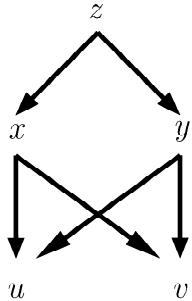


II.7.* Derivace složené funkce

- Vypočítejte derivace daných složených funkcí :

Příklad 160. $z = e^x \ln y$, $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $\frac{\partial z}{\partial u} = ?$, $\frac{\partial z}{\partial v} = ?$

Rешение : Závislost mezi proměnnými znázorníme orientovaným grafem, ze kterého sestavíme vzorce pro jednotlivé derivace.



$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

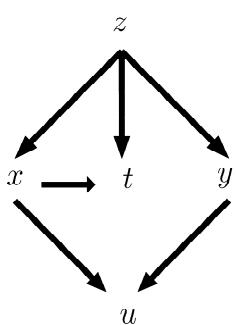
Nyní tyto derivace vypočítáme :

$$\frac{\partial z}{\partial u} = e^x \ln y \cdot \cos v + \frac{e^x}{y} \sin v, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -e^x \ln y \cdot u \sin v + \frac{e^x}{y} u \cos v. \quad \blacksquare$$

POZNÁMKA : V tomto jednoduchém příkladě bychom mohli dosadit za x a y . Pak derivace funkce $z = e^{u \cos v} \ln(u \sin v)$ by se dala spočítat přímo, avšak naším úkolem je procvičení derivací složených funkcí.

Příklad 161. $z = \ln(x^2 + y^2 + \frac{1}{t^2})$, $x = u^2 + t$, $y = u^2 - u$, $\frac{\partial z}{\partial u} = ?$, $\frac{\partial z}{\partial t} = ?$

Rешение :



$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}.$$

(Derivace s pruhem $\frac{\partial z}{\partial t}$ je pomocné označení a odpovídá přímé šipce od z k t , kdežto $\frac{\partial z}{\partial t}$ je celková derivace z podle t .)

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{2x}{x^2 + y^2 + \frac{1}{t^2}} \cdot 2u + \frac{2y}{x^2 + y^2 + \frac{1}{t^2}} (2u - 1) = \frac{2}{x^2 + y^2 + \frac{1}{t^2}} (2xu + 2yu - y), \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{2x}{x^2 + y^2 + \frac{1}{t^2}} \cdot 1 + \frac{1}{x^2 + y^2 + \frac{1}{t^2}} \left(-\frac{2}{t^3}\right) = \frac{2}{x^2 + y^2 + \frac{1}{t^2}} \left(x - \frac{1}{t^3}\right). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Příklad 162. $u = f(x^4 + y^4 - 2z^4)$. Spočítejte výraz $V = \frac{1}{4x^3} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{4y^3} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{4z^3} \frac{\partial u}{\partial z}$.

Rешение : Označme $t = x^4 + y^4 - 2z^4$. Pak $u = f(t)$ a

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{du}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = f'(t) \cdot 4x^3, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{du}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = f'(t) \cdot 4y^3, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{du}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial z} = f'(t) \cdot (-8z^3).\end{aligned}$$

Po dosazení snadno spočítáme, že $V = 0$. ■

163. Přesvědčte se, že funkce $y = f(x + at) + g(x - at)$ vyhovuje parciální diferenciální rovnici $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$. Předpokládáme, že f a g jsou dvakrát diferencovatelné funkce.
[Návod: $u = x + at$, $v = x - at$, $y = f(u) + g(v)$]

164. Přesvědčte se, že funkce $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ splňuje rovnici $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Předpokládáme, že f je diferencovatelná funkce.

165. Jsou dány funkce $z = f(u, v)$, $u = x^2 - y^2$, $v = e^{xy}$. Spočítejte diferenciální výraz $W = y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$, kde f je diferencovatelná funkce. $[W = (x^2 + y^2) e^{xy} \frac{\partial f}{\partial v}]$

166. Je dána funkce $f(x, y) = x^y$, kde $x = u^2 + v^2$, $y = uv + v^2$. Spočítejte $\frac{\partial f}{\partial u}$ a $\frac{\partial f}{\partial v}$ v bodě A , jehož souřadnice jsou $u = 1$, $v = -1$. $[\frac{\partial f}{\partial u}(A) = \frac{\partial f}{\partial v}(A) = -\ln 2]$

II.9. Funkce definované implicitně

Příklad 167. Dokažte, že rovnicí $x^3 + y^3 = 2x^2 + xy - 1 = 0$ je implicitně definována jediná funkce $y = f(x)$ v okolí bodu $A = [1, 0]$. Určete $f'(1)$ a $f''(1)$.

Rешení: Označme $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2x^2 - xy + 1$ funkci, která je spojitá v \mathbb{E}_2 a má spojité parciální derivace 1. a 2. řádu v \mathbb{E}_2 . K existenci a jednoznačnosti implicitní funkce $y = f(x)$ nyní stačí, že $F(A) = F(1, 0) = 0$ a $F_y = (3y^2 - x)\Big|_A = -1 \neq 0$. Dále spočítáme

$$\begin{aligned}y' &= f'(x) = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 4x - y}{3y^2 - x}, \quad f'(1) = -\frac{3 - 4}{-1} = -1, \\ y'' &= f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = -\frac{(6x - 4 - y')(3y^2 - x) - (3x^2 - 4x - y)(6y \cdot y' - 1)}{(3y^2 - x)^2} \\ &\quad f''(1) = -\frac{(6 - 4 + 1)(-1) - (3 - 4)(-1)}{1} = 4.\end{aligned}$$

Příklad 168. Napište rovnici tečny t a normály n křivky definované implicitně rovnicí $F(x, y) \equiv x^3y + y^3x + x^2y - 3 = 0$ v bodě $A = [1, 1]$.

Rешení: Jelikož $F(1, 1) = 0$ a $F_y(A) = \left(x^3 + 3y^2x + x^2\right)|_{[1,1]} = 5 \neq 0$, je rovnice $F(x, y) = 0$ skutečně definována křivka $y = y(x)$, která prochází bodem A .

$$y'(1) = -\frac{F_x}{F_y}(A) = \left(-\frac{3x^2y + y^3 + 2xy}{x^3 + 3y^2x + x^2} \right) \Big|_A = -\frac{6}{5}$$

$$t : \quad y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0), \text{ kde } A = [x_0, y_0], \quad y - 1 = -\frac{6}{5}(x - 1) \implies 6x + 5y - 11 = 0,$$

$$n : \quad y - 1 = \frac{5}{6}(x - 1) \implies 5x - 6y - 1 = 0. \quad \blacksquare$$

Příklad 169. Rovnicí $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ je dána **logaritmická spirála**. Stanovte y' a y'' .

Řešení : Můžeme použít známý vzorec $y' = -\frac{F_x}{F_y}, F_y \neq 0$ nebo můžeme danou rovnici přímo derivovat a přitom si uvědomit, že y je závislé na x tj. $y = y(x)$.

Derivujme přímo :

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2x + 2yy'}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} \implies \frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = \frac{y'x - y}{x^2 + y^2} \implies$$

$$x + yy' = y'x - y \implies x + y = y'(x - y) \implies y' = \frac{x + y}{x - y}, \quad x \neq y$$

Druhou derivaci spočítáme podobně :

$$\left(\frac{x + y}{x - y}\right)' = \frac{(1 + y')(x - y) - (x + y)(1 - y')}{(x - y)^2} = \frac{x - y - x - y + y'(x - y + x + y)}{(x - y)^2} =$$

$$y'' = \frac{-2y + 2xy'}{(x - y)^2} = \frac{-2y + 2x \cdot \frac{x+y}{x-y}}{(x - y)^2} = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^3}. \quad \blacksquare$$

Příklad 170. Ukažte, že rovnice $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$ je implicitně určena funkce $y = f(x)$, jejíž graf prochází bodem $A = [0, 1]$. Zjistěte, zda je $f(x)$ konvexní v okolí bodu A . Napište rovnici tečny ke grafu funkce v bodě A .

Řešení : $F(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 3$ je diferencovatelná v \mathbb{E}_2 a má v \mathbb{E}_2 spojité parciální derivace 2. řádu. Dále platí:

$$F(A) = F(0, 1) = 0, \quad F_y = (2x + 2y + 2) \Big|_A \neq 0,$$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x + 2y - 4}{2x + 2y + 2} = -\frac{x + y - 2}{x + y + 1} \implies y'(0) = \frac{1}{2},$$

$$y'' = -\frac{(1 + y')(x + y + 1) - (x + y - 2)(1 + y')}{(x + y + 1)^2} = -\frac{3(1 + y')}{(x + y + 1)^2} \implies$$

$$y''(0) = -\frac{3(1 + \frac{1}{2})}{(0 + 1 + 1)^2} = -\frac{9}{8} < 0. \text{ Funkce } y = f(x) \text{ je v bodě } A \text{ konkávní, jelikož}$$

$$y''(0) < 0. \text{ Tečna v bodě } A \text{ má rovnici } y - 1 = \frac{1}{2}x \implies x - 2y + 2 = 0. \quad \blacksquare$$

Příklad 171. Dokažte, že vztahem $F(x, y, z) = z^3 + 3x^2z - 2xy = 0$ je definována jediná funkce $z = f(x, y)$ v okolí bodu $A = [-1, -2, 1]$. Určete $\operatorname{grad} f(1, -2)$.

Řešení : Funkce F má spojité parciální derivace v okolí bodu A ,

$F(A) = F(-1, -2, 1) = 0, \quad F_z(A) = (3z^2 + 3x^2) \Big|_A = 6 \neq 0.$ Tím je v okolí bodu A prokázaná nebo prokázána existence a jednoznačnost funkce $z = f(x, y)$, která má spojité parciální derivace.

Nyní je $\operatorname{grad} f(1, -2) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}(A), \frac{\partial z}{\partial y}(A) \right)$, kde

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{6xz - 2y}{3z^2 + 3x^2} \implies \frac{\partial z}{\partial x}(1, -2) = \frac{1}{3}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-2x}{3z^2 + 3x^2} \implies \frac{\partial z}{\partial y}(1, -2) = -\frac{1}{3}, \\ \text{grad } f(1, -2) &= \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}(1, -1).\end{aligned}$$

■

Příklad 172. V okolí bodu $[2, -2, 1]$ je dána funkce $z = f(x, y)$ v implicitním tvaru

$$\ln z + x^2yz + 8 = 0. \text{ Určete } \frac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A), \text{ kde } \vec{s} = \overrightarrow{AB}, A = [2, -2], B = [3, -3].$$

Řešení : Označíme $F(x, y, z) = \ln z + x^2yz + 8$. V bodech, kde $F(x, y, z) = 0$ a $F_z(x, y, z) \neq 0$ platí :

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2xyz}{\frac{1}{z} + x^2y} \implies \frac{\partial z}{\partial x}(A) = -\frac{8}{7}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{x^2z}{\frac{1}{z} + x^2y} \implies \frac{\partial z}{\partial y}(A) = \frac{4}{7}, \\ \frac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A) &= \text{grad } f(A) \cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \left(-\frac{8}{7}, \frac{4}{7}\right) \cdot \frac{(1, -1)}{\sqrt{2}} = \frac{-12}{7\sqrt{2}} = \frac{-6\sqrt{2}}{7}.\end{aligned}$$

■

Příklad 173. Napište rovnici tečné roviny τ a normály n k ploše definované implicitně rovnicí $F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$, v bodě $A = [3, 0, 4]$.

Řešení : Víme, že normálový vektor k ploše má vyjádření

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right) = \left(-\frac{F_x}{F_z}, -\frac{F_y}{F_z}, -1\right) \implies \vec{n} = (F_x, F_y, F_z).$$

Je-li plocha vyjádřena v implicitním tvaru, pak poslední zápis je výhodnější. Tedy $\vec{n} = (2x, 2y, 2z) \sim (x, y, z)|_A = (3, 0, 4)$,

$$\begin{aligned}\tau : 3(x - 3) + 0 \cdot y + 4(z - 4) &= 0 \implies 3x + 4z - 25 = 0, \\ n : [x, y, z] &= [3, 0, 4] + t(3, 0, 4), t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

■

Příklad 174. Napište rovnici tečné roviny k ploše $F(x, y, z) \equiv x(y + z) + z^2 - 5 = 0$ rovnoběžné s rovinou $\varrho : 3x - 3y + 6z = 2$.

Řešení : $\vec{n} = (3, -3, 6) \sim (1, -1, 2)$

$$\vec{n} = (F_x, F_y, F_z) = (y + z, x, x + 2z) = k(1, -1, 2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y + z = k \\ x = -k \\ x + 2z = 2k \end{array} \right\} \text{ a z této soustavy musíme určit souřadnice dotykového bodu } A.$$

Vychází $x = -k$, $y = -\frac{k}{2}$, $z = \frac{3}{2}k$. Víme, že hledaný bod musí ležet na dané ploše, proto dosadíme do $F(x, y, z) = 0$ a určíme konstantu k , a tím i souřadnice hledaného bodu. Dostáváme postupně

$$-k\left(-\frac{k}{2} + \frac{3}{2}k\right) + \left(\frac{3}{2}k\right)^2 = 5, \quad -k^2 + \frac{9}{4}k^2 = 5, \quad k^2 = 4, \quad k = \pm 2,$$

$$A_1 = [-2, 3, -1], A_2 = [2, -3, 1];$$

$$\tau_1 : x - y + 2z + 7 = 0, \quad \tau_2 : x - y + 2z - 7 = 0.$$

■

Příklad 175. Určete rovnici tečny v bodě $A = [-2, 1, 6]$ ke křivce v \mathbb{E}_3 , dané rovnicemi $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47$, $x^2 + 2y^2 = z$.

Řešení : Snadno určíme tečnou rovinu v bodě A k první ploše $\tau_1 : -4x + 3y + 6z - 47 = 0$ a tečnou rovinu ke druhé ploše $\tau_2 : -4x + 4y - z - 6 = 0$. Směrový vektor hledané tečny je $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (-27, -28, -4) \sim (27, 28, 4)$ a rovnice tečny

$$[x, y, z] = [-2, 1, 6] + t(27, 28, 4), t \in \mathbb{R}.$$

Uvedeme další možný postup. Při daném vyjádření křivky jako průniku dvou ploch budeme předpokládat, že jediná nezávislá proměnná je x . Potom y a z budou funkcemi proměnné x , tj. $y(x), z(x)$.

Hledaný tečný vektor \vec{s} bude $(1, y'(x), z'(x))$. Proto danou soustavu zderivujeme podle x :

$$\begin{cases} 4x + 6yy' + 2zz' = 0 \\ 2x + 4yy' = z' \end{cases} \text{ neboli } \begin{cases} 2x + 3yy' + zz' = 0 \\ 2x + 4yy' = z' \end{cases}.$$

Nás zajímá tečný vektor v daném bodě, proto dosadíme souřadnice bodu A a obdržíme postupně vzájemně ekvivalentní soustavy

$$\begin{cases} -4 + 3y' + 6z' = 0 \\ -4 + 4y' - z' = 0 \end{cases}, \begin{cases} 3y' + 6z' = 4 \\ 4y' - z' = 4 \end{cases}, \begin{cases} y' = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-28}{-27} = \frac{28}{27}, \\ z' = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{-4}{-27} = \frac{4}{27} \end{cases}.$$

Hledaný tečný vektor je $\vec{s} = \left(1, \frac{28}{27}, \frac{4}{27}\right) \sim (27, 28, 4)$. Parametrické vyjádření tečny je tedy opět $[x, y, z] = [-2, 1, 6] + t(27, 28, 4)$, $t \in \mathbb{R}$. ■

Příklad 176. a) Najděte jednotkový vektor \vec{n}^o vnější normály v bodě $A = [1, -1, 1]$ plochy vyjádřené implicitně ve tvaru $F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$.

b) Spočítejte $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}^o}(A)$, kde $f(x, y, z) = xy^2z^3$.

Řešení: a) $\vec{n} = (F_x, F_y, F_z) = (2x, 2y, 2z) \sim (x, y, z)$, $\vec{n}^o = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$

b) $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}^o}(A) = \text{grad } f(A) \cdot \vec{n}^o = (1, -2, 3) \cdot \frac{(1, -1, 1)}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$. ■

• Napište rovnici tečny t a normály n křivky definované implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$ v bodě A :

$$177. F(x, y) \equiv \arcsin x + xy^2 = 0, A = [0, 2] \quad [t : x = 0, n : y = 2]$$

$$178. F(x, y) \equiv x^2y + xy^2 - axy - a^3 = 0, A = [a, a] \quad [t : y = -x + 2a, n : y = x]$$

179. Dokažte, že rovnicí $\ln(x+y) + 2x + y = 0$ je definována funkce $y = f(x)$ splňující $f(-1) = 2$. Napište rovnici tečny ke křivce $y = f(x)$ v bodě $A = [-1, 2]$.

$$[t : y - 2 = -\frac{3}{2}(x + 1)]$$

• Funkce jedné proměnné $y = f(x)$ je definovaná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$.

a) Vypočítejte parciální derivace 1. řádu funkce $F(x, y)$.

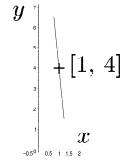
b) Ověřte, že rovnicí $F(x, y) = 0$ je v okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně určena funkce $y = f(x)$, která má spojitou derivaci $f'(x)$ v okolí bodu x_0 .

c) Určete hodnotu derivace $f'(x_0)$ a napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce f v bodě dotyku $[x_0, y_0]$. Popište chování této funkce v bodě x_0 , tj. rostoucí, resp. klesající.

d) Rovnici tečny užijte k přibližnému výpočtu hodnoty $y = f(x)$ v bodě x_1 a tečnu načrtněte.

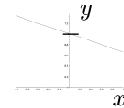
180. $F(x, y) = x^2y - x^3 - 2\sqrt{y} + 1$, $[x_0, y_0] = [1, 4]$, $x_1 = 0.8$

$$\left[\begin{array}{l} a) F_x = 2xy - 3x^2, F_y = x^2 - \frac{1}{\sqrt{y}} \\ c) f'(1) = -10, t : y = 4 - 10(x-1), n : y = 4 + \frac{1}{10}(x-1), \\ \text{funkce } f \text{ je v bodě } x_0 = 1 \text{ klesající} \\ d) f(0.8) \doteq 6 \end{array} \right]$$



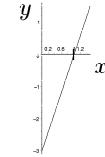
181. $F(x, y) = y e^x + y^2 - 2x^2y - 2$, $[x_0, y_0] = [0, 1]$, $x_1 = -0.3$

$$\left[\begin{array}{l} a) F_x = y e^x - 4xy, F_y = e^x + 2y - 2x^2 \\ c) f'(0) = -1/3, t : y = 1 - x/3, n : y = 1 + 3x, \\ \text{funkce } f \text{ je v bodě } x_0 = 0 \text{ klesající} \\ d) f(-0.3) \doteq 1.1 \end{array} \right]$$



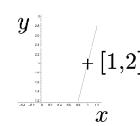
182. $F(x, y) = \ln(x-y) + 2x + y^2 - 2 = 0$, $[x_0, y_0] = [1, 0]$, $x_1 = 1.1$

$$\left[\begin{array}{l} a) F_x = \frac{1}{x-y} + 2, F_y = -\frac{1}{x-y} + 2y \\ c) f'(1) = 3, t : 3x - y = 3, n : x + 3y = 1, \\ \text{funkce } f \text{ je v bodě } x_0 = 1 \text{ rostoucí} \\ d) f(1.1) \doteq 0.3 \end{array} \right]$$



183. $F(x, y) = xye^{x-y} - \frac{2}{e} = 0$, $[x_0, y_0] = [1, 2]$, $x_1 = 1.1$

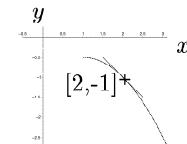
$$\left[\begin{array}{l} a) F_x = (y+xy)e^{x-y}, F_y = (x-xy)e^{x-y} \\ c) f'(1) = 4, t : y = 2 + 4(x-1), n : x + 4y = 9, \\ \text{funkce } f \text{ je v bodě } x_0 = 1 \text{ rostoucí} \\ d) f(1.1) \doteq 2.4 \end{array} \right]$$



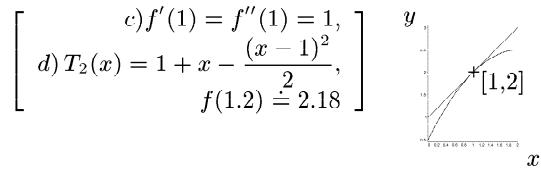
- Funkce jedné proměnné $y = f(x)$ je definovaná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$
- a) Napište **postačující** podmínky pro existenci spojité funkce $y = f(x)$ určené implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$ v okolí bodu $[x_0, y_0]$ a pro spojitost její derivace $f'(x)$ v okolí bodu x_0 .
- b) Ověřte (všechny předpoklady), že rovnice $F(x, y) = 0$ je implicitně určena funkce $y = f(x)$, jejíž graf prochází bodem $[x_0, y_0]$ a která má spojitou 1. a 2. derivaci v okolí bodu x_0 .
- c) Určete hodnoty derivací $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$.
- d) Napište Taylorův polynom 2. stupně $T_2(x)$ funkce f se středem v bodě x_0 .
Pomocí $T_2(x)$ k vypočítajte přibližně hodnotu $f(x)$ pro x_1 .
- e) Načrtněte graf funkce f v okolí bodu $[x_0, y_0]$.

184. $F(x, y) = x^3 + 2x^2y + y^4 - 1 = 0$, $[x_0, y_0] = [2, -1]$, $x_1 = 2.2$

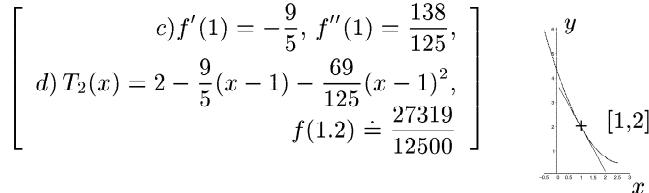
$$\left[\begin{array}{l} c) f'(2) = f''(2) = -1, \\ d) T_2(x) = 1 - x - \frac{(x-2)^2}{2}, \\ f(2.2) \doteq -1.22 \end{array} \right]$$



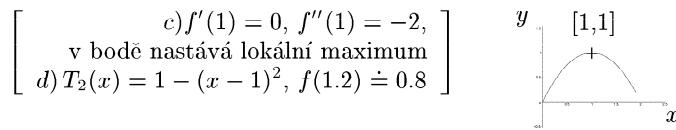
185. $F(x, y) = x^3 + \frac{y^2}{2} - x^2y - 1 = 0$, $[x_0, y_0] = [1, 2]$, $x_1 = 1.2$



186. $F(x, y) = x^3 + xy^2 + xy - 7 = 0$, $[x_0, y_0] = [1, 2]$, $x_0 = 0.9$



187. $F(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - y = 0$, $[x_0, y_0] = [1, 1]$, $x_0 = 1.2$



- Napište rovnici tečné roviny τ a normály n k ploše $F(x, y, z) = 0$ v bodě A :

188. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21 = 0$, $A = [1, 2, 2]$

$$[\tau : x + 4y + 6z - 21 = 0, n : [x, y, z] = (1, 2, 2) + t(1, 4, 6), t \in \mathbb{R}]$$

189. $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$, $A = [1, 2, -1]$

$$[\tau : x + 11y + 5z - 18 = 0, n : [x, y, z] = (1, 2, -1) + t(1, 11, 5), t \in \mathbb{R}]$$

190. $xyz^2 - x - y - z = 0$, $A = [1, -1, -1]$

$$[\tau : -2x + z + 3 = 0, n : [x, y, z] = (1, -1, -1) + t(-2, 0, 1), t \in \mathbb{R}]$$

- Napište rovnici takové tečné roviny k ploše $F(x, y, z) = 0$, která je rovnoběžná s rovinou ϱ .

191. $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, $\varrho : x + 2y + z = 0$

$$[x + 2y + z \pm \sqrt{6} = 0, \text{ body dotyku } T_{1,2} = [\pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \pm \frac{2}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}]]$$

192. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21 = 0$, $\varrho : x + 4y + 6z = 0$ $[x + 4y + 6z \pm 21 = 0, T_{1,2} = [\pm 1, \pm 2, \pm 2]]$

193. Je dána funkce $z = f(x, y)$ v implicitním tvaru $e^z - xyz = e$. Určete $f_x(A)$, $f_y(A)$, $f_{xy}(A)$, kde bod $A = [0, e, 1]$ $[f_x(A) = 1, f_y(A) = 0, f_{xy}(A) = 1/e]$

194. Jsou dány dvě plochy rovnicemi v implicitním tvaru $x + 2y - \ln z + 4 = 0$

$$\text{a } x^2 - xy - 8x + \frac{1}{2}z^2 + \frac{11}{2} = 0. \text{ Určete vzájemnou polohu tečných rovin obou ploch}$$

ve společném bodě $T = [2, -3, 1]$.

$[x + 2y - z + 5 = 0$ je společná tečná rovina]

- Funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ je definovaná implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$.

- a) Ověrte (všechny předpoklady), že rovnici $F(x, y, z) = 0$ je implicitně určena funkce $z = f(x, y)$, jejíž graf prochází bodem A , a která má spojité parciální derivace 1. řádu v okolí bodu $[x_0, y_0]$.
- b) Vypočtěte derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ a určete grad $f(x_0, y_0)$.
- c) Napište rovnici tečné roviny τ a rovnici normály n ke grafu funkce f v bodě A (tj. též k ploše popsané rovnicí $F(x, y, z) = 0$).
- d) Rovnici tečné roviny užijte k výpočtu přibližné hodnoty funkce f v bodě $[x_1, y_1]$.
- e) Určete derivaci funkce f v bodě A ve směru \vec{u} . Napište směr \vec{s} , ve kterém funkce f v bodě A nejrychleji klesá. Vypočítejte derivaci funkce f v bodě A ve směru \vec{s} .

195. $F(x, y, z) = 2x^3yz - x + y^3 + z^3 - 2 = 0, A = [1, 2, -1], [x_1, y_1] = [0.9, 2.1], \vec{u} = (1, 2)$

$$\left[\begin{array}{l} b) \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{6x^2yz-1}{2x^3y+3z^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2x^3z+3y^2}{2x^3y+3z^2}, \text{grad } f(1, 2) = (13, -10) \\ [c) \tau : 13x - 10y - z = 8, n : [x, y, z] = [1, 2, -1] + t(13, -10, -1), t \in \mathbb{R}] \\ [d) f(0.9, 2.1) \doteq -1.3, e) \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2) = \frac{17}{\sqrt{5}}, \vec{s} = (-13, 10), \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(1, 2) = -1] \end{array} \right]$$

196. $F(x, y, z) = x^3 + 3xy^2z + 2yz^3 = 0, A = [1, -1, -1], [x_1, y_1] = [0.9, -1.1], \vec{u} = (1, -2)$

$$\left[\begin{array}{l} b) \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{3x^2 + 3y^2z}{3xy^2 + 6yz^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{6xyz + 2z^3}{3xy^2 + 6yz^2}, \text{grad } f(1, -1) = (0, -\frac{4}{3}) \\ [c) \tau : 4y - 3z + 1 = 0, n : [x, y, z] = [1, -1, -1] + t(0, 4, -3), t \in \mathbb{R}] \\ [d) f(0.9, -1.1) \doteq -1.13, e) \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, -1) = -\frac{8}{3\sqrt{5}}, \vec{s} = (0, -\frac{4}{3}), \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(1, -1) = -1] \end{array} \right]$$

197. $F(x, y, z) = ze^{x+y} - xy + z^2 - 6 = 0, A = [0, 0, 2], [x_1, y_1] = [-0.2, 0.1], \vec{u} = (-1, 2)$

$$\left[\begin{array}{l} b) \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{ze^{x+y} - y}{e^{x+y} + 2z}, \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{ye^{x+y} - x}{e^{x+y} + 2z}, \text{grad } f(0, 0) = (-\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}) \\ [c) \tau : 2x + 2y + 5z = 10, n : [x, y, z] = [0, 0, 2] + t(2, 2, 5), t \in \mathbb{R}] \\ [d) f(-0.2, 0.1) \doteq 1.96, e) \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = -\frac{2}{5\sqrt{5}}, \vec{s} = (\frac{2}{5}, \frac{2}{5}), \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0, 0) = -1] \end{array} \right]$$