I. Určitý integrál

I.1. Existence určitých integrálů

• Zjistěte, zda existují určité integrály :

***Příklad* 1.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+3}{x^2+1}\,dx$

Řešení : Ano existuje, protože funkce $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+1}$ je spojitá na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. ■

***Příklad* 2.** $\displaystyle\int_1^{10} \frac{x^2+3}{x^3-3x^2-4x}\,dx$

Řešení : Neexistuje, protože funkce $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^3-3x^2-4x} = \dfrac{x^2+3}{x(x+1)(x-4)}$ není spojitá v bodě $x = 4$ $\Big(x \in (1, 10)\Big)$ a $\lim\limits_{x\to 4\pm} f(x) = \pm\infty$. ■

***Příklad* 3.** $\displaystyle\int_1^1 \frac{e^{2x}-1}{x}\,dx$

Řešení : Integrál existuje. Funkce $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{x}$ sice není spojitá v bodě $x = 0$ $\Big(x \in (-1, 1)\Big)$, avšak $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = 2$. ■

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x}\,dx$ [ano , $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{x} = 0$]

5. $\displaystyle\int_0^2 xe^{x^2}\,dx$ [ano]

6. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-2\cos x}\,dx$ [nc , $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}\pm} \dfrac{1}{1-2\cos x} = \pm\infty$]

I.2. Newtonova-Leibnizova formule

• Pomocí Newtonovy-Leibnizovy formule vypočtěte integrály :

***Příklad* 7.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx$

Řešení : $\displaystyle I = \int_0^{\pi/4} \frac{1+1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{2}{\cos^2 x} - 1\right)\,dx = \Big[2\operatorname{tg} x - x\Big]_0^{\pi/4} =$

$\displaystyle = 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2 - \frac{\pi}{4}.$ ■

***Příklad* 8.** $\displaystyle\int_3^8 \sqrt{1+x}\,dx$

Řešení : $I = \int_3^8 (1+x)^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}\Big[(1+x)^{3/2}\Big]_3^8 = \frac{2}{3}\cdot(9\sqrt{9}-4\sqrt{4}) = \frac{38}{3}.$ ■

***Příklad* 9**. $\int_0^2 \frac{x-3}{x^2+4}\,dx$

Řešení : $I = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2x}{x^2+4}\,dx - 3\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\ln(x^2+4)\Big]_0^2 - \frac{3}{2}\Big[\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big]_0^2 =$

$= \frac{1}{2}\cdot(\ln 8 - \ln 4) - \frac{3}{2}\cdot\operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{2}\cdot\ln 2 - \frac{3\pi}{8}.$ ■

***Příklad* 10**. $\int_2^5 \frac{5x+1}{x^2+x-2}\,dx$

Řešení : Integrovanou funkci nejdříve rozložíme na parciální zlomky a integrál vypočteme :

$$\frac{5x+1}{x^2+x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}\ , \quad 5x+1 = A(x+2)+B(x-1)$$

$$x=1:\ 6=3A \quad\longrightarrow\ A=2\ ; \qquad x=-2:\ -9=-3B \quad\longrightarrow\ B=3$$

$$I = \int_2^5 \left(\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+2}\right)\,dx = \Big[2\ln|x-1| + 3\ln|x+2|\Big]_2^5 =$$

$$= 2\ln 4 + 3\ln 7 - 2\ln 1 - 3\ln 4 = 3\ln 7 - \ln 4 = \ln\frac{343}{4}.$$

Pozor ! Tentýž integrál na jiném intervalu $\langle a,b\rangle$ nemusí existovat, bude-li $\langle a,b\rangle$ obsahovat aspoň jedno z čísel $x=-2$ nebo $x=1$. ■

***Příklad* 11**. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\frac{x}{2}\,dx$

Řešení : Zde využijeme, že funkce $f(x)=\cos^2\frac{x}{2}$ je sudá, tj. $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$

$$I = 2\int_0^{\pi/2}\cos^2\frac{x}{2}\,dx = 2\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos x}{2}\,dx = \Big[x+\sin x\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}+1.$$ ■

***Příklad* 12**. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\sin x\,dx$

Řešení : Nyní využijeme to, že funkce $f(x)=x^2\sin x$ je lichá, tj. $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

■

***Příklad* 13**. $\int_0^{\pi}\left|\frac{1}{2}-\cos x\right|\,dx$

Řešení : Odstraníme absolutní hodnotu: $\frac{1}{2}-\cos x \ge 0$ pro $x\in\langle\frac{\pi}{3},\pi\rangle$

a $\frac{1}{2}-\cos x < 0$ pro $x\in\langle 0,\frac{\pi}{3})$, takže pro daný integrál platí :

$$I = \int_0^{\pi/3} -\Big(\frac{1}{2}-\cos x\Big)\,dx + \int_{\pi/3}^{\pi}\Big(\frac{1}{2}-\cos x\Big)\,dx = \Big[\sin x - \frac{1}{2}x\Big]_0^{\pi/3} + \Big[\frac{1}{2}x - \sin x\Big]_{\pi/3}^{\pi} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}.$$ ■

14.* $\displaystyle\int_{-4}^{4} \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\, dx$ $[2\ln 3]$ **15.** $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{2+\cos x}\, dx$ $[\ln 3]$

16. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^x}{e^x+e}\, dx$ $\left[\ln \frac{2e}{1+e}\right]$ **17.** $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{2}{x^2-x}\, dx$ $\left[2\ln \frac{4}{3}\right]$

I.3. Metoda per partes

• Vypočtěte integrály pomocí metody per partes :

***Příklad* 18.** $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |x| \cos x\ dx$

Řešení : Integrovaná funkce je sudá. Tedy $I = 2\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} |x| \cos x\ dx = 2\int_{0}^{\pi/2} x\cos x\ dx =$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x, & v' = \cos x \\ u' = 1, & v = \sin x \end{array} \right| = 2\Big[x\sin x\Big]_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} \sin x\ dx = 2\cdot\frac{\pi}{2} + 2\Big[\cos x\Big]_0^{\pi/2} = \pi - 2.$$

■

***Příklad* 19.** $\displaystyle\int_{0}^{e-1} \ln(x+1)\ dx$

Řešení : $I = \left| \begin{array}{ll} u = \ln(x+1), & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x+1}, & v = x \end{array} \right| = \Big[x\ln(x+1)\Big]_0^{e-1} - \displaystyle\int_0^{e-1} \frac{x}{x+1}\, dx = (e-1)\ln e -$

$$- \int_0^{e-1} \frac{x+1-1}{x+1}\, dx = e - 1 - \Big[x - \ln(x+1)\Big]_0^{e-1} = e - 1 - (e - 1 - \ln e) = 1.$$

■

***Příklad* 20.** $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} e^{2x} \sin x\, dx$

Řešení : $I = \left| \begin{array}{ll} u = e^{2x}, & v' = \sin x \\ u' = 2e^{2x}, & v = -\cos x \end{array} \right| = -\Big[e^{2x}\cos x\Big]_0^{\pi/2} + 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\, dx =$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = e^{2x}, & v' = \cos x \\ u' = 2e^{2x}, & v = \sin x \end{array} \right| = 1 + 2\Big[e^{2x}\sin x\Big]_0^{\pi/2} - 4\int_0^{\pi/2} e^{2x}\sin x\, dx.$$

Dostali jsme rovnici $I = 1 + 2e^{\pi} - 4I$, ze které $5I = 1 + 2e^{\pi}$.

Výsledek daného příkladu je $I = \dfrac{1}{5}(1 + 2e^{\pi})$. ■

Příklad* 21. $I_n = \displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \sin^n x\, dx$

Řešení :

⋆ pro $n = 0$ je $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$;

⋆ pro $n = 1$ je $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = 1$;

⋆ pro $n = 2$ je $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\Big[x - \frac{\sin 2x}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$;

$\star$ pro $n \geq 3$ je $\quad I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cdot \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \cos^2 x) \, dx =$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx - \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cdot \cos x \cdot \cos x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \cos x, & v' = \sin^{n-2} \cdot \cos x \\ u' = -\sin x, & v = \frac{1}{n-1} \sin^{n-1} x \end{array} \right| =$$

$$= I_{n-2} - \left[\frac{\cos x \cdot \sin^{n-1} x}{n-1} \right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{n-1} \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx.$$

Dostaneme rovnici $I_n = I_{n-2} - 0 - \frac{1}{n-1} I_n$, ze které vypočteme $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

Provedeme diskuzi :

$$\text{Pro} \quad \begin{cases} n = 2k \text{ je } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}; \\ n = 2k+1 \text{ je } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \cdot 1. \end{cases}$$

Tím jsme odvodili tzv. **Wallisovy formule**.

Tentýž výsledek platí i pro $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$, jelikož $\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$.

■

22.* $\int_0^{\pi/2} \sin^7 x \, dx$ $\quad \left[\frac{16}{35}\right]$

23.* $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^8 x \, dx$ $\quad \left[\frac{35\pi}{128}\right]$

24.* $\int_0^{\pi} \cos^6 x \, dx$ $\quad \left[\frac{5\pi}{16}\right]$

25.* $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^9 x \, dx$ $\quad [0]$

26. $\int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \operatorname{arctg} x \, dx$ $\quad \left[\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

27. $\int_{1/e}^{e} |\ln x| \, dx$ $\quad \left[2 - \frac{2}{e}\right]$

28. $\int_0^1 y \cdot \ln(x+y) \, dx, \ (y > 0)$ $\quad [y(y+1)\ln(y+1) - y^2 \ln y - y]$

I.4. Substituční metoda

• Vypočtěte integrály substituční metodou :

***Příklad* 29.** $\int_1^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} \, dx$

Řešení : Použijeme substituci $\left[\begin{array}{l} 1 + \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \quad \Big| \quad \begin{array}{ll} x_1 = 1 & \longrightarrow t_1 = 1 \\ x_2 = e^3 & \longrightarrow t_2 = 4 \end{array} \right]$ a dostaneme

$$I = \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} \, dt = 2\left[\sqrt{t}\right]_1^4 = 2 \cdot (2-1) = 2.$$

■

***Příklad* 30.** $\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{1}{x} \, dx$

Řešení : Po substituci $\left[\begin{array}{l|ll} \frac{1}{x} = t & x_1 = \frac{1}{\pi} & \longrightarrow t_1 = \pi \\ -\frac{dx}{x^2} = dt & x_2 = \frac{2}{\pi} & \longrightarrow t_2 = \frac{\pi}{2} \end{array}\right]$ obdržíme

$$I = -\int_{\pi}^{\pi/2} \sin t \; dt = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin t \; dt = \Big[-\cos t\Big]_{\pi/2}^{\pi} = 1 \; . \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 31.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\, dx$

Řešení : Po substituci $\left[\begin{array}{l|ll} x^2 = t & x_1 = 0 & \longrightarrow t_1 = 0 \\ 2x\, dx = dt & x_2 = 1 & \longrightarrow t_2 = 1 \end{array}\right]$ získáme

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\,t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\Big[\operatorname{arctg} t\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 32.** $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$

Řešení : Použijeme substituci $\left[\begin{array}{l|ll} x = 2\sin t & x_1 = 0 & \longrightarrow t_1 = 0 \\ dx = 2\cos t\, dt & x_2 = 2 & \longrightarrow t_2 = \pi/2 \end{array}\right]$ a dostaneme

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{4 - 4\sin^2 t}\cdot 2\cos t \; dt = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \; dt = 4\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} \; dt =$$

$$= 2\Big[t + \frac{\sin 2t}{2}\Big]_0^{\pi/2} = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi \; . \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 33.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(x^2+4)^2}\, dx$

Řešení : Zvolíme substituci $\left[\begin{array}{l|ll} x^2 + 4 = t & x_1 = 1 & \longrightarrow t_1 = 5 \\ 2x\, dx = dt & x_2 = 2 & \longrightarrow t_2 = 8 \end{array}\right]$ a potom

$$I = \frac{1}{2}\int_5^8 \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2}\cdot\Big[\frac{1}{t}\Big]_5^8 = -\frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{1}{8} - \frac{1}{5}\Big) = \frac{3}{80}. \qquad \blacksquare$$

34. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 3}}\, dx$ $\quad [\ln\sqrt{3}\,]$

35. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$ $\quad \left[\frac{\pi}{4}\right]$

36. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ $\quad \left[\frac{\pi}{72}\right]$

37. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin^5 x\cdot\cos x\, dx$ $\quad \left[\frac{1}{48}\right]$

38. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sin^3 x\, dx$ $\quad \left[\frac{5}{24}\right]$

39. $\displaystyle\int_0^{1/2} r\sqrt{1-4r^2}\, dr$ $\quad \left[\frac{1}{12}\right]$

40. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}+1}\, dx$ $\quad [2(2-\ln 2)]$

41. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$ $\quad \left[\frac{\sqrt{3}\pi}{9}\right]$