IV.1. Primitivní funkce, neurčitý integrál

Definice. Je-li $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in I$, pak funkci F nazýváme primitivní funkcí k funkci f v intervalu I.

? existence

Věta 1.3 (postačující podmínka pro existenci)

Je-li funkce f spojitá v I, pak k ní existuje v intervalu I primitivní funkce.

? jednoznačnost

Věta 1.5 Je-li F primitivní funkce k funkci f v intervalu I a C je libovolná konstanta, pak funkce $F + C$ je také primitivní funkcí k funkci f v intervalu I.
Jsou-li F a G primitivní funkce k funkci f v intervalu I, pak existuje konstanta C tak, že $G = F + C$ v I.

Neurčitý integrál: $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C, \quad x \in I.$

Věta 1.8

Nechť funkce f, g mají neurčité integrály v intervalu I.
Pak platí:

$$\int konst \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = konst \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Věta 3.2 (o integraci per-partes)

Nechť funkce u, v mají spojité derivace v intervalu I.
Pak v tomto intervalu platí:

$$\int u' v \,\mathrm{d}x = u\,v - \int u\,v' \,\mathrm{d}x \qquad (*)$$

Postup při integraci per-partes

Nalevo je integrál součinu dvou funkcí

1. Jednu z nich označíme jako u', druhou označíme v

2. Připravíme si funkce: $u = \int u' \,\mathrm{d}x$ a derivaci v'

3. Dosadíme napravo ve vzorci (*) a pokračujeme ve výpočtu.

Doporučení

1. Jako u' volíme funkci, kterou snadno integrujeme,
neboť musíme nejprve určit $u = \int u' \,\mathrm{d}x$.

2. Integrál $\int u\,v' \,\mathrm{d}x$ napravo by měl být (výrazně) lehčí než integrál původní

Příklady.

1. $$\int \ln x \, \mathrm{d}x = x \, \ln x - x + C, \quad x \in (0, \infty)$$

2. $$\int (x^2 - 2) \cdot \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \text{dvakrát per-partes ...}$$
$$= (x^2 - 2x) \cdot \mathrm{e}^x + C, \; x \in \mathbb{R}$$

3. $$\int (x^6 - 4x) \cdot \ln x \, \mathrm{d}x = \ldots$$
$$= \left(\frac{x^7}{7} - 2x^2\right) \ln x - \frac{x^7}{49} + x^2 + C, \quad x \in (0, \infty)$$

4. $$\int x \cdot \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} (x - \operatorname{arctg} x) + C, \; x \in \mathbb{R}$$

Věta 3.2 (Integrace substitucí)

Nechť funkce $t = g(x)$ má spojitou derivaci v intervalu J, který zobrazuje na I. Nechť funkce $f(t)$ je spojitá v I.

Potom platí:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t,$$

kde $t = g(x)$, $x \in J$, $t \in I$.

??? Jakou metodu použít ?

V obou metodách integrujeme součin funkcí, ALE

pro substituční metodu je jedna z funkcí složená,

ta druhá je derivací její vnitřní fce (té složené), příp. až na násobící konst.

Speciální případ

$$\int \frac{\boldsymbol{f'(x)}}{\boldsymbol{f(x)}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \ln|\boldsymbol{f(x)}| + \boldsymbol{C}, \quad \text{po substituci } f(x) = t.$$

Příklady. Dvojice úloh (podobné funkce, různé metody)

1a. $\int x^2 \cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$, 1b. $\int x \cdot \mathrm{e}^{x^2} \,\mathrm{d}x$

2a. $\int \frac{\ln x}{x^2} \,\mathrm{d}x$, 2b. $\int \frac{\ln x}{x} \,\mathrm{d}x$

Příklady typu $\int (2x-1)\cdot \mathrm{e}^{5x}\,\mathrm{d}x$

Řešení lze začít substitucí $5x = t$,

tedy $x = \frac{1}{5}t$, $dx = \frac{1}{5}dt$ a pak per-partes,

Při troše zkušeností lze však hned per-partes, neboť
$$\int \mathrm{e}^{5x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x} + C.$$