

V. Plošný integrál

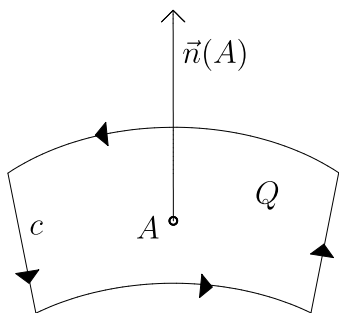
V.1. Parametrizace ploch

Nechť $B \subset \mathbb{E}_2$ a $X = P(u, v)$ je zobrazení z B do $\mathbb{E}_3$. Nechť $\Gamma = \partial B$ je uzavřená jednoduchá po částech hladká křivka v $\mathbb{E}_2$ tj. $B = \Gamma \cup \text{int} \Gamma$. Platí-li :

- zobrazení P je spojitě a prostě na B ,
- P má omezené a spojitě parciální derivace P_u a P_v v $B \setminus K$, kde K je množina konečného počtu bodů ležících na hranici Γ množiny B ,
- $P_u \times P_v \neq \vec{0}$ v $B \setminus K$,

potom množina $Q = \{X = P(u, v) \in \mathbb{E}_3; [u, v] \in B\}$ se nazývá **jednoduchá hladká plocha** v $\mathbb{E}_3$, zobrazení P její **parametrizací** a množina $c = \{X = P(u, v) \in \mathbb{E}_3; [u, v] \in \Gamma\}$ její **okraj**.

Vektory P_u, P_v jsou tečné vektory a vektor $P_u \times P_v$ je normálovým vektorem plochy Q . Jednotkový vektor normály označme $\vec{n}^o$.



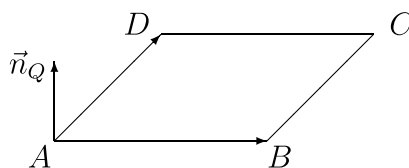
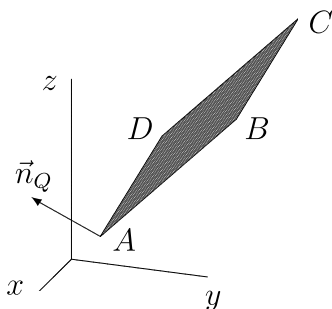
Říkáme, že plocha Q a její okraj c jsou souhlasně orientovány, jestliže pro směr křivky c a normálu $\vec{n}$ plochy platí pravidlo "pravé ruky".

POZNÁMKA : V geometrických a fyzikálních aplikacích se často používá tzv. radiusvektor $\vec{r} = (x, y, z)$ bodu $X = [x, y, z]$. Potom vektorová rovnice $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$ vyjadřuje křivku $c : x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in I$ a podobně $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $[u, v] \in B \subset \mathbb{E}_2$ vyjadřuje plochu $Q = \{X \in \mathbb{E}_3; x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), [u, v] \in B\}$.

- Navrhněte parametrizaci plochy Q , jejíž orientace je určena normálovým vektorem $\vec{n}_Q$. Zjistěte, zda plocha Q je orientována souhlasně či nesouhlasně s navrženou parametrizací :

Příklad 599. Q je rovnoběžník s vrcholy $A = [1, 1, 1]$, $B = [1, 4, 4]$, $C = [0, 5, 6]$, $D = [0, 2, 3]$, $\vec{n}_Q \cdot \vec{k} > 0$.

Řešení :



Snadno se přesvědčíme, že $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (0, 3, 3)$ a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = (-1, 1, 2)$.

Q je část roviny určené bodem A a vektory $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$.

Rovnici roviny napíšeme v parametrickém tvaru $X = A + u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AD}$.

Za parametrizaci plochy Q zvolíme $P(u, v) = A + u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AD}$.

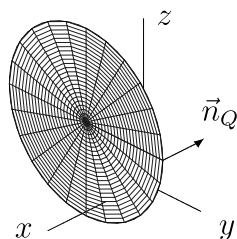
$P(u, v) = [1 - v, 1 + 3u + v, 1 + 3u + 2v]$, kde $[u, v] \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$

$$P_u = (0, 3, 3), \quad P_v = (-1, 1, 2) \quad \vec{n} = P_u \times P_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (3, -3, 3)$$

Z podmínky $\vec{n}_Q \cdot \vec{k} = (3, -3, 3) \cdot (0, 0, 1) = 3 > 0$ vyplývá, že orientace plochy je souhlasná se zvolenou parametrizací. ■

Příklad 600. Q je kruh v rovině $x = 2$ se středem v bodě $[2, -1, 3]$ a poloměrem 4, $\vec{n}_Q = (-1, 0, 0)$.

Řešení :



$$Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; (y+1)^2 + (z-3)^2 \leq 16, x = 2\}.$$

Navrhne zobrazení:

$$\text{a) } P(u, v) = [2, -1 + v \cos u, 3 + v \sin u], \quad [u, v] \in B = \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, 4 \rangle,$$

$$P_u(u, v) = (0, -v \sin u, v \cos u) \quad P_v(u, v) = (0, \cos u, \sin u)$$

$$\vec{n} = P_u \times P_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -v \sin u & v \cos u \\ 0 & \cos u & \sin u \end{vmatrix} = (-v, 0, 0) = \vec{0} \text{ pro } v = 0 \\ \neq \vec{0} \text{ pro } v \neq 0.$$

Toto zobrazení **není** parametrizací plochy Q , protože je $P_u \times P_v = \vec{0}$ v nekonečném počtu bodů ležících na hranici množiny B . Kromě toho na hranici množiny B není uvažované zobrazení prosté.

$$\text{b) } P(u, v) = [2, -1 + u, 3 + v], \quad B = \{[u, v] \in \mathbb{E}_2; u^2 + v^2 \leq 16\},$$

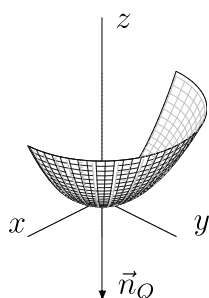
$$P_u(u, v) = (0, 1, 0), \quad P_v(u, v) = (0, 0, 1)$$

$$\vec{n} = P_u \times P_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 0, 0) \neq \vec{0} \text{ pro všechny } [u, v] \in B$$

Toto navržené zobrazení **je** parametrizací plochy Q a orientace plochy Q je nesouhlasná s touto parametrizací, protože $\vec{n}_Q = (-1, 0, 0) = -(P_u \times P_v)$. ■

Příklad 601. $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z = x^2 + y^2, y \geq 0, z \leq 1\}, \quad \vec{n}_Q([0, 0, 0]) = (0, 0, -1)$

Řešení :



Jde o část pláště rotačního paraboloidu

$$\text{a) } Q : \begin{cases} x = v \cos u \\ y = v \sin u \\ z = v^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} u \in \langle 0, \pi \rangle, \\ v \in \langle 0, 1 \rangle \end{matrix}$$

$$\text{b) } Q : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases} \quad u^2 + v^2 \leq 1, v \geq 0$$

Navrhujeme zobrazení:

$$\text{a) } P(u, v) = [v \cos u, v \sin u, v^2], \quad [u, v] \in B = \langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, 1 \rangle,$$

$$P_u(u, v) = (-v \sin u, v \cos u, 0) \quad P_v(u, v) = (\cos u, \sin u, 2v)$$

$$\vec{n} = P_u \times P_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -v \sin u & v \cos u & 0 \\ \cos u & \sin u & 2v \end{vmatrix} = (2v^2 \cos u, 2v^2 \sin u, -v)$$

$\vec{n} = \vec{0}$ pro $v = 0 \Rightarrow$ zobrazení není podle definice parametrizací plochy Q .

Kromě toho na hranici množiny B není uvažované zobrazení prosté.

POZNÁMKA: Protože však zobrazení nesplňuje podmínky definice parametrizace jen na množině dvourozměrné míry 0, lze ho použít pro výpočet plošného integrálu.

$$\text{b) } P(u, v) = [u, v, u^2 + v^2], \quad B = \{[u, v] \in \mathbb{E}_2; u^2 + v^2 \leq 1, v \geq 0\},$$

$$P_u(u, v) = (1, 0, 2u), \quad P_v(u, v) = (0, 1, 2v)$$

$$\vec{n} = P_u \times P_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (-2u, -2v, 1) \neq \vec{0} \text{ v celém } B$$

$$\vec{n}^o = \frac{(-2u, -2v, 1)}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}, \quad \vec{n}^o([0, 0, 0]) = \vec{n}^o(u = v = 0) = (0, 0, 1).$$

Navržené zobrazení je parametrizací. Plocha Q je nesouhlasně orientovaná s touto parametrizací, protože $\vec{n}^o = -\vec{n}_Q$. ■

Příklad 602.* Je dána polovina kulové plochy $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0, a > 0\}$ orientovaná normálovým vektorem $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, kde $n_3 \geq 0$. Rozhodněte, která ze zadaných zobrazení $P(u, v)$ jsou parametrizacemi plochy Q .

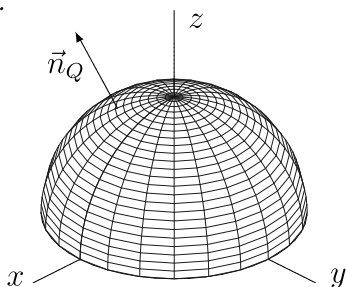
$$\text{a) } P(u, v) = \left[u, v, \sqrt{a^2 - u^2 - v^2} \right], \text{ kde } [u, v] \in B = \{[u, v] \in \mathbb{E}_2; u^2 + v^2 \leq a^2\},$$

$$\text{b) } P(u, v) = \left[\frac{2a^2u}{a^2 + u^2 + v^2}, \frac{2a^2v}{a^2 + u^2 + v^2}, \frac{2a^3}{a^2 + u^2 + v^2} - a \right], \text{ kde } [u, v] \in B,$$

$$B = \{[u, v] \in \mathbb{E}_2; u^2 + v^2 \leq a^2\},$$

$$\text{c) } P(u, v) = [a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v], \text{ kde } [u, v] \in B = \langle 0, 2\pi \rangle \times \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle. \quad \blacksquare$$

Řešení :



Dosazením se můžeme snadno přesvědčit, že ve všech případech platí rovnice

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

a) Funkce $P_u = \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} \right), P_v = \left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} \right)$ neexistují na hranici Γ_B . Z toho vyplývá, že dané zobrazení není parametrizací.

b) $P(u, v)$ je spojitě, prostě zobrazení v B . Snadno se přesvědčíme, že na B skutečně vychází $z \geq 0$:

$$z = \frac{2a^3}{a^2 + u^2 + v^2} - a = \frac{a(a^2 - u^2 - v^2)}{a^2 + u^2 + v^2},$$

$$B = \{[u, v] \in \mathbb{E}_2; u^2 + v^2 \leq a^2 \implies a^2 - u^2 - v^2 \geq 0 \implies z \geq 0\}.$$

Spočítáme tečné vektory P_u, P_v a normálový vektor vyplývající z parametrizace P

$$\begin{aligned} \vec{n} = P_u \times P_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{2a^2(a^2 - u^2 + v^2)}{(a^2 + u^2 + v^2)^2} & \frac{-4a^2uv}{(a^2 + u^2 + v^2)^2} & \frac{-6a^3u}{(a^2 + u^2 + v^2)^2} \\ \frac{-4a^2uv}{(a^2 + u^2 + v^2)^2} & \frac{2a^2(a^2 + u^2 - v^2)}{(a^2 + u^2 + v^2)^2} & \frac{-6a^3v}{(a^2 + u^2 + v^2)^2} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{4a^4}{(a^2 + u^2 + v^2)^4} (3au(a^2 + u^2 + v^2), 3av(a^2 + u^2 + v^2), a^4 - (u^2 + v^2)^2) \neq \vec{0} \end{aligned}$$

pro všechna $u^2 + v^2 \leq a^2$; $n_3 = a^4 - (u^2 + v^2)^2 \geq 0$.

Dané zobrazení je parametrizací plochy Q . Orientace plochy je souhlasná s danou parametrizací.

- c) Zobrazení vychází z popisu kulové plochy ve sférických souřadnicích. Víme, že toto zobrazení je prosté a spojitě pro $u \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a $v \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Navíc jeho parciální derivace P_u a P_v jsou spojitě všude v $\mathbb{E}_2$ a

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a \sin u \cos v & a \cos u \cos v & 0 \\ -a \cos u \sin v & -a \sin u \sin v & a \cos v \end{vmatrix} = (a^2 \cos u \cos^2 v, a^2 \sin u \cos^2 v, a^2 \sin v \cos v),$$

$|\vec{n}| = a^2 \cos v \neq 0$ pro všechna $u \in \langle 0, 2\pi \rangle, v \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Na hranici množiny B , kde u je libovolné a $v = \frac{\pi}{2}$, je $\vec{n} = \vec{0}$ a na hranici Γ_B není zobrazení prosté. Z toho vyplývá, že dané zobrazení není parametrizací plochy Q . ■

- 603.** Plocha $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, z \in \langle 1, 4 \rangle\}$ je orientovaná tak, že vektor normály $\vec{n}_Q$ v libovolném bodě splňuje podmínku $\vec{n}_Q \cdot \vec{i} \geq 0$. a) Ověřte, že zobrazení $P(u, v) = [2 \cos u, 2 \sin u, v], [u, v] \in B, B = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \times \langle 1, 4 \rangle$ je parametrizací plochy Q a rozhodněte o orientaci plochy vzhledem k této parametrizaci. b) Zdůvodněte, proč zobrazení $P(u, v) = [\sqrt{4 - u^2}, u, v], [u, v] \in B = \langle -2, 2 \rangle \times \langle 1, 4 \rangle$ není parametrizací plochy Q .

- [a) orientace plochy Q je souhlasná s parametrizací ,
b) P_u je nespojitě v nekonečném počtu bodů množiny B .]

- Navrhněte parametrizaci plochy Q , jejíž orientace je určena normálovým vektorem $\vec{n}_Q$. Zjistěte, zda plocha Q je orientována souhlasně či nesouhlasně s navrženou parametrizací :

- 604.** $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, 0 \leq z \leq 4\}, \vec{n}_Q([2, 0, 2]) = (1, 0, 0)$

$$\left[\begin{array}{l} P(u, v) = [2 \cos u, 2 \sin u, v] \\ [u, v] \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \times \langle 0, 4 \rangle \\ \text{orientace plochy } Q \text{ je souhlasná s parametrizací} \end{array} \right]$$

- 605.** $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z = xy, x^2 + y^2 \leq a^2, a > 0\}, \vec{n}_Q \cdot \vec{k} > 0$

$$\left[\begin{array}{l} P(u, v) = [v \cos u, v \sin u, v^2 \sin u \cos u] \\ [u, v] \in \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, a \rangle \\ \text{zobrazení není parametrizací} \end{array} \right]$$

606. $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; \frac{(y-1)^2}{4} + z^2 = 1, x \in \langle -1, 3 \rangle, z > 0\}, \vec{n}_Q([0, 0, 1]) = (0, 0, -1)$
- $$\left[\begin{array}{l} P(u, v) = [v, 1 + 2 \cos u, \sin u] \\ [u, v] \in \langle 0, \pi \rangle \times \langle -1, 3 \rangle \\ \text{orientace plochy } Q \text{ je souhlasná s parametrizací} \end{array} \right]$$
607. $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; 2x + 3y + z = 6, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}, \vec{n}_Q = (n_1, n_2, n_3), n_1 > 0$
- $$\left[\begin{array}{l} P(u, v) = [u, v, 6 - 2u - 3v] \\ 0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 6 - 2u \\ \text{orientace plochy } Q \text{ je souhlasná s parametrizací} \end{array} \right]$$

V.2. Plošný integrál skalární funkce

Nechť Q je jednoduchá hladká plocha v $\mathbb{E}_3$ s parametrizací $X = P(u, v)$, $[u, v] \in B \subset \mathbb{E}_2$.
Nechť f je skalární funkce definovaná a omezená na ploše Q . Jestliže dvojný integrál $\iint_B f(P(u, v)) \|P_u(u, v) \times P_v(u, v)\| du dv$ existuje, pak pokládáme

$$\iint_Q f dp = \iint_B f(P(u, v)) \|P_u(u, v) \times P_v(u, v)\| du dv$$

a říkáme, že f je **integrovatelná** na Q .

Je-li plocha $Q \subset \mathbb{E}_3$ jednoduchá po částech hladká, $Q = \bigcup_{i=1}^k Q_i$ jednoduchých hladkých ploch $Q_1, \dots, Q_k$ a f je funkce integrovatelná na každé ploše $Q_i, 1 \leq i \leq k$, pak je

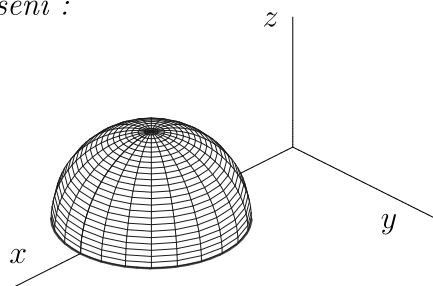
$$\iint_Q f dp = \sum_{i=1}^k \iint_{Q_i} f dp.$$

POZNÁMKA : Víme, že ani existence ani hodnota dvojného integrálu $\iint_B f du dv$ nezávisí na "chování" funkce f na množině míry 0. Z toho plyne, že lze počítat $\iint_Q f dp$ použitím zobrazení $P(u, v)$, které sice (striktně vzato) není parametrizací plochy Q , ale požadované podmínky na parametrizaci jsou porušeny pouze na množině míry 0 v B .

- Rozhodněte o existenci plošného integrálu a pokud integrál existuje, tak jej vypočítejte.

Příklad 608. $\iint_Q \frac{xy \ln |x|}{z} dp$, kde $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$

Řešení :



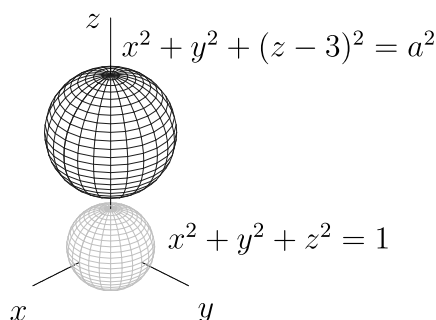
Integrál neexistuje, neboť funkce

$$f(x, y, z) = \frac{xy \ln |x|}{z}$$

není definovaná pro $z = 0$ a není omezená v žádném okolí bodů s nulovou z -tovou souřadnicí. ■

Příklad 609.* $\iint_Q \frac{dp}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 + (z-3)^2 = a^2, a > 0\}$

Řešení : Pro existenci integrálu je postačující spojitost integrované funkce na ploše Q . Tato podmínka je splněna vždy, když Q je disjunktní s kulovou plochou $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, což platí pro $a \in (0, 2) \cup (4, \infty)$. Naopak, pro $a \in \langle 2, 4 \rangle$, integrál neexistuje, protože funkce f není na ploše Q omezená.



Q je kulová plocha se středem $[0, 0, 3]$ a poloměrem a , můžeme ji popsat pomocí sférických souřadnic, kde poloměr je roven a .

$$Q : \begin{cases} x = a \cos u \cos v \\ y = a \sin u \cos v \\ z = 3 + a \sin v \end{cases} \quad \begin{matrix} u \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ v \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \end{matrix}$$

Parametrizace kulové plochy Q :

$$\left| \begin{array}{ll} P(u, v) = [a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, 3 + a \sin v] & B = \{[u, v] \in \mathbb{E}_2; u \in \langle 0, 2\pi \rangle, v \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle\} \\ P_u(u, v) = (-a \sin u \cos v, a \cos u \cos v, 0) & P_u \times P_v = (a^2 \cos u \cos^2 v, a^2 \sin u \cos^2 v, a^2 \sin v \cos v) \\ P_v(u, v) = (-a \cos u \sin v, -a \sin u \sin v, a \cos v) & \|P_u \times P_v\| = a^2 \cos v \end{array} \right|$$

$$\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 1} = \frac{1}{a^2 \cos^2 u \cos^2 v + a^2 \sin^2 u \cos^2 v + (3 + a \sin v)^2 - 1} =$$

$$= \frac{1}{a^2 + 8 + 6a \sin v}$$

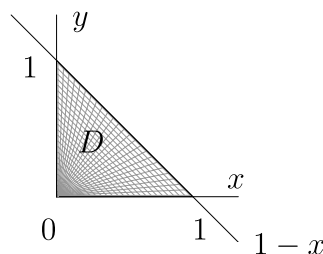
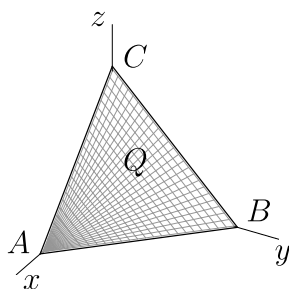
$$\iint_Q f \, dp = \iint_B f(P(u, v)) \|P_u \times P_v\| \, du \, dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{a^2 \cos v}{a^2 + 8 + 6a \sin v} \, du \right) dv =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{a^2}{6a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{6a \cos v}{a^2 + 8 + 6a \sin v} \, dv = \frac{\pi a}{3} \left[\ln |a^2 + 8 + 6a \sin v| \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a}{3} \ln \left| \frac{a^2 + 8 + 6a}{a^2 + 8 - 6a} \right|.$$

- Vypočítejte integrály na ploše $Q \subset \mathbb{E}_3$:

Příklad 610. $\iint_Q xz \, dp$, Q je $\triangle ABC$, kde $A = [1, 0, 0]$, $B = [0, 1, 0]$ a $C = [0, 0, 1]$

Řešení : Q je část roviny $x + y + z = 1$. Průmětem trojúhelníka $\triangle ABC$ do roviny (xy) je trojúhelník D omezený přímkami $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.



$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1 - x \end{cases}$$

$$Q : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - u - v, \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{ll} P(u, v) = [u, v, 1 - u - v], & B = \{[u, v] \in \mathbb{E}_2; 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 - u\} \\ P_u = (1, 0, -1), & P_v = (0, 1, -1) \\ P_u \times P_v = (1, 1, 1), & \|P_u \times P_v\| = \sqrt{3} \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned}
\iint_Q xz \, dp &= \iint_B u \cdot (1-u-v) \cdot \sqrt{3} \, du \, dv = \sqrt{3} \cdot \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} u(1-u-v) \, dv \right) du = \\
&= \sqrt{3} \int_0^1 \left(u(1-u) \left[v \right]_0^{1-u} - \frac{u}{2} \left[v^2 \right]_0^{1-u} \right) du = \sqrt{3} \int_0^1 \left(u(1-u)^2 - \frac{u}{2}(1-u)^2 \right) du = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^1 u(1-2u+u^2) \, du = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{u^2}{2} - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}}{24}.
\end{aligned}$$

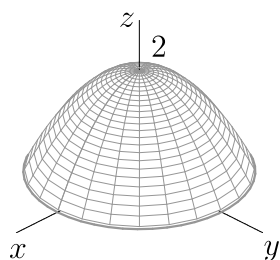
POZNÁMKA : Vzhledem k tomu, že daná plocha Q je grafem funkce $z = g(x, y)$ dvou proměnných, můžeme nezávislé proměnné x, y považovat přímo za parametry $P(x, y) = [x, y, 1-x-y]$, kde $[x, y] \in D$. Pak tečné vektory jsou $P_x = (1, 0, -1)$, $P_y = (0, 1, -1)$ a normálový vektor je $P_x \times P_y = (1, 1, 1)$ a

$$\iint_Q xz \, dp = \iint_D x \cdot (1-x-y) \cdot \sqrt{3} \, dx \, dy = \dots = \frac{\sqrt{3}}{24}$$

■

Příklad 611. $\iint_Q \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \, dp$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; 2z + x^2 + y^2 = 4, z \geq 0\}$

Řešení :



Q je část paraboloidu, který je grafem explicitně zadané funkce $z = 2 - \frac{x^2 + y^2}{2}$

$$Q : \begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = 2 - \frac{x^2 + y^2}{2}, \end{cases} \quad x^2 + y^2 \leq 4$$

$$\left| \begin{array}{ll} P(x, y) = \left[x, y, 2 - \frac{x^2 + y^2}{2} \right], & B = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \leq 4\} \\ P_x = (1, 0, -x), & P_y = (0, 1, -y) \\ P_x \times P_y = (x, y, 1), & \|P_x \times P_y\| = \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \end{array} \right|$$

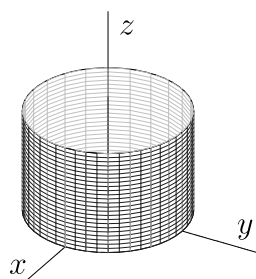
$$\iint_Q \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \, dp = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \, dx \, dy =$$

$$\begin{aligned}
&\iint_{x^2 + y^2 \leq 4} (x^2 + y^2 + 1) \, dx \, dy = (\text{polární souřadnice}) = \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ J = r \end{array} \right| \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \Bigg| = \\
&= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} (r^2 + 1) \cdot r \, d\varphi \right) dr = \left[\varphi \right]_0^{2\pi} \cdot \int_0^2 (r^3 + r) \, dr = 2\pi \cdot \left[\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} \right]_0^2 = 12\pi.
\end{aligned}$$

■

Příklad 612. $\iint_Q xy \, dp$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 1\}$

Řešení :



Q je část válcové plochy s poloměrem $r = 2$. Vycházíme z cylindrických souřadnic.

$$Q : \begin{cases} x = 2 \cos u \\ y = 2 \sin u \\ z = v, \end{cases} \quad \begin{array}{l} u \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ v \in \langle 0, 1 \rangle \end{array}$$

Integrál existuje, neboť funkce $f(x, y, z) = xy$ je spojitá na Q .

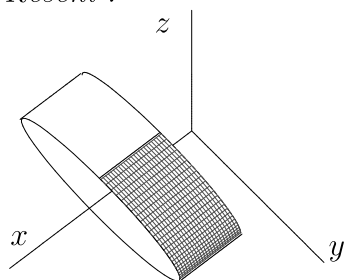
$$\left| \begin{array}{ll} P(u, v) = [2 \cos u, 2 \sin u, v], & B = \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \\ P_u = (-2 \sin u, 2 \cos u, 0), & P_v = (0, 0, 1) \\ P_u \times P_v = (2 \cos u, 2 \sin u, 0), & \|P_u \times P_v\| = 2 \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} \iint_Q xy \, dp &= \iint_B 2 \cos u \cdot 2 \sin u \cdot 2 \, du \, dv = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} 4 \sin u \cos u \cdot 2 \, du \right) dv = \\ &= 8 \int_0^{2\pi} \sin u \cos u \, du \cdot \int_0^1 1 \, dv = 8 \left[\frac{\sin^2 u}{2} \right]_0^{2\pi} \cdot [v]_0^1 = 8 \cdot 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

■

Příklad 613.* $\iint_Q xyz \, dp$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; y^2 + 9z^2 = 9, \quad 1 \leq x \leq 3, y \geq 0, z \geq 0\}$

Řešení :



Jde o část eliptické válcové plochy rovnoběžné s osou x a poloměrem $r = 3$.

Vycházíme ze zobecněných cylindrických souřadnic:

$$Q : \begin{cases} x = v \\ y = 3 \cos u \\ z = \sin u \end{cases} \quad \begin{matrix} u \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ v \in \langle 1, 3 \rangle \end{matrix}$$

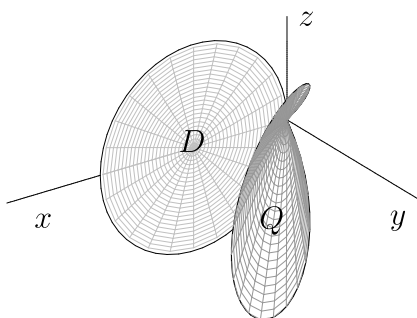
$$\left| \begin{array}{ll} P(u, v) = [v, 3 \cos u, \sin u] & B = \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \times \langle 1, 3 \rangle \\ P_u = (0, -3 \sin u, \cos u) & P_v = (1, 0, 0) \\ P_u \times P_v = (0, \cos u, 3 \sin u) & \|P_u \times P_v\| = \sqrt{8 \sin^2 u + 1} \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} \iint_Q xyz \, dp &= \iint_B v \cdot 3 \cos u \cdot \sin u \cdot \sqrt{8 \sin^2 u + 1} \, du \, dv = \\ &= 3 \int_1^3 v \, dv \cdot \int_0^{\pi/2} \cos u \sin u \cdot \sqrt{8 \sin^2 u + 1} \, du = \left| \begin{array}{l} 8 \sin^2 u + 1 = t \\ 16 \sin u \cos u \, du = dt \\ t \in \langle 1, 9 \rangle \end{array} \right| = \\ &= 3 \left[\frac{v^2}{2} \right]_1^3 \cdot \frac{1}{16} \int_1^9 \sqrt{t} \, dt = \frac{3}{2} (9 - 1) \cdot \frac{1}{16} \left[\frac{2t^{3/2}}{3} \right]_1^9 = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} (27 - 1) = 13. \end{aligned}$$

■

Příklad 614.* $\iint_Q (xy + yz + xz) \, dp$, $Q : y = \sqrt{x^2 + z^2}$, ležící uvnitř plochy $x^2 + z^2 = 2x$.

Řešení :



Plocha Q je část pláště rotačního kužele

$$y = \sqrt{x^2 + z^2},$$

(osa y je osou rotace), ležící uvnitř válcové plochy

$$x^2 + z^2 = 2x.$$

Průmět plochy Q do roviny (xz) je kruh D

$$x^2 + z^2 \leq 2x \implies (x - 1)^2 + z^2 \leq 1$$

$$D = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; (x - 1)^2 + z^2 \leq 1, y = 0\}.$$

$$\left| \begin{array}{ll} P(u, v) = [u, \sqrt{u^2 + v^2}, v], & B = \{[u, v] \in \mathbb{E}_2 : (u - 1)^2 + v^2 \leq 1\} \\ P_u = \left(1, \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, 0\right), & P_v = \left(0, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, 1\right) \\ P_u \times P_v = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, -1, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right) & \|P_u \times P_v\| = \sqrt{\frac{u^2}{u^2 + v^2} + 1 + \frac{v^2}{u^2 + v^2}} = \sqrt{2} \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned}
 \iint_Q (xy + yz + xz) dp &= \iint_{(x-1)^2+z^2 \leq 1} \left((x+z)\sqrt{x^2+z^2} + xz \right) \sqrt{2} dx dz = \\
 &= \iint_{(u-1)^2+v^2 \leq 1} \left((u+v)\sqrt{u^2+v^2} + uv \right) \sqrt{2} du dv = \left| \begin{array}{l} u = r \cos \varphi \\ v = r \sin \varphi \\ J = r \end{array} \right| \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{array} = \\
 &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2 \cos \varphi} \left(r(\cos \varphi + \sin \varphi) \cdot r + r^2 \sin \varphi \cos \varphi \right) r dr \right) d\varphi = \\
 &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi + \sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi) \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{2 \cos \varphi} d\varphi = \\
 &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi + \sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi) \cdot 4 \cos^4 \varphi d\varphi = \\
 &= 4\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^5 \varphi + \underbrace{\sin \varphi \cos^4 \varphi + \sin \varphi \cos^5 \varphi}_{\text{liché funkce}} \right) d\varphi = 4\sqrt{2} \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi d\varphi + 0 + 0 \right) = \\
 & \quad (\text{viz př. 21}) = 8\sqrt{2} \cdot \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} \cdot 1 = \frac{64\sqrt{2}}{15}.
 \end{aligned}$$

■

- Vypočítejte integrály na ploše $Q \subset \mathbb{E}_3$:

615. $\iint_Q (x + y + z) dp, \quad Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0, a > 0\} \quad [\pi a^3]$

616. $\iint_Q (x^2 + y^2) dp, \quad Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq 1\} \quad \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \pi \right]$

617. $\iint_Q x dp, \quad Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\} \quad [0]$

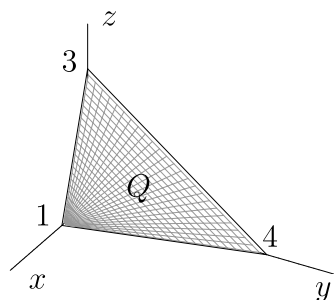
618. $\iint_Q z dp, \quad Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; 2z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1\} \quad \left[\frac{2}{15} \pi (1 + 6\sqrt{3}) \right]$

V.3. Aplikace plošného integrálu skalární funkce

- Pomocí plošného integrálu vypočítejte obsah plochy $Q \subset \mathbb{E}_3$:

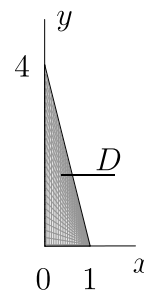
Příklad 619. Q je část roviny $12x + 3y + 4z = 12$ ležící v prvním oktantu.

Řešení : $Q = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{E}_3, z = \frac{12 - 12x - 3y}{4}, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \right\}$



Průmětem plochy Q
do roviny $z = 0$
je množina D

$$D : \begin{aligned} 0 &\leq x \leq 1 \\ 0 &\leq y \leq 4 - 4x \end{aligned}$$



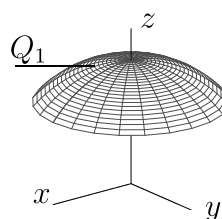
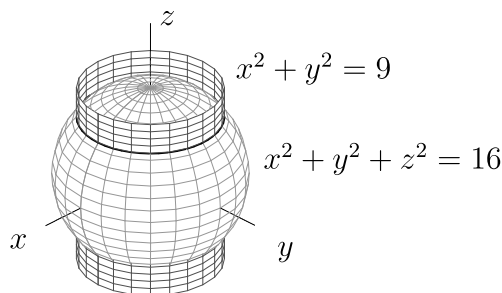
$\left \begin{aligned} P(x, y) &= \left[x, y, \frac{12 - 12x - 3y}{4} \right] \\ P_x &= (1, 0, 3) \\ P_x \times P_y &= \left(-3, -\frac{3}{4}, -1 \right) \end{aligned} \right $	$\left \begin{aligned} B &= \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4 - 4x\} \\ P_y &= \left(0, 1, -\frac{3}{4} \right) \\ \ P_x \times P_y\ &= \frac{13}{4} \end{aligned} \right $
---	--

$$S = \iint_Q 1 \, dp = \int_0^1 \left(\int_0^{4-4x} \frac{13}{4} \, dy \right) dx = \frac{13}{4} \int_0^1 (4 - 4x) \, dx = \frac{13}{4} (4 - 2) = \frac{13}{2}.$$

■

Příklad 620. Q je část kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ ležící uvnitř válcové plochy $x^2 + y^2 = 9$.

Řešení : Plocha Q je složena ze dvou stejných částí $Q = Q_1 \cup Q_2$.



Omezíme se na $z \geq 0 \implies S = 2 \iint_{Q_1} 1 \, dp$

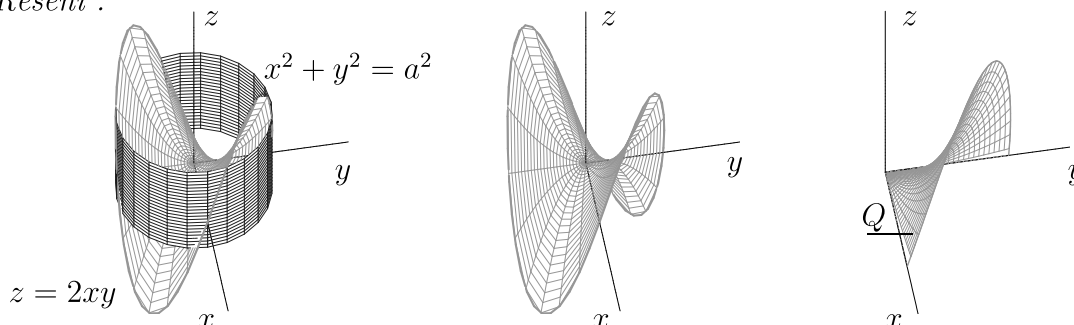
$\left \begin{aligned} P(x, y) &= [x, y, \sqrt{16 - x^2 - y^2}], \\ P_x &= \left(1, 0, \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} \right), \\ P_x \times P_y &= \left(\frac{x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}, 1 \right), \end{aligned} \right $	$\left \begin{aligned} B &= \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \leq 9\} \\ P_y &= \left(0, 1, \frac{-y}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} \right) \\ \ P_x \times P_y\ &= \frac{4}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} \end{aligned} \right $
--	--

$$S = 2 \iint_{x^2 + y^2 \leq 9} \frac{4 \, dx \, dy}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} = \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ J = r \end{array} \right| \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} =$$

$$= 8 \int_0^{2\pi} \int_0^3 \frac{r \, dr \, d\varphi}{\sqrt{16-r^2}} = 8 \cdot 2\pi \cdot \left[-\sqrt{16-r^2} \right]_0^3 = 16\pi(4-\sqrt{7}).$$

Příklad 621. Q je část plochy $z = 2xy$ ležící v prvním oktantu uvnitř válcové plochy $x^2 + y^2 = a^2$.

Řešení :

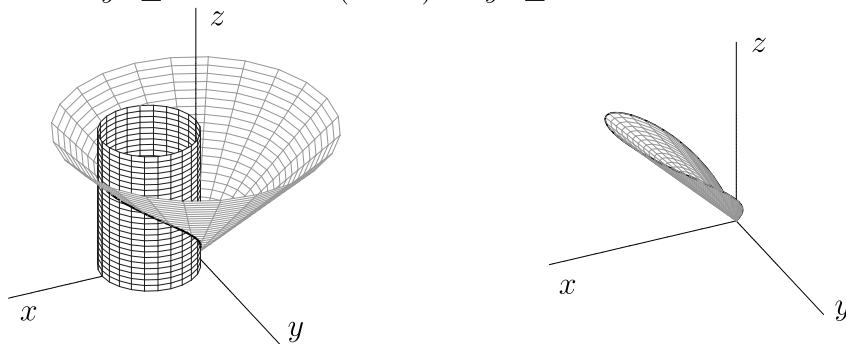


$$\left| \begin{array}{l} P(x, y) = [x, y, 2xy], \\ P_x = (1, 0, 2y), \\ P_x \times P_y = (-2y, -2x, 1), \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} B = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \leq a^2\} \\ P_y = (0, 1, 2x) \\ \|P_x \times P_y\| = \sqrt{4y^2 + 4x^2 + 1} \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} S &= \iint_Q 1 \, dp = \iint_B \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy = \left| \begin{array}{ll} x = r \cos \varphi & 0 \leq r \leq a \\ y = r \sin \varphi & 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ J = r \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^a \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r \, dr \, d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{8} \int_0^a \sqrt{1 + 4r^2} \cdot 8r \, dr = \frac{\pi}{16} \left[\frac{2(1 + 4r^2)^{3/2}}{3} \right]_0^a = \\ &= \frac{\pi}{24} \left((1 + 4a^2)\sqrt{1 + 4a^2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Příklad 622. Q je část kuželové plochy $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ležící uvnitř válcové plochy $x^2 + y^2 = 2x$.

Řešení : $x^2 + y^2 \leq 2x \implies (x-1)^2 + y^2 \leq 1$

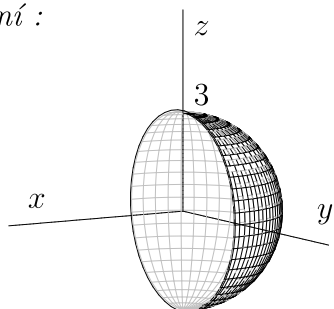


$$\left| \begin{array}{l} P(x, y) = [x, y, \sqrt{x^2 + y^2}], \\ P_x = \left(1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \\ P_x \times P_y = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1\right), \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} B = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; (x-1)^2 + y^2 \leq 1\} \\ P_y = \left(0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ \|P_x \times P_y\| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1} = \sqrt{2} \end{array} \right|$$

$$S = \iint_Q 1 \, dp = \sqrt{2} \iint_{(x-1)^2 + y^2 \leq 1} dx \, dy = (\text{integrál se rovná obsahu kruhu o poloměru 1}) = \sqrt{2} \cdot \pi \cdot 1^2$$

Příklad 623. Stanovte hmotnost plochy $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 + z^2 = 9, x \leq 0\}$,
je-li hustota $\varrho(x, y, z) = \frac{1}{z^2 + 9}$.

Řešení :



$$Q : \begin{cases} x = 3 \cos u \cos v \\ y = 3 \sin u \cos v \\ z = 3 \sin v \end{cases} \quad \begin{matrix} u \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle \\ v \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \end{matrix}$$

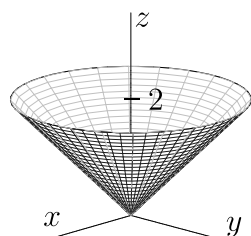
$$\left| \begin{array}{ll} P(u, v) = [3 \cos u \cos v, 3 \sin u \cos v, 3 \sin v] & B = \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle \times \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \\ P_u = (-3 \sin u \cos v, 3 \cos u \cos v, 0) & P_v = (-3 \cos u \sin v, -3 \sin u \sin v, 3 \cos v) \\ P_u \times P_v = (9 \cos u \cos^2 v, 9 \sin u \cos^2 v, 9 \sin v \cos v) & \|P_u \times P_v\| = 9 \cos v \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} m &= \iint_Q \varrho(x, y, z) dp = \iint_Q \frac{1}{z^2 + 9} dp = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{9 \cos v}{9 \sin^2 v + 9} du \right) dv = \\ &= \pi \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos v}{\sin^2 v + 1} dv = \left| \frac{\sin v = t}{\cos v dv = dt} \right| = \pi \cdot \int_{-1}^1 \frac{dt}{t^2 + 1} = \pi \cdot [\arctg t]_{-1}^1 = \pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

■

Příklad 624. Stanovte moment setrvačnosti vzhledem k ose z plochy $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq 2\}$, je-li hustota konstantní ($\varrho(x, y, z) = k$).

Řešení :



$$Q : \begin{cases} x = v \cos u \\ y = v \sin u \\ z = v \end{cases} \quad \begin{matrix} u \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ v \in \langle 0, 2 \rangle \end{matrix}$$

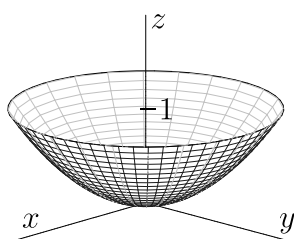
$$\left| \begin{array}{ll} P(u, v) = [v \cos u, v \sin u, v] & B = \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, 2 \rangle \\ P_u = (-v \sin u, v \cos u, 0) & P_v = (\cos u, \sin u, 1) \\ P_u \times P_v = (v \cos u, v \sin u, -v) & \|P_u \times P_v\| = v\sqrt{2} \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} J_z &= \iint_Q (x^2 + y^2) \varrho(x, y, z) dp = \iint_B v^2 \cdot k \cdot v\sqrt{2} dudv = \sqrt{2} k \int_0^2 \int_0^{2\pi} v^3 du dv = \\ &= \sqrt{2} k \cdot 2\pi \left[\frac{v^4}{4} \right]_0^2 = 8\sqrt{2} k\pi. \end{aligned}$$

■

Příklad 625. Najděte těžiště části paraboloidu $x^2 + y^2 = 2z$ omezené rovinou $z = 1$,
s hustotou $\varrho(x, y, z) = 1$.

Řešení :



Těžiště bude na ose rotace z , tj. $T = [0, 0, z_T]$,
 $z_T = \frac{M_{xy}}{m}$,

$$Q : \begin{cases} x = v \cos u \\ y = v \sin u \\ z = \frac{v^2}{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} u \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ v \in \langle 0, \sqrt{2} \rangle \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ll} P(u, v) = [v \cos u, v \sin u, v^2/2] & B = \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \sqrt{2} \rangle \\ P_u = (-v \sin u, v \cos u, 0) & P_v = (\cos u, \sin u, v) \\ P_u \times P_v = (v^2 \cos u, v^2 \sin u, -v) & \|P_u \times P_v\| = v\sqrt{1+v^2} \end{array} \right]$$

$$m = \iint_Q \varrho \, dp = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} 1 \cdot v\sqrt{1+v^2} \, du \right) dv = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} (1+v^2)^{1/2} \cdot 2v \, dv =$$

$$= \pi \left[\frac{2(1+v^2)^{3/2}}{3} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{3} (3\sqrt{3} - 1),$$

$$M_{xy} = \iint_Q z \varrho \, dp = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{v^2}{2} \cdot 1 \cdot v\sqrt{1+v^2} \, du \right) dv =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} v^2 \sqrt{1+v^2} \cdot v \, du \right) dv = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\sqrt{2}} v^2 \sqrt{1+v^2} \cdot v \, dv = \left[\begin{array}{l} 1+v^2 = t^2 \\ 2v \, dv = 2t \, dt \\ t \in \langle 1, \sqrt{3} \rangle \end{array} \right] =$$

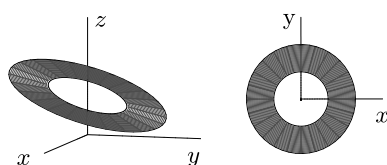
$$= \pi \cdot \int_1^{\sqrt{3}} (t^2 - 1)t^2 \, dt = \pi \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right]_1^{\sqrt{3}} = \pi \left(\frac{9\sqrt{3}}{5} - \sqrt{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{2\pi}{15} (1 + 6\sqrt{3}),$$

$$z_T = \frac{2\pi(1 + 6\sqrt{3}) \cdot 3}{15 \cdot 2\pi(3\sqrt{3} - 1)} = \frac{1 + 6\sqrt{3}}{5(3\sqrt{3} - 1)} \quad \boxed{T = \left[0, 0, \frac{1 + 6\sqrt{3}}{5(3\sqrt{3} - 1)} \right]} \quad \blacksquare$$

• Je dána plocha $Q \subset \mathbb{E}_3$.

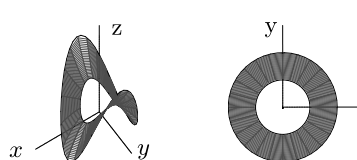
- Načrtněte danou plochu Q a její průmět do roviny (xy) .
- Navrhněte vhodnou parametrizaci plochy Q a vypočítejte délku vektoru kolmého k ploše Q při navržené parametrizaci.
- Určete plošný obsah dané plochy.

626. $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x + 2y + z = 6, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$



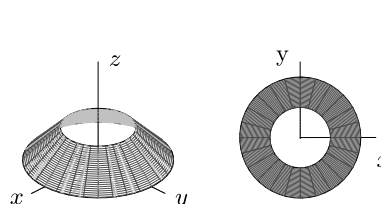
$$\left[\begin{array}{l} b) P(x, y) = [x, y, 6 - x - 2y], \\ B = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}, \|\vec{n}\| = \sqrt{6} \\ c) 3\pi\sqrt{6} \end{array} \right]$$

627. $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z = y^2 - x^2, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$



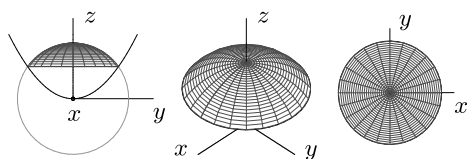
$$\left[\begin{array}{l} b) P(x, y) = [x, y, y^2 - x^2], \\ B = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}, \|\vec{n}\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \\ c) \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}) \end{array} \right]$$

628. $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq 2\}$



$$\left[\begin{array}{l} b_1) P(x, y) = [x, y, 4 - \sqrt{x^2 + y^2}], \\ B = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}, \|\vec{n}\| = \sqrt{2} \\ b_2) P(u, v) = [v \cos u, v \sin u, 4 - v], \\ B = \{[u, v] \in \mathbb{E}_2; 0 \leq u \leq 2\pi, 2 \leq v \leq 4\}, \|\vec{n}\| = v\sqrt{2} \\ c) 12\pi\sqrt{2} \end{array} \right]$$

629. Q je část kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ ležící uvnitř paraboloidu $x^2 + y^2 = 4z$.



$$\left[\begin{array}{l} b) P(u, v) = [\sqrt{12} \cos u \cos v, \sqrt{12} \sin u \cos v, \sqrt{12} \sin v], \\ B = \{[u, v] \in \mathbb{E}_2; 0 \leq u \leq 2\pi, \arctg(\sqrt{2}/2) \leq v \leq \pi/2\}, \\ \|\vec{n}\| = \sqrt{12} \cos v \\ c) 8\pi(3 - \sqrt{3}) \end{array} \right]$$

• Určete plošný obsah plochy $Q \subset \mathbb{E}_3$:

630. $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1\}$ $\left[\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)\right]$

631. $Q := \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; 3x + 4y + z = 1, \quad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ $\left[\frac{\sqrt{26}}{24}\right]$

632. Q je část kuželové plochy $z = 4\sqrt{x^2 + y^2}$ vytínané rovinami $x = 0, y = 0, 2x + 3y = 6$. $[3\sqrt{17}]$

633. Q je část roviny $2x + y - z = 0$ ležící uvnitř eliptické válcové plochy $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. $[12\sqrt{6}\pi]$

634. $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x = u + v, y = u - v, z = 4v, [u, v] \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle\}$. $[6]$

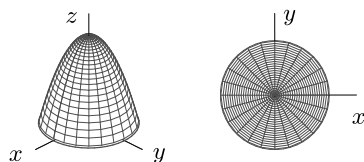
• Je dána plocha Q a plošná hustota $\varrho(x, y, z)$.

a) Načrtněte plochu Q a její průmět do roviny $z = 0$.

b) Navrhněte vhodnou parametrizaci plochy Q , napište vektor kolmý k dané ploše a určete jeho délku při této parametrizaci.

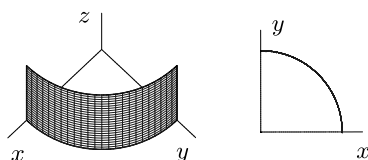
c) Určete hmotnost plochy Q .

635. $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$, $\varrho(x, y, z) = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$.



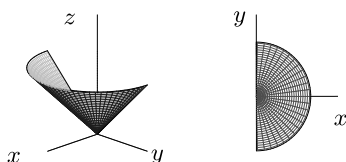
$$\left[\begin{array}{l} b_1) P(x, y) = [x, y, 4 - x^2 - y^2], \\ B = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \leq 4\}, \\ \vec{n} = (2x, 2y, 1), \|\vec{n}\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \\ b_2) P(u, v) = [v \cos u, v \sin u, 4 - v^2], \\ B = \{[u, v] \in \mathbb{E}_2; 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\}, \\ \vec{n} = (2v^2 \cos v, 2v^2 \sin v, v), \|\vec{n}\| = v\sqrt{4v^2 + 1} \\ c) 36\pi \end{array} \right]$$

636. $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \in \langle 0, 3 \rangle\}$, $\varrho(x, y, z) = xyz$



$$\left[\begin{array}{l} b) P(u, v) = [2 \cos u, 2 \sin u, v], B = \langle 0, \pi/2 \rangle \times \langle 0, 3 \rangle \\ \vec{n} = (2 \cos u, 2 \sin u, 0), \|\vec{n}\| = 2 \\ c) 18 \end{array} \right]$$

637. $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : z^2 = x^2 + y^2, x \geq 0, z \in \langle 0, 1 \rangle\}$, $\varrho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$



$$\left[\begin{array}{l} b_1) P(x, y) = [x, y, \sqrt{x^2 + y^2}], \\ B = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}, \\ \vec{n} = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right), \|\vec{n}\| = \sqrt{2} \\ b_2) P(u, v) = [v \cos u, v \sin u, v], \\ B = \{[u, v] \in \mathbb{E}_2; -\pi/2 \leq u \leq \pi/2, 0 \leq v \leq 1\}, \|\vec{n}\| = v\sqrt{2} \\ c) \sqrt{2}\pi/3 \end{array} \right]$$

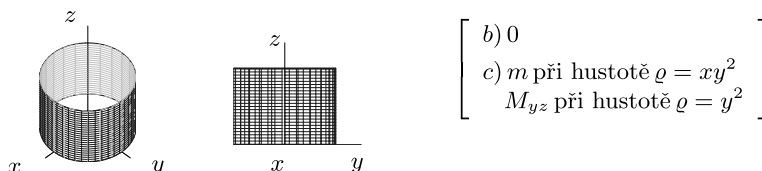
• Je dána plocha Q a skalární funkce f .

a) Načrtněte plochu Q a její průmět do roviny $x = 0$.

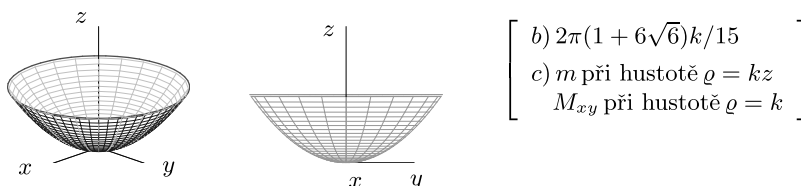
b) Vypočítejte $\iint_Q f \, dp$.

c) Napište, co by mohl vyjadřovat integrál z úlohy b).

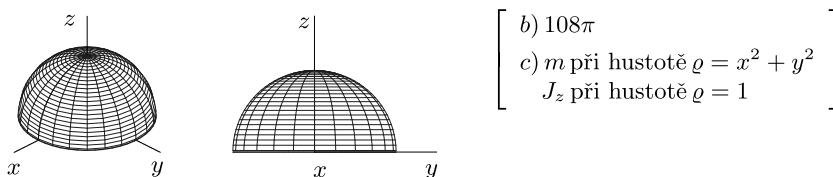
638. $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, z \in \langle 0, 3 \rangle\}, \quad f(x, y, z) = xy^2.$



639. $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), z \in \langle 0, 1 \rangle\}, \quad f(x, y, z) = kz, k > 0$



640. $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}\}, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2$

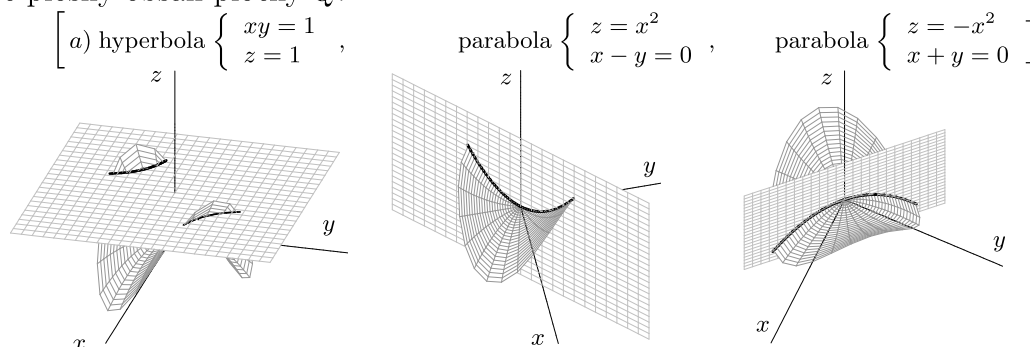


641. Je dána plocha $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : z = xy, x^2 + y^2 \leq 3\}$.

a) Do tří samostatných obrázků načrtněte křivky, které vzniknou řezem grafu funkce $z = xy$ rovinou $z = 1$, rovinou $x - y = 0$ a rovinou $x + y = 0$.

b) Navrhněte vhodnou parametrizaci plochy Q . Napište vektor kolmý k ploše Q a vypočítejte jeho délku (při této parametrizaci).

c) Určete plošný obsah plochy Q .



b) $P(x, y) = [x, y, xy], B = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 3\},$
 $\vec{n} = (-y, -x, 1), \|\vec{n}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$
 c) $14\pi/3$

642. Vypočítejte hmotnost plochy $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0, a > 0\}$ při plošné hustotě $\varrho(x, y, z) = z$. $[\pi a^3]$

- 643.** Vypočtěte hmotnost plochy $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ při plošné hustotě $\varrho(x, y, z) = \frac{1}{(1 + x + y)^2}$. $\left[\sqrt{3}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)\right]$
- 644.** Vypočtěte těžiště části kuželové plochy $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ vyříznuté válcovou plochou $x^2 + y^2 = ax$, ($a > 0$), je-li hustota konstantní $\varrho(x, y, z) = k$. $\left[T = \left[\frac{a}{2}, 0, \frac{16a}{9\pi}\right]\right]$
- 645.** Vypočtěte těžiště plochy $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x = \sqrt{y^2 + z^2}, y \geq 0, 0 \leq x \leq 2\}$ při plošné hustotě $\varrho(x, y, z) = x$. $\left[T = \left[\frac{3}{2}, \frac{3}{\pi}, 0\right]\right]$
- 646.** Vypočtěte souřadnici y_T těžiště T plochy $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + z^2 = 4, x \geq 0, z \geq 0, y \in \langle 0, 3 \rangle\}$ při plošné hustotě $\varrho(x, y, z) = xyz$. $[2]$
- 647.** Vypočtěte statický moment vzhledem k ose rotace povrchu homogenní polokoule o poloměru R , $\varrho(x, y, z) = k$. $\left[\frac{\pi}{6}(3\pi + 4)kR^3\right]$
- 648.** Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose z homogenního trojúhelníka s vrcholy $[a, 0, 0]$, $[0, a, 0]$, $[0, 0, a]$ ($a > 0$, $\varrho(x, y, z) = k$). $\left[\frac{\sqrt{3}}{6}a^4k\right]$
- 649.** Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose z homogenní plochy $Q = Q_1 \cup Q_2$, kde $Q_1 = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 \leq 16, z = 0\}$, $Q_2 = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}, z \geq 0\}$, $\varrho(x, y, z) = k$. $[128k\pi(1 + \sqrt{2})]$
- 650.** Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose z homogenní plochy $Q = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z^2 = \frac{h^2}{a^2}(x^2 + y^2), 0 \leq z \leq h\right\}$, $\varrho(x, y, z) = k$. $\left[\frac{\pi}{2}a^3k\sqrt{a^2 + h^2}\right]$