**Nevlastní integrál** ( pracovní text)

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz )

Definice Riemannova integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ předpokládá, že interval $\langle a, b\rangle$ je omezený a funkce $f$ je v něm omezená. Pokud tento předpoklad není splněn, pak Riemannův integrál neexistuje. Přesto mohou nastat situace, ve kterých je vhodné se takovým integrálem zabývat.

Předpokládejme, že Riemannův integrál daná funkce $f$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ neexistuje, že však pro každé $t \in \langle a, b)$ je funkce $f$ integrovatelná v intervalu $\langle a, t\rangle$.
Jestliže existuje limita

$$\lim_{t\to b_-} \left(\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x\right),$$

pak její hodnotu nazýváme *nevlastním Riemannovým integrálem se singulární horní mezí.* Pokud je tato hodnota konečná, pak říkáme, že *integrál konverguje.* Pokud je tato hodnota $+\infty$ nebo $-\infty$, pak říkáme, že *integrál diverguje.*

Analogicky je definován *nevlastní Riemannův integrál se singulární dolní mezí.*

Je-li funkce $f$ v intervalu $(a, b)$ neomezená, mluvíme o *nevlastním integrálu vlivem funkce.* Je-li interval $(a, b)$ neomezený, mluvíme o *nevlastním integrálu vlivem meze.*

Protože integrál v této definici, tj. integrál $\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$, je primitivní funkcí k funkci $f$ v příslušném intervalu, lze při výpočtu nevlastního integrálu postupovat podle následující věty.

**Věta IV.6.6.** Nechť funkce $f$ je spojitá v intervalu $(a, b)$. Potom existuje integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to b_-} F(t) - \lim_{t\to a_+} F(t),$$

pokud výraz na pravé straně má smysl.

**Poznámka.** Je-li funkce $f$ spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$, který je omezený, pak hodnoty limit jsou $F(b)$, resp. $F(a)$ a jedná se o Newtonovu-Leibnizovu formuli pro "běžný"Riemannův integrál.

### Příklady

$\boxed{\textbf{1.}}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi.$

Řešení: Jedná se o nevlastní integrál, v němž jsou singulární obě meze. Integrovaná funkce je spojitá v intervalu $(-\infty, +\infty)$. Neurčitý integrál je
$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C$. Podle výše uvedené věty tedy počítáme nevlastní integrál takto:
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x - \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$, daný integrál konverguje.

$\boxed{\textbf{2.}}$ $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = \ln(4/3).$

Řešení: Definiční obor $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$. V intervalu $(3, +\infty)$ je tedy integrovaná funkce spojitá. Jedná se o nevlastní integrál vlivem horní meze, můžeme postupovat podle uvedené věty. Primitivní funkci určíme pomocí rozkladu na součet parciálních zlomků. Výpočet je proveden podrobně v textu [3] na této webové stránce.
$\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln|x| - \ln|x+1| + C.$
Po úpravě výrazů s logaritmy a využitím toho, že na daném intervalu je $x > 0$ lze primitivní funkci napsat ve tvaru $F(x) = \ln\dfrac{x}{x+1}$.

Výpočet dokončíme podle uvedené věty:

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{x}{x+1} - F(3) = \lim_{z\to 1} \ln z - \ln(3/4) = \ln(4/3),$$ daný integrál konverguje.

Při výpočtu limity jsme postupovali podle věty o limitě složené funkce.

Podobně postupujeme v následujícím příkladu se stejnou funkcí, kde se však jedná o nevlastní integrál se singulární dolní mezí, a to vlivem funkce. Ta není omezená v pravém okolí bodu $x = 0$.

**3.** $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = +\infty$. Primitivní funkce je stejná jako v předchozím příkladu, takže v závěrečné části výpočtu dostáváme:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = F(1) - \lim_{x\to 0_+} \ln\frac{x}{x+1} = \ln(1/2) - \lim_{z\to 0_+} \ln z = \ln(1/2) - (-\infty) = +\infty,$$ daný integrál diverguje.

**Upozornění:** Následující dvě úlohy předpokládají znalost integrace racinální funkce s polynomem stupně 3 ve jmenovateli, která je v požadavcích ke zkoušce Alfa. V níže uvedené Sbírce jsou v odstavci III.4 řešené příklady pro všechny možné situace této zmíněné typové úlohy integrace. Při výpočtu limit postupujeme podobně jako v předchozích dvou úlohách.

**4.** $\int_1^3 \frac{16x+20}{(x-4)(x+3)(x-1)}\,\mathrm{d}x = -\infty.$

V tomto příkladu se jedná o tři reálné různé kořeny a tedy následující rozklad na součet parciálních zlomků. Dále postupujeme podle věty o výpočtu nevlastního integrálu.

$$\frac{16x+20}{(x-4)(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1} = \frac{4}{x-4} + \frac{-1}{x+3} + \frac{-3}{x-1}.$$

**5.** $\int_3^{+\infty} \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\,\mathrm{d}x = -3 + \ln 9.$

V tomto příkladu se jedná o dva reálné kořeny, z nichž jeden je dvojnásobný. Rozklad na součet parciálních zlomků vede k následujícímu vyjádření dané funkce:

$$\frac{x-8}{x^3-4x^2+4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} = \frac{-2}{x} + \frac{2}{x-2} + \frac{-3}{(x-2)^2}.$$

**Další příklady**.

Určete primitivní funkci $F(x)$. Výpočtem pak rozhodněte, zda daný nevlastní integrál konverguje či diverguje.

**6.** $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1$, konverguje  **7.** $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = +\infty$, diverguje  $F(x) = -\frac{1}{x}$

**8.** $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 3.$  **9.** $\int_1^2 \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = +\infty.$  $F(x) = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1|$

Příklad č. 8 je vyřešen ve sbírce [2], a to včetně první části, tj. nalezení primitivní funkce pomocí rozkladu na součet parciálních zlomků.

**Integrace per-partes**

**10.** $\int_0^1 x^3 \ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{16}.$  **11.** $\int_1^{+\infty} x^3 \ln x\,\mathrm{d}x = +\infty.$  $F(x) = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4$

**Integrace substitucí**

$\boxed{\mathbf{12.}}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$ substituce $-x^2 = t$, pak $F(x) = -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

$\boxed{\mathbf{13.}}$ $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{x\,\ln^2 x}\,\mathrm{d}x = 1.$ substituce $\ln x = t$, pak $F(x) = -\dfrac{1}{\ln x}$.

$\boxed{\mathbf{14.}}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x = \pi/6$ substituce $3x = t$, pak $F(x) = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{arctg}(3x)$.

Skriptum [1] obsahuje neřešené příklady s výsledky a dva příklady řešené.
Další příklady, řešené i neřešené, jsou ve Sbírce [2].

**Literatura:**


[1] J. Neustupa: Matematika I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2013, dotisk 2017.

[2] S.Kračmar, F. Mráz, J.Neustupa: Sbírka příkladů z Matematiky I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2013, dotisk 2017.

[3] F. Mráz: Integrace racionální funkce (stručný text s řešenými příklady). Webová stránka předmětu Matematika I, odkaz Kombinované studium.