

# Opakovací kurs středoškolské matematiky – podzim 2016

František Mráz

Ústav technické matematiky, Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz

## I. Mocniny, odmocniny, algebraické výrazy

Upravte (zjednodušte), případně určete číselnou hodnotu. U výrazů udejte, kdy mají smysl.

1.  $4n^2 \cdot 3(-n^3)(-2n^4)$     2.  $((-2)^{-1})^{-6}$     3.  $\left(\frac{3}{4}\right)^{-14} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$   
4.  $\left(\frac{2ab}{25x^2y^2}\right)^{-3} : \left(\frac{4a}{5xy^2}\right)^{-2}$     5.  $\frac{ax+bx}{ax-bx}$     6.  $\frac{x-1}{x^2-x}$   
7.  $8m - [6m - (2n + 4m)] + 4n$     8.  $3x - 4y - (-5y - 6x) - (7x + 8y)$   
9.  $(2x + 2)x - (x^2 + 2x + 4)$     10.  $4n^2 - (2n - 3)^2$   
11.  $\frac{15x + 4y}{12} - \frac{3y - 22x}{9}$     12.  $\left(\frac{1}{b+1} - \frac{2b}{b^2-1}\right) : \frac{b}{1-b}$   
13.  $(p+q) : \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$     14.  $\left(\frac{x-1}{x-2} - \frac{x}{x-1}\right) \left(x - \frac{3x}{x+1}\right)$   
15.  $\frac{\frac{15}{32}}{-\frac{6}{8}}$     16.  $\frac{\frac{6x}{yz}}{\frac{8xz}{y}}$     17.  $\frac{b-1 + \frac{6}{b-6}}{b-2 + \frac{3}{b-6}}$     18.  $\left(\frac{-16}{5}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{\frac{64}{25}}{2 \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}}$

### Výsledky kapitoly I

1.  $24n^9$     2. 64    3.  $\left(\frac{4}{3}\right)^4$     4.  $\frac{1250x^4y^2}{ab^3}$ ,  $abxy \neq 0$     5.  $\frac{a+b}{a-b}$ ,  $x \neq 0, a-b \neq 0$   
6.  $\frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0, x \neq 1$     7.  $6m + 6n$     8.  $2x - 7y$     9.  $x^2 - 4$     10.  $12n - 9$     11.  $\frac{133x}{36}$   
12.  $\frac{1}{b}$ ,  $b \neq 0, b \neq \pm 1$     13.  $pq$ ,  $p \neq 0, q \neq 0, p+q \neq 0$     14.  $\frac{x}{x^2-1}$ ,  $x \neq \pm 1, x \neq 2$   
15.  $-\frac{5}{8}$     16.  $\frac{3}{4z^2}$ ,  $xyz \neq 0$     17.  $\frac{b-4}{b-5}$ ,  $b \neq 3, b \neq 5, b \neq 6$     18. 0, (zkouška z př. 85)

## II. Rovnice lineární, kvadratické, kubické, s absolutní hodnotou

Řešte dané rovnice a proveďte zkoušku.

19.  $3(4-x) - 6(3-2x) = 2x - 27$     20.  $\frac{t}{2} - \frac{t+5}{3} = \frac{t-3}{2} - \frac{t-2}{3}$   
21.  $\frac{y+5}{10} - \frac{y-4}{8} = 1$     22.  $\frac{25x+6}{15} - (x-1) = \frac{2x}{3} + \frac{7}{5}$   
23.  $5 + \frac{3}{3u-12} = \frac{5-u}{u-4}$     24.  $|2x-7| + |2-x| = 3$

Řešte dané rovnice a proveďte zkoušku:

25.  $x^2 + 5x = 0$     26.  $(3x+1)(x-\sqrt{5}) = 0$     27.  $(3-\lambda)^2 + 4 = 0$   
28.  $x^3 - 4x^2 + 5x = 0$     29.  $3x^2 \cdot x - (x^3 + 16) = 0$     30.  $(3-\lambda)(3+\lambda) - 4 = 0$   
31.  $(1-\lambda)(-1-\lambda) + 5 = 0$     32.  $(2x+3)x - (x^2 + 3x + 9) = 0$

### Výsledky kapitoly II

19.  $x = -3$     20. Nemá řešení    21.  $y = 0$     22.  $x \in \mathbb{R}$     23. Nemá řešení, neboť  $4 \notin D$   
24.  $x_1 = 2, x_2 = 4$     25.  $x_1 = 0, x_2 = -5$     26.  $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = \sqrt{5}$     27.  $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$   
28.  $x_1 = 0, x_{2,3} = 2 \pm i$     29.  $x = 2$     30.  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{5}$     31.  $\lambda_{1,2} = \pm 2i$     32.  $x_{1,2} = \pm 3$

### III. Funkce

Předpokládá se znalost definičních oborů, grafů a základních vlastností "elementárních" funkcí ( funkce mocninná, lineární, kvadratická, absolutní hodnota, lineární lomená, odmocnina, exponenciální, logaritmická, goniometrické)

Určete definiční obor dané funkce  $y = f(x)$ :

$$\begin{array}{llll} 33. y = 3x - 5 & 34. y = 4x^7 - 5x^3 + \frac{3}{2}x - 8 & 35. y = \frac{x^3 - 8}{x} & 36. y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} \\ 37. y = \frac{2x - 3}{x^2 + 2x - 3} & 38. y = \sqrt{5 - 3x} & 39. y = \frac{x - 2}{\sqrt{x + 5}} & 40. y = \frac{3x}{\sqrt{2 - x^2}} \\ 41. y = e^{100x-7} & 42. y = (x + 2) e^{1/x} & 43. y = \sqrt{1 - |x|} & 44. y = \sqrt{\sin x} \\ 45. y = \ln(x^2 - 1) & 46. y = \ln(x^2 + 2x + 3) & 47. y = \frac{x}{\ln x} & \end{array}$$

Určete hodnoty logaritmické funkce:

$$48. \ln 1 \quad 49. \ln 0 \quad 50. \ln e \quad 51. \ln \sqrt[3]{e} \quad 52. \ln \left( \frac{1}{e^2} \right) \quad 53. \ln(-2)$$

Určete logaritmus daného výrazu při daném základu  $z$

$$54. V = \frac{1}{3} \pi r^2 v, z = 5 \quad 55. y = \sqrt[3]{\frac{b^2}{4}}, z = 4 \quad 56. T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}, z = e \quad 57. y = \frac{a^2}{x\sqrt{y}}, z = a$$

Určete výraz  $V$ , je-li dán jeho logaritmus

$$\begin{array}{ll} 58. \ln V = \ln 4 - \ln 3 + \ln \pi + 3 \ln r & 59. \log_2 V = 3 \log_2 x + (n + 3) \log_2 y - 3 \\ 60. \log_a V = \frac{3}{4} \log_a(x + 2) - 2 \log_a y & 61. \log_5 V = 2 \log_5(x - 2) + 3 \log_5(x + 2) - 2 \log_5(x^2 - 4) \end{array}$$

### Výsledky kapitoly III

$$33. x \in \mathbb{R} \quad 34. x \in \mathbb{R} \quad 35. x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad 36. x \in \mathbb{R} \quad 37. x \in \mathbb{R} - \{1, -3\}$$

$$38. x \in (-\infty, 5/3) \quad 39. x \in (-5, +\infty) \quad 40. x \in (-\sqrt{2}, +\sqrt{2}) \quad 41. x \in \mathbb{R}$$

$$42. x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad 43. x \in \langle -1, 1 \rangle \quad 44. \text{sjednocení intervalů } \langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle, k \in \mathbb{Z}$$

$$45. x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \quad 46. x \in \mathbb{R} \quad 47. x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$48. 0 \quad 49. \text{není definován} \quad 50. 1 \quad 51. 1/3 \quad 52. -2 \quad 53. \text{není definován}$$

$$54. \log_5 V = \log_5 \pi + 2 \log_5 r + \log_5 v - \log_5 3 \quad 55. \log_4 y = \frac{2}{3} \log_4 b - \frac{1}{3}$$

$$56. \ln T = \ln 2 + \ln \pi + \frac{1}{2}(\ln l - \ln 2 - \ln g) \quad 57. \log_a y = 2 - \log_a x - \frac{1}{2} \log_a y$$

$$58. V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad 59. V = \frac{x^3 y^{n+3}}{8} \quad 60. V = \sqrt[4]{(x+2)^3/y^2} \quad 61. V = \frac{(x-2)^2(x+2)^3}{(x^2-4)^2} = x+2$$

### IV. Rovnice exponenciální, logaritmické, s odmocninami

Řešte dané rovnice a proveďte zkoušku.

$$62. 3^x = 81 \quad 63. \left( \frac{1}{4} \right)^x = 16 \quad 64. 2^x = -8 \quad 65. 2011^x = 1 \quad 66. e^x = \frac{1}{e}$$

$$67. \sqrt{128} = 8^x \quad 68. \left( \frac{3}{2} \right)^x = \frac{8}{27} \quad 69. 5^{x^2-2} \cdot 5^{3x+4} = 1 \quad 70. x^2 e^x + 3x e^x - 4e^x = 0$$

$$71. (5x - 1)e^x + 5e^x = 0 \quad 72. e^{\frac{1}{x}} + x e^{\frac{1}{x}} \left( -\frac{1}{x^2} \right) = 0$$

$$73. \ln x = 0 \quad 74. \ln x = 1 \quad 75. \ln x = 3 \quad 76. \ln x + 1 = 0 \quad 77. \ln(\sqrt{x}) = -2$$

$$78. \ln(x+1) = 0 \quad 79. 2 \ln x - 1 = 0 \quad 80. 2x + 3x \ln x = 0 \quad 81. \ln(x^2 - 3) = 0$$

$$82. \frac{\sqrt{x}}{2} - 1 = 0 \quad 83. \sqrt{3x+4} = x \quad 84. x - \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} = 0 \quad 85. 2x \cdot \sqrt{x+2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x+2}} = 0$$

## Výsledky kapitoly IV

62.  $x = 4$  63.  $x = -2$  64. nemá řešení 65.  $x = 0$  66.  $x = -1$  67.  $x = 7/6$   
68.  $x = -3$  69.  $x_1 = -1, x_2 = -2$  70.  $x_1 = 1, x_2 = -4$  71.  $x = -\frac{4}{5}$  72.  $x = 1$   
73.  $x = 1$  74.  $x = e$  75.  $x = e^3$  76.  $x = e^{-1} = 1/e$  77.  $x = \frac{1}{e^4}$  78.  $x = 0$   
79.  $x = \sqrt{e}$  80.  $x = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$  81.  $x = \pm 2$  82.  $x = 4$  83.  $x = 4, (x = -1 \text{ nevyhovuje})$   
84.  $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 2$  85.  $x_1 = 0, x_2 = -8/5$

## V. Nerovnice lineární, kvadratické, s absolutní hodnotou

Řešte dané nerovnice:

86.  $2 - 3x \geq 4$  87.  $\frac{4x - 3}{5} < \frac{3x - 4}{2} - \frac{2x - 5}{3}$  88.  $x^3 - 1 > 0$   
89.  $x^2 - 4 \geq 0$  90.  $x^2 + \frac{7}{2}x - 2 \geq 0$  91.  $2x^2 + 5x < 0$   
92.  $x^2 - 2x + 5 < 0$  93.  $x^2 + 1 > 0$  94.  $|x - 3| < 2$   
95.  $|x - 3| < 0$  96.  $|3x + 2| \leq 1$  97.  $|x - 1| < |x - 3|$   
98.  $\left| \frac{x + 1}{x - 1} \right| \leq 1$  99.  $\frac{3}{x - 3} < 0$  100.  $\frac{x + 2}{2x - 1} \leq 1$

## Výsledky kapitoly V

86.  $x \in (-\infty, -2/3)$  87.  $x \in (-8, +\infty)$  88.  $x \in (1, +\infty)$  89.  $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$   
90.  $x \in (-\infty, -4) \cup (1/2, +\infty)$  91.  $x \in (-5/2, 0)$  92.  $\emptyset$  93.  $x \in \mathbb{R}$  94.  $x \in (1, 5)$   
95.  $\emptyset$  96.  $x \in (-1, -1/3)$  97.  $x \in (-\infty, 2)$  98.  $x \in (-\infty, 0)$  99.  $x \in (-\infty, 3)$   
100.  $x \in (-\infty, 1/2) \cup (3, +\infty)$

## VI. Nerovnice exponenciální a logaritmické

Řešte dané nerovnice:

101.  $5^x \leq 625$  102.  $\left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{125}{27}$  103.  $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 8$  104.  $e^x + x e^x > 0$   
105.  $\ln x < 0$  106.  $\ln x \geq 1$  107.  $\ln(x + 4) \leq 0$  108.  $x \ln x + 2x \geq 0$

## Výsledky kapitoly VI

101.  $x \in (-\infty, 4)$  102.  $x \in (-3, +\infty)$  103.  $x \in (-\infty, -3)$  104.  $x \in (-1, +\infty)$   
105.  $x \in (0, 1)$  106.  $x \in (e, +\infty)$  107.  $x \in (-4, -3)$  108.  $x \in (1/e^2, +\infty)$

## VII. Goniometrické funkce

Upravte (zjednodušte) dané výrazy. Určete, pro jaká  $x$  mají smysl.

109.  $\frac{\cos^2 x}{1 + \sin x}$  110.  $\cotg x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$  111.  $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 x}$

Najděte řešení daných goniometrických rovnic:

112.  $\sin^2 x - \sin x = 0$  113.  $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$  114.  $\sin 2x = \cotg x$

## Výsledky kapitoly VII

109.  $1 - \sin x, x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  110.  $\frac{1}{\sin x}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$  111.  $1, x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$   
112.  $x = k\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  113.  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$  114.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

## VIII. Komplexní čísla

(imaginární jednotka, algebraický tvar, goniometrický tvar, aritmetické operace, číslo komplexně sdružené, absolutní hodnota, Moivreova věta)

Upravte, případně určete hodnotu:

115.  $i^3$  116.  $i^4$  117.  $i^5 - i^6$  118.  $(3 + 7i)i$  119.  $(2 + 3i)(3 - 4i)$   
120.  $(3 - 2i)^2$  121.  $(-2 + 3i)(-2 - 3i)$  122.  $(2 - 3i)(1 + 4i) - (2 + 3i)(1 - 4i)$

Určete absolutní hodnotu (velikost) komplexního čísla:

123.  $z = 3 + 4i$  124.  $z = 4 - 3i$  125.  $z = -3i$  126.  $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$   
127.  $z = -1 + \frac{1}{2}i$  128.  $z = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}i$  129.  $z = \cos x + i \sin x, x \in \mathbb{R}$

## Výsledky kapitoly VIII

115.  $-i$  116.  $1$  117.  $i + 1$  118.  $3i - 7$  119.  $18 + i$  120.  $5 - 12i$  121.  $13$  122.  $10i$   
123.  $|z| = 5$  124.  $|z| = 5$  125.  $|z| = 3$  126.  $|z| = 1$  127.  $z = \frac{\sqrt{5}}{2}$  128.  $|z| = 1$  129.  $|z| = 1$

## IX. Analytická geometrie v rovině

(body, vektory, hlavně však přímky, kuželosečky a množiny v rovině ohraničené těmito křivkami)

130. Napište parametrický, obecný a směrnicový tvar rovnice přímky, která prochází body  $A = [5, 2]$ ,  $B = [9, 4]$ . Načrtněte si obrázek.

Určete a načrtněte kuželosečky, které jsou dány následujícími rovnicemi.

131.  $x = y^2 - 3$  132.  $x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 2 = 0$   
133.  $x^2 + y^2 + 6y - 3 = 0$  134.  $x^2 - 4y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$

Načrtněte rovinný obrazec  $D$ , který je omezen danými křivkami nebo je zadán nerovnicemi:

135.  $x + y \leq 1, x + 1 \geq y \geq 0$  136.  $y \geq 0, y \leq 2 - x, x \geq y^2$   
137.  $2x + 2y = 5, xy = 1$  138.  $x^2 + y^2 \leq 4x, y \geq 0$

## Výsledky kapitoly IX

130.  $x = 5 + 4t, y = 2 + 2t, t \in \mathbb{R}; x - 2y - 1 = 0; y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$   
131. parabola, osa v ose  $x$ , vrchol  $V = [-3, 0]$ , otevřená doprava 132. elipsa  $S = [2, -1]$ ,  $a = 2, b = \sqrt{2}$   
133. kružnice  $S = [0, -3]$ ,  $r = \sqrt{12}$  134. hyperbola  $S = [3, 1]$ ,  $a = 4, b = 2$   
135. rovnoramenný trojúhelník nad osou  $x$ , souměrný podle osy  $y$   
136. "křivočarý" trojúhelník v prvním kvadrantu ohraničený dvěma úsečkami a částí paraboly  
137. obrazec ohraničen v prvním kvadrantu úsečkou a rovnoosou hyperbolou  
138. posunutý půlkruh v prvním kvadrantu,  $S = [2, 0]$

## Literatura:

- [1] J. Černý a kolektiv: **Matematika - přijímací zkoušky na ČVUT**. Nakladatelství ČVUT Praha, 2007
- [2] F. Jirásek a kol.: **Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ**. SPN, Praha 1986
- [3] J. Neustupa: **Matematika I**. Skriptum Strojní fakulty. Nakladatelství ČVUT, Praha 2014 (též starší vydání ...)
- [4] L. Samková: **Sbírka příkladů z matematiky**. Fak. architektury, Nakladatelství ČVUT, Praha 2002
- [5] F. Vejsada, F. Talafous: **Sbírka úloh z matematiky pro SVVŠ**. SPN, Praha 1969

## Základní vzorce (vztahy) pro úpravy výrazů

$$a - (b + c) = a - b - c,$$

$$a(b \pm c) = ab \pm ac$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2), \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

## Vzorce pro počítání s mocninami a odmocninami (pokud mají uvedené výrazy smysl)

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}, \quad a^r : a^s = a^{r-s}, \quad (a^r)^s = a^{rs}, \quad (ab)^r = a^r b^r, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

$$a^{-r} = 1/a^r, \quad a^{r/s} = \sqrt[s]{a^r} \quad \sqrt[r]{\sqrt[s]{a}} = \sqrt[rs]{a}, \quad \sqrt[r]{ab} = \sqrt[r]{a} \sqrt[r]{b}, \quad \sqrt[r]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[r]{b}}$$

## Základní vlastnosti logaritmů ( $x > 0, y > 0$ , základ $a > 0, a \neq 1$ )

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a x^r = r \log_a x$$

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1, \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

## Goniometrické funkce (vybrané vztahy)

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \neq k\pi$$

Pro každé  $x \in \mathbb{R}$  platí:  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

## Aritmetická posloupnost

je zadána rekurentním vztahem  $a_{n+1} = a_n + d$ , kde  $d$  je diference,  $n \in \mathbb{N}$ ,

$n$ -tý člen:  $a_n = a_1 + (n - 1)d$ , součet prvních  $n$  členů:  $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

**Geometrická posloupnost** je zadána rekurentním vztahem  $a_{n+1} = a_n \cdot q$ , kde  $q$  je kvocient,  $n \in \mathbb{N}$ ,

$n$ -tý člen:  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ , součet prvních  $n$  členů:  $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

## Komplexní čísla

Imaginární jednotka  $i$ :  $i^2 = -1$

$z = a + bi$  algebraický tvar komplexního čísla  $z$ , kde  $a, b \in \mathbb{R}$

$\bar{z} = a - bi$  číslo komplexně sdružené s číslem  $z = a + bi$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  absolutní hodnota (velikost) komplexního čísla  $z = a + bi$

$z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  goniometrický tvar komplexního čísla  $z$

Moivreův vzorec:  $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$

## Tvar rovnice přímky v rovině

obecný  $ax + by + c = 0$ ;  $\mathbf{n} = (a, b)$  je normálový (kolmý) vektor k přímkce

směrnice  $y = kx + q$ ;  $k$  je směrnice,  $q$  je úsek na ose  $y$  vyřatý přímkou

nebo  $y - y_0 = k(x - x_0)$ ;  $k$  je směrnice,  $M = [x_0, y_0]$  je bod přímky

úsekový  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ , kde  $a \neq 0, b \neq 0$  jsou úseky na osách  $x, y$

parametrický  $X = A + t\mathbf{u}, t \in \mathbb{R}$ ;  $A = [a_1, a_2]$  je bod,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  je směrový vektor