elipsy v rovině $z = 1$?), z je osa souměrnosti, nikoliv rotace.
2. a) kuželová plocha b) rotační, osa z, boční hrany svírají úhel 45^o s rovinou $z = 0$.
3. a) kuželová plocha (část) b) "horní" část, rotační, dále viz 2b).
4. a) paraboloid b) rotační, osa z, posunutý, vrchol v bodě $[0, 0, 1]$.
5. a) hyperboloid b) dvoudílný, rotační, osa z, vrcholy v bodech $[0, 0, \pm 1]$. (Jaký je poloměr kružnice v rovině $z = 2$?)
6. a) hyperboloid b) jednodílný, není rotační, z je osa souměrnosti, nikoliv rotace. (Jaké jsou poloosy elipsy v rovině $z = 0$?)
7. a) elipsoid b) rotační, osa y, poloosy $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$.
8. a) kulová plocha (část) b) "dolní" část, střed v počátku, poloměr $r = 3$.
9. a) paraboloid (část) b) "horní" část, rotační, osa y.
10. a) hyperboloid (část) b) dvoudílný, "horní" část, rotační, osa z, vrchol v bodě $[0, 0, 3]$.
11. Těleso ohraničené zdola paraboloidem eliptickým, shora rovinou. M_{xy} je množina ohraničená elipsou se středem v počátku a s poloosami $a = 4$, $b = 2$.
12. Těleso ohraničené válcovou rotační plochou s osou v ose z, zdola ohraničené rovinou, shora rotačním paraboloidem s vrcholem v bodě $[0, 0, 7]$, který protíná válcovou plochu v rovině $z = 11$. M_{xy} je kruh se středem v počátku a s poloměrem $r = 2$.
13. Těleso ohraničené zdola "horní" částí kuželové rotační plochy s osou v ose z, shora rotačním paraboloidem (ale konkávním) s osou v ose z s vrcholem v bodě $[0, 0, 6]$, který protíná kuželovou plochu v rovině $z = 2$. M_{xy} je kruh se středem v počátku a s poloměrem $r = 2$.
14. Těleso ohraničené rovinou $x = 2$ a "přední částí" dvoudílného hyperboloidu, který je rotační s osou v ose x a vrcholem v bodě $[\sqrt{2}, 0, 0]$. Průmět M_{yz} do roviny $x = 0$ je kruh $y^2 + z^2 \leq 4$.
15. Těleso ohraničené zdola rotačním paraboloidem s osou v ose z, shora kulovou plochou se středem v bodě $[0, 0, 0]$ a poloměrem $r = \sqrt{10}$. Plochy se protínají v rovině $z = 2$ v kružnici $x^2 + y^2 = 6$. M_{xy} je kruh $x^2 + y^2 \leq 6$.
16. $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 ;\ \sqrt{3x^2 + 3y^2} \leq z \leq 6 + \sqrt{12 - x^2 - y^2}\}$.
17. $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 ;\ 0 \leq z \leq 3 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$.