

## Matice

**Definice.** *Maticí typu  $m \times n$*  nazýváme obdélníkové pole, tvořené z  $m \cdot n$  reálných čísel (tzv. *prvků* matice), zapsaných v  $m$  řádcích a  $n$  sloupcích.

Značíme např.  $A = (a_{ij})$ , kde  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$

### Příklad

Předpokládejme, že  $A = (a_{ij})$  je matice typu  $m \times n$ :

*Hlavní diagonála* je tvořena prvky  $a_{11}, a_{22}, \dots$

Matice  $A$  se nazývá *horní trojúhelníkovou maticí*, jestliže všechny prvky pod hlavní diagonálou jsou rovny nule.

Matice  $A$  se nazývá *nulovou maticí*, jsou-li všechny její prvky rovny nule.

Maticí *transponovanou k matici  $A$*  nazýváme matici  $A^T = (a_{ji})$ .

Transponovanou matici  $A^T$  získáme "překlopením" matice  $A$  kolem hlavní diagonály. Z řádků matice  $A$  se stanou sloupce matice  $A^T$ .

## Příklad.

Matici typu  $n \times n$  nazýváme *čtvercovou maticí*.

Čtvercovou maticí, která má na hlavní diagonále samé jednotky a všude mimo hlavní diagonálu nuly, nazýváme *jednotkovou maticí*. Tuto matici označujeme  $E$ .

## Operace s maticemi

**Sčítání matic.** *Součtem* matic  $A = (a_{ij})$  a  $B = (b_{ij})$  stejného typu  $m \times n$  nazýváme matici  $C = A + B$ , pro jejíž prvky platí  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ ).

### Násobení matice reálným číslem

*Součinem reálného čísla  $\lambda$  a matice  $A$*  (nebo také  *$\lambda$ -násobkem matice  $A$* ) nazýváme matici  $C = \lambda \cdot A$ , kde  $c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$  ( $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$ ).

## Příklad:

**Poznámka.** Množina všech matic stejného typu  $m \times n$  s těmito dvěma operacemi tvoří vektorový prostor dimenze  $m \cdot n$ . Navrhněte bázi tohoto prostoru.

**Poznámka.** Matice stejného typu lze také odčítat: *Rozdílem matic  $A$  a  $B$*  nazýváme matici  $C = A + (-1) \cdot B$ . Píšeme  $C = A - B$ .

Pro definici násobení matic se hodí následující pojem:

*Skalárním součinem* vektorů  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$  a  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$  z  $\mathbb{R}^n$  nazýváme číslo  $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$ .

### Násobení matic.

**Předpoklad:**  $A = (a_{ij})$  je typu  $m \times n$ ,  $B = (b_{ij})$  je typu  $n \times p$ .

*Součinem matic  $A$  a  $B$*  pak nazýváme matici  $C = A \cdot B$  typu  $m \times p$ , jejíž prvek  $c_{ij}$  je skalárním součinem  $i$ -tého řádku z  $A$  a  $j$ -tého sloupce z  $B$ , ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, p$ ).

**Poznámka.** Je tedy  $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$ .

## Pravidla pro operace s maticemi.

Předpokládejme, že  $\alpha, \beta$  jsou reálná čísla a  $A, B$  a  $C$  jsou matice takové, že níže uvedené operace mají smysl. Pak platí:

a)  $A + B = B + A,$

b)  $(A + B) + C = A + (B + C),$

c)  $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B,$

d)  $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A,$

e)  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C,$

f)  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C),$

g)  $A \cdot E = A,$

h)  $E \cdot B = B,$

i)  $(A + B)^T = A^T + B^T,$

j)  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$

**POZOR!** Násobení matic není komutativní, tj. obecně neplatí, že  $A \cdot B = B \cdot A$ !

**Příklady.**

## Hodnost matice

**Definice.** *Hodností* matice  $A$  nazýváme maximální počet lin. nezávislých řádků matice  $A$  (jako aritmetických vektorů). Značíme ji  $h(A)$ .

**Poznámka.**  $h(A)$  lze definovat i jako maximální počet lineárně nezávislých sloupců.

### Jednoduché příklady:

**Postup** při určení hodnosti dané matice:

Je-li  $m = 2$  nebo  $n = 2$ , pak lze určit hodnost přímo podle definice.

Je-li  $m > 2$  a  $n > 2$ , pak danou matici převedeme na horní trojúhelníkovou.

### **Věta 2.17.**

*Nechť  $A$  je horní trojúhelníková matice typu  $m \times n$ , která má všechny prvky na hlavní diagonále různé od nuly. Pak  $h(A) = \min\{m; n\}$ , tj. počet nenulových řádků.*

### Příklad

Pro převod dané matice na horní trojúhelníkovou používáme tzv. **ekvivalentní úpravy**, které nemění hodnotu matice.

**Ekvivalentní úpravy matice**, které budeme používat

- 1) změna pořadí řádků,
- 2) vynásobení některého řádku nenulovým číslem,
- 3) přičtení násobku některého řádku k jinému řádku
- 4) vynechání nulového řádku; vynechání řádku, který je násobkem jiného.

Úpravy z bodů 1) – 4) lze provádět i se sloupci matice, hodnota se rovněž nemění.

K vytvoření nulového prvku v požadovaném místě užíváme **zpravidla úpravu č. 3**.

Postup převedení libovolné matice pomocí ekvivalentních úprav na horní trojúhelníkovou matici, se nazývá **Gaussův algoritmus**.

## Gaussův algoritmus:

### 1. krok:

Je-li  $a_{11} \neq 0$ , pak první řádek **opíšeme** !

Pomocí prvku  $a_{11}$  vytvoříme pod ním nuly v prvním sloupci.

Je-li  $a_{11} = 0$ , zaměníme řádky nebo sloupce.

Pokud lze, zaměníme tak, aby  $a_{11} = 1$  nebo  $a_{11} = -1$ .

### 2. krok:

Je-li prvek  $a'_{22} \neq 0$  (v nové matici),

vytvoříme pomocí něho nuly ve druhém sloupci pod ním (druhý řádek opíšeme)

**Postup opakujeme**, až získáme horní trojúhelníkovou matici.

### Příklad:

Další příklady jsou uvedeny **v textu Hodnost matice** na webu

”Kombinované studium”