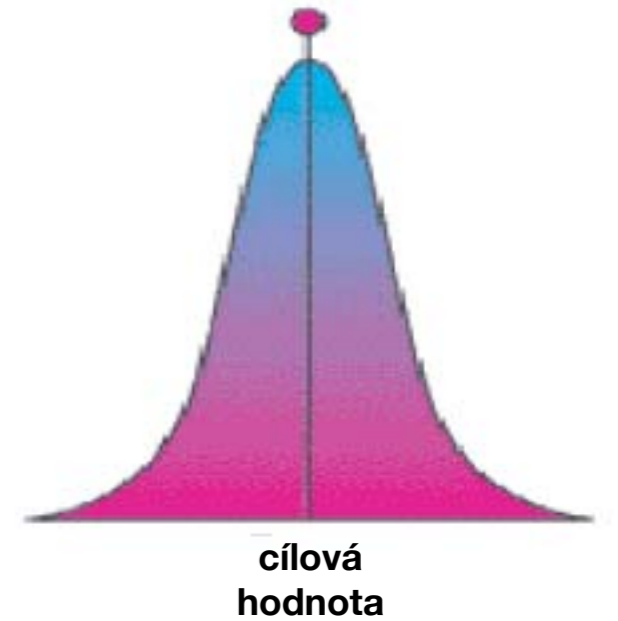
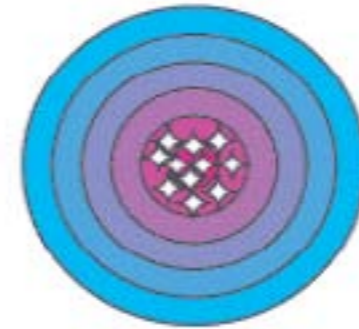
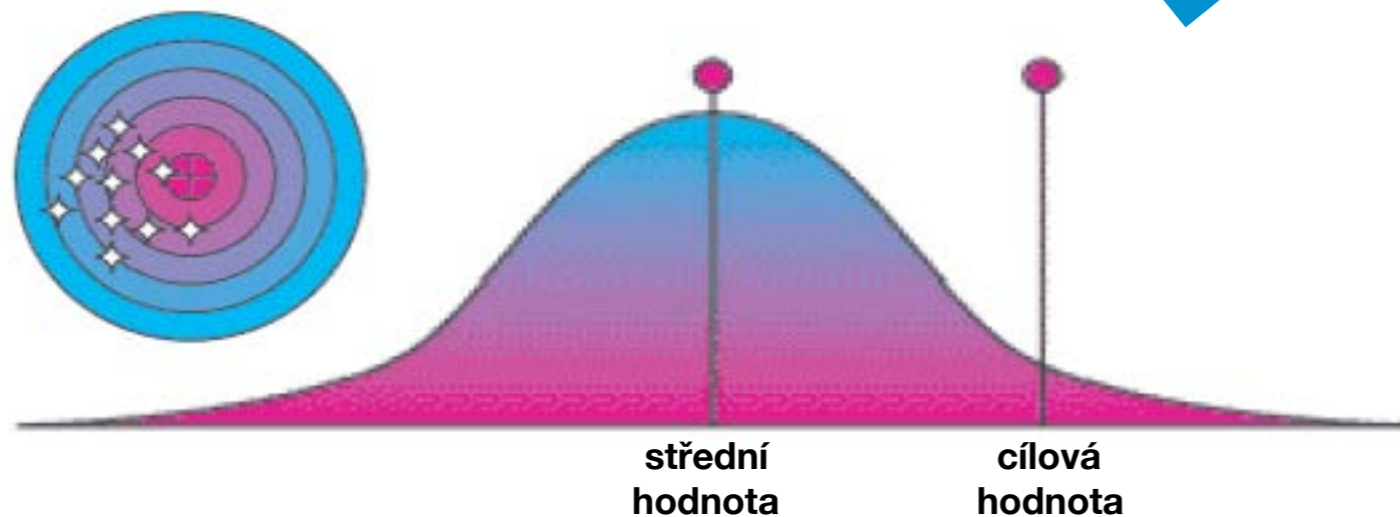


Základy navrhování průmyslových experimentů DOE



V. Vícefaktoriální experimenty



Gejza Dohnal

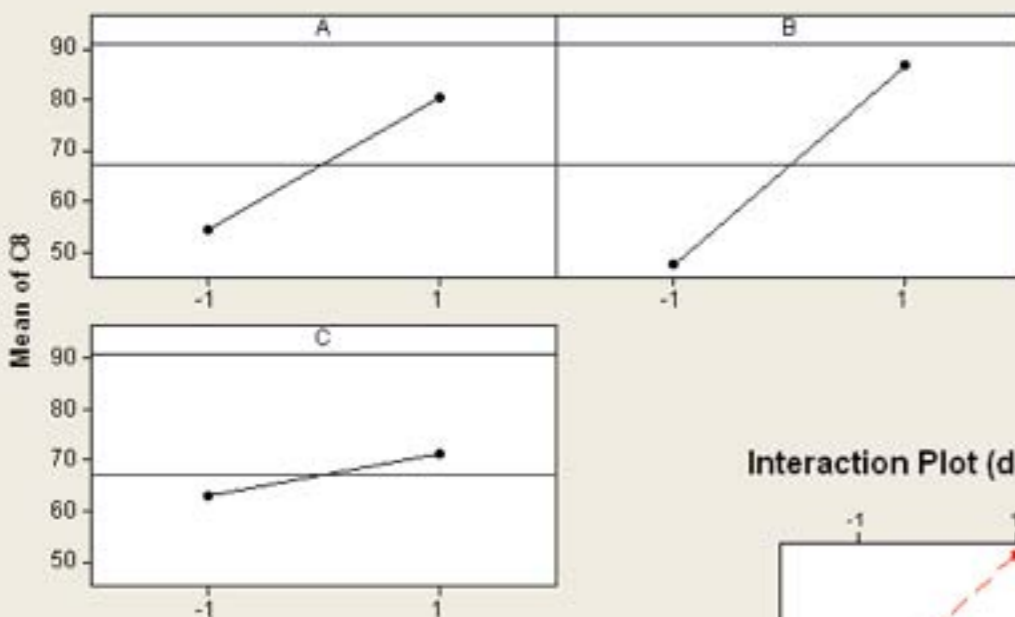
Vícefaktoriální návrhy experimentů

Významnost efektů

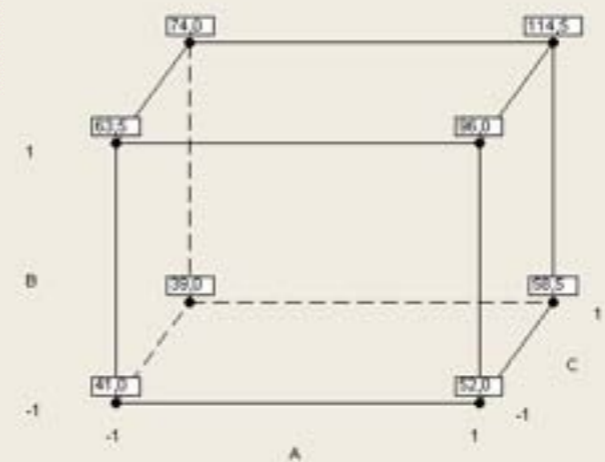
Efekt faktoru = průměrná změna odezvy při změně úrovně faktoru

$$\hat{A} = \bar{y}_{A+} - \bar{y}_{A-}$$

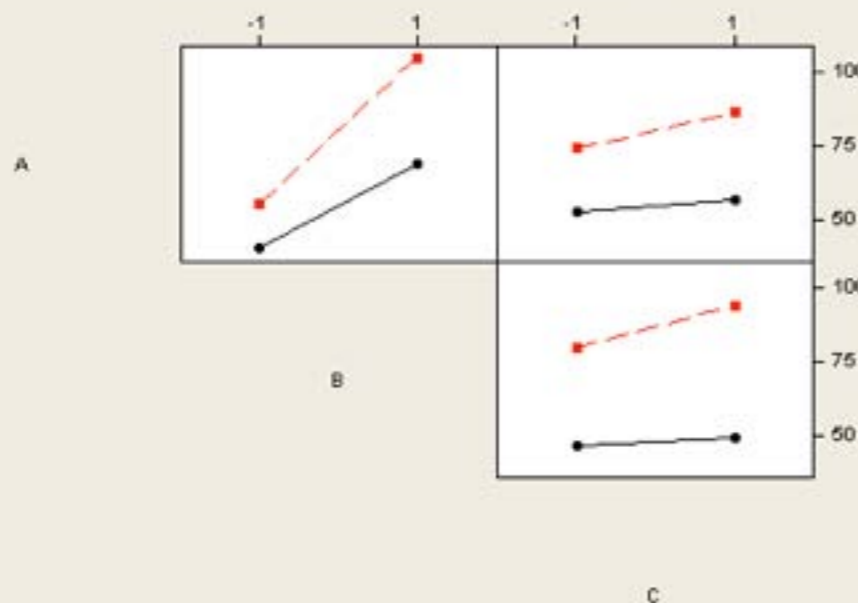
Main Effects Plot (data means) for C8



Cube Plot (data means) for C8



Interaction Plot (data means) for C8



Estimated Effects and Coefficients for C8 (coded units)

Term	Effect	Coef	SE Coef	T	P
Constant		67,3125	1,722	39,09	0,000
A	25,8750	12,9375	1,722	7,51	0,000
B	39,3750	19,6875	1,722	11,43	0,000
C	8,3750	4,1875	1,722	2,43	0,041
A*B	10,6250	5,3125	1,722	3,09	0,015
A*C	4,1250	2,0625	1,722	1,20	0,265
B*C	6,1250	3,0625	1,722	1,78	0,113
A*B*C	-0,1250	-0,0625	1,722	-0,04	0,972

S = 6,88749 R-Sq = 96,28% R-Sq(adj) = 93,03%

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Významnost efektů

Efekt faktoru = průměrná změna odezvy při změně úrovně faktoru

$$\hat{A} = \bar{y}_{A+} - \bar{y}_{A-}$$

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ij}$$

$$\epsilon_{ij} \approx N(0, \sigma^2) \Rightarrow \hat{A} \approx N(0, s_e^2)$$

kde $s_e^2 = \frac{4\sigma^2}{n}$ a n je celkový počet měření

Test významnosti efektu:

- graficky (pravděpodobnostní papír, Paretův diagram)
- t-test
- ANOVA

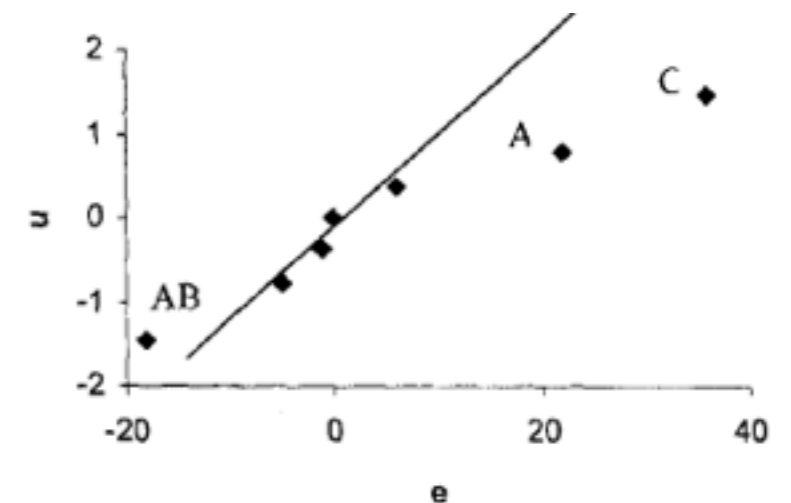
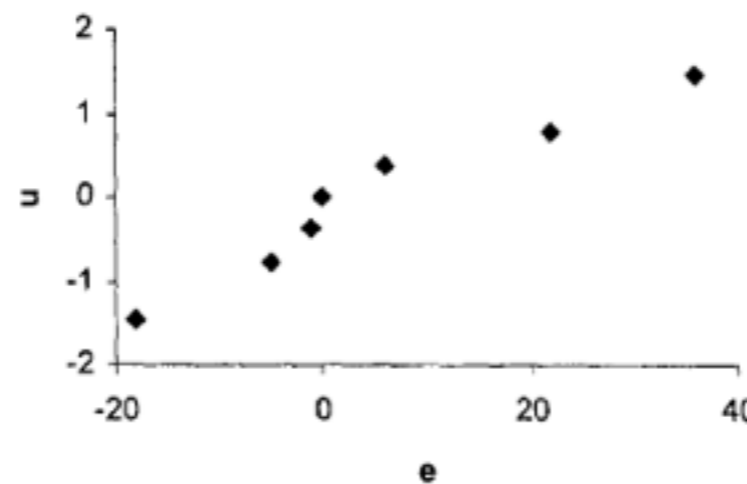
Vícefaktoriální návrhy experimentů

Významnost efektů

pravděpodobnostní normální papír: Hodnoty efektů zakreslíme do normálního pravděpodobnostního papíru:

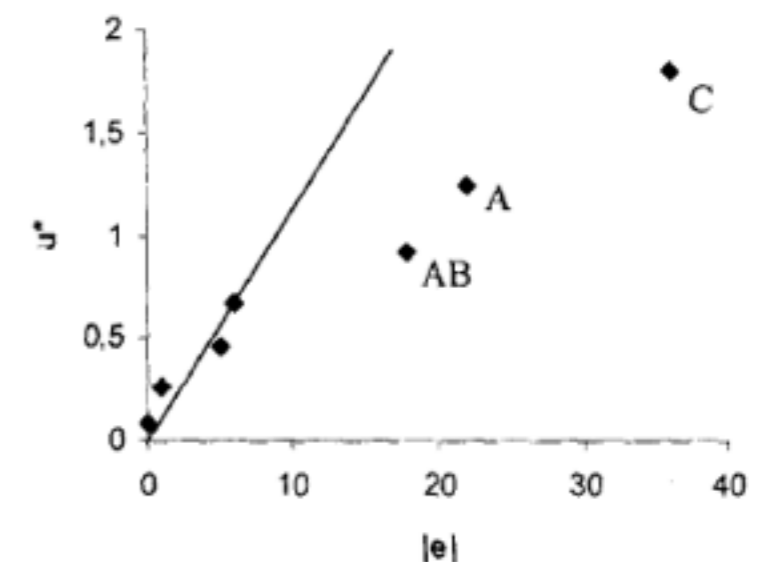
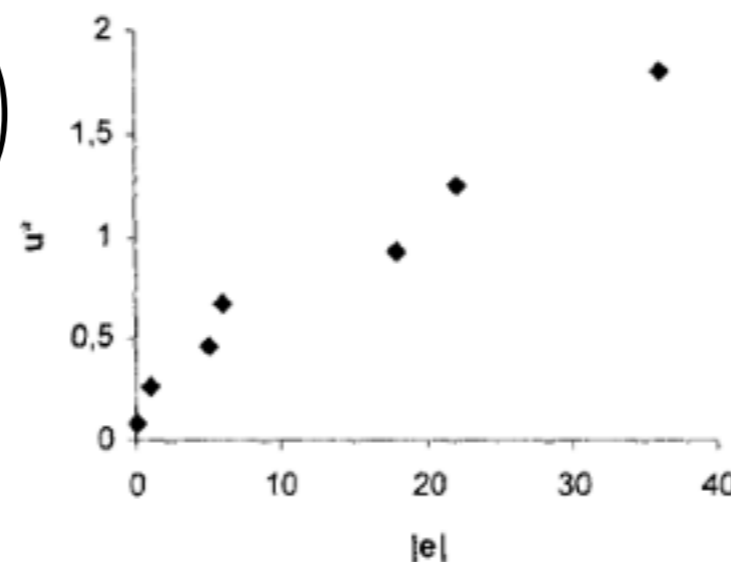
$$u_i = \Phi^{-1} \left(\frac{i - 0.5}{2^n - 1} \right)$$

Významné jsou ty, které neleží na přímce (A, C)



polonormální pravděpodobnostní papír: Do normálního pravděpodobnostního papíru zakreslíme absolutní hodnoty efektů:

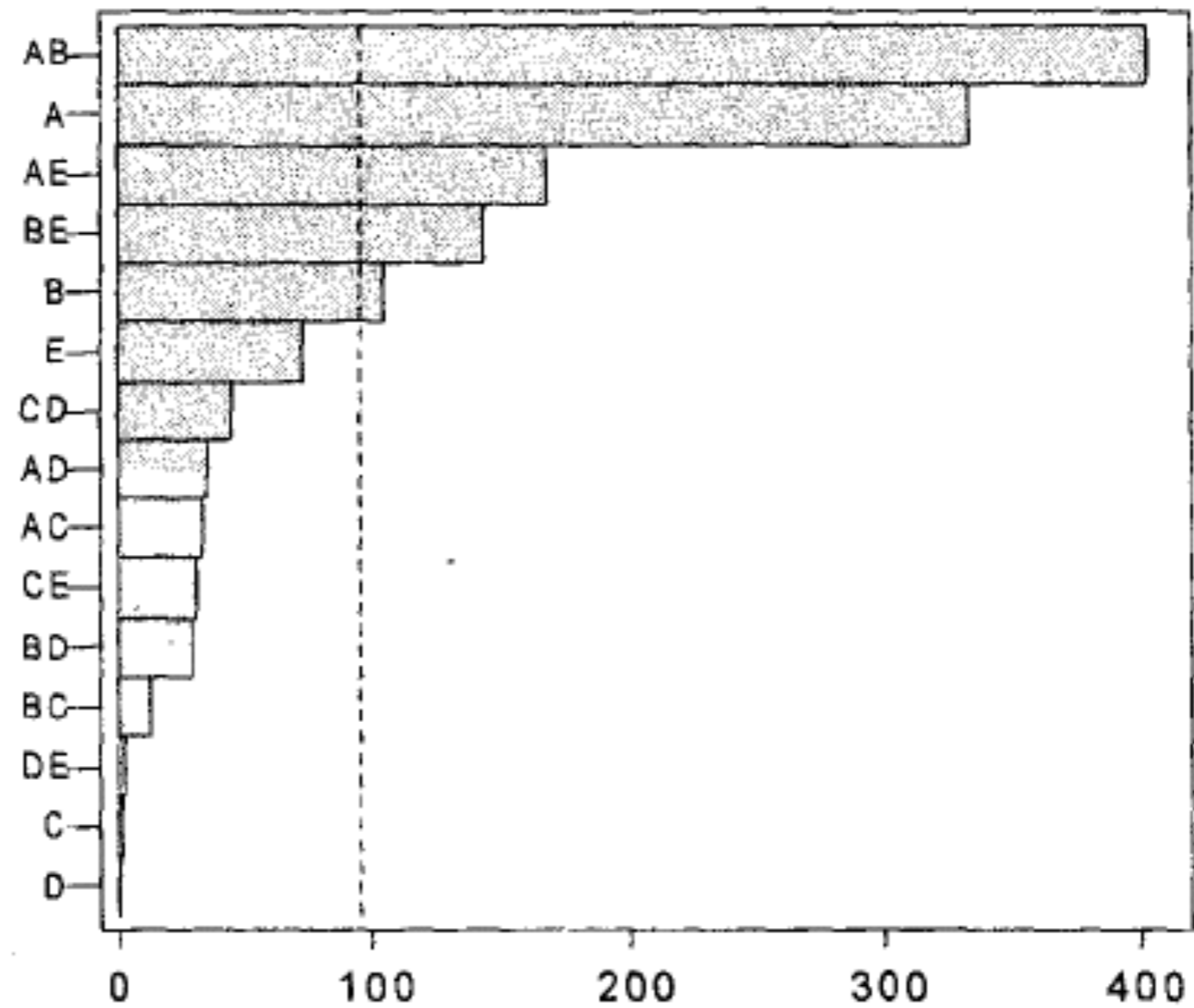
$$u_i^* = \Phi^{-1} \left(0.5 + 0.5 \frac{i - 0.5}{2^n - 1} \right)$$



Vícefaktoriální návrhy experimentů

Významnost efektů

Paretův diagram:



Vícefaktoriální návrhy experimentů

Významnost efektů

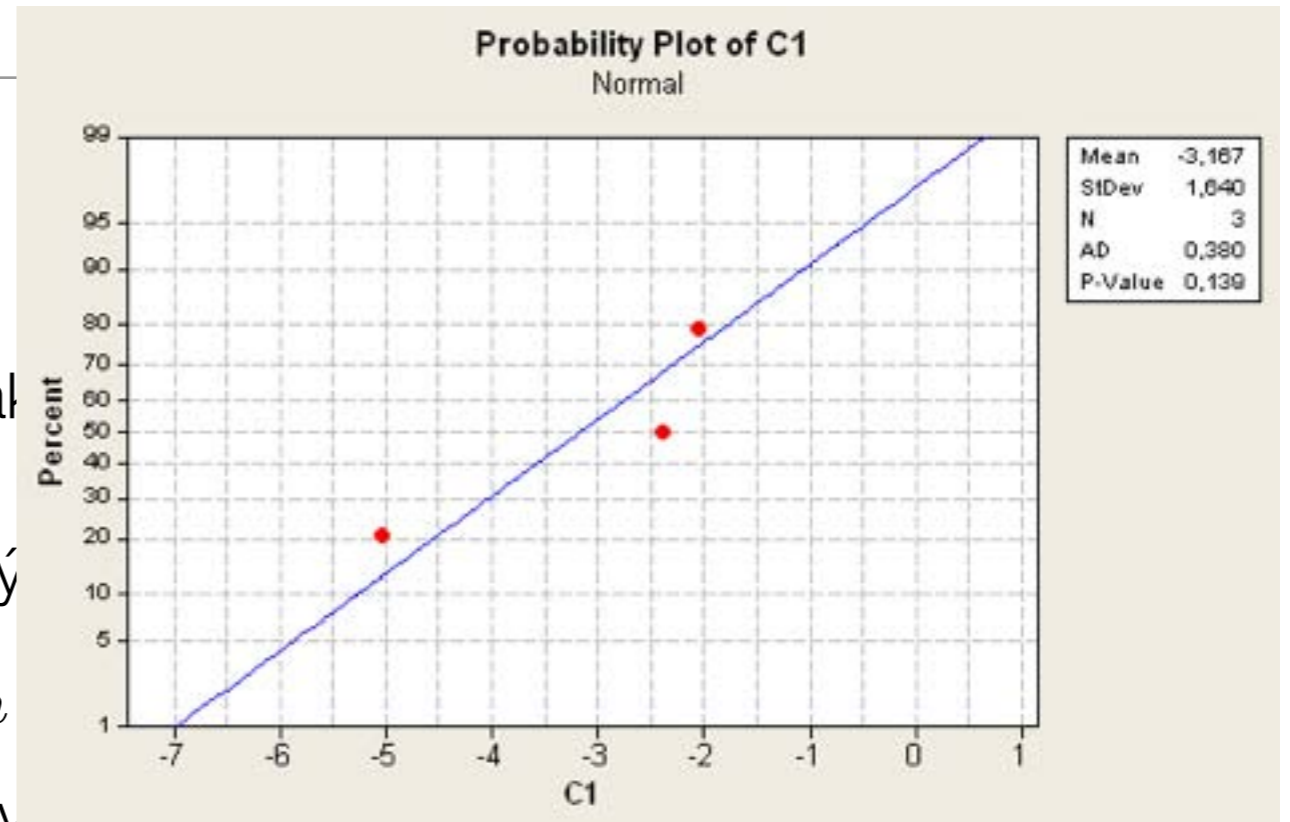
t-test: testová statistika $t = \frac{\hat{A}}{s_e}$

n je celkový počet měření (s opakováním)

efekt faktoru A považujeme za významný, pokud

$$|t| > t_{n-m}$$

Příklad: (Účinek koncentrace a teploty na viskozita vyčištěného produktu)
 $n = 12, m = 4$



	A	B	AB	y	y	y
1	-	-	+	9.0	9.0	9.0
a	+	-	-	9.3	8.0	8.65
b	-	+	-	5.5	6.5	6.0
ab	+	+	+	1.8	1.3	1.55
	-2.4	-5.05	-2.05			

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Směšování ve faktoriálních návrzích

- Uvažujme návrh 2^3 s 8 kombinacemi úrovní faktorů (úplný návrh)
- Z nějakých důvodů je třeba snížit počet měření na polovinu - vytvoříme "dílčí" faktoriální experiment 2^{3-1}
- Podobně jako při dělení na bloky, použijeme k tomu poslední sloupec ABC

test	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
1	-	-	-	+	+	+	-
a	+	-	-	-	-	+	+
b	-	+	-	-	+	-	+
c	-	-	+	+	-	-	+
ab	+	+	-	+	-	-	-
ac	+	-	+	-	+	-	-
bc	-	+	+	-	-	+	-
abc	+	+	+	+	+	+	+

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Směšování ve faktoriálních návrzích

- Uvažujme návrh 2^3 s 8 kombinacemi úrovní faktorů (úplný návrh)
- Z nějakých důvodů je třeba snížit počet měření na polovinu - vytvoříme "dílčí" faktoriální experiment 2^{3-1}
- Podobně jako při dělení na bloky, použijeme k tomu poslední sloupec ABC

test	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	I
1	-	-	-	+	+	+	-	+
a	+	-	-	-	-	+	+	+
b	-	+	-	-	+	-	+	+
c	-	-	+	+	-	-	+	+
ab	+	+	-	+	-	-	-	+
ac	+	-	+	-	+	-	-	+
bc	-	+	+	-	-	+	-	+
abc	+	+	+	+	+	+	+	+

$$ABC=I$$

generátor
plánu

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Směšování ve faktoriálních návrzích

- Uvažujme návrh 2^3 s 8 kombinacemi úrovní faktorů (úplný návrh)
- Z nějakých důvodů je třeba snížit počet měření na polovinu - vytvoříme "dílčí" faktoriální experiment 2^{3-1}
- Podobně jako při dělení na bloky, použijeme k tomu poslední sloupec ABC

test	A	B	C	AB	AC	BC
a	+	-	-	-	-	+
b	-	+	-	-	+	-
c	-	-	+	+	-	-
abc	+	+	+	+	+	+

$$ABC=I$$

generátor
plánu

Platí: $A^2 = I$, $B^2 = I$, $C^2 = I$, $AI = A$, $BI = B$, $CI = C$

a tedy $A(ABC) = AI$ podobně $B(ABC) = BI$ a $C(ABC) = CI$
 $A^2BC = AI$ $AB^2C = BI$ $ABC^2 = CI$
 $BC = A$ $AC = B$ $AB = C$

Tedy efekty hlavních faktorů a interakcí druhého řádu jsou nerozlišitelné.

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Směšování ve faktoriálních návrzích

- Uvažujme návrh 2^3 s 8 kombinacemi úrovní faktorů (úplný návrh)
- Z nějakých důvodů je třeba snížit počet měření na polovinu - vytvoříme "dílčí" faktoriální experiment 2^{3-1}
- Podobně jako při dělení na bloky, použijeme k tomu poslední sloupec ABC

test	A	B	C	AB	AC	BC
a	+	-	-	-	-	+
b	-	+	-	-	+	-
c	-	-	+	+	-	-
abc	+	+	+	+	+	+

$$ABC=I$$

$$\hat{A} = \frac{1}{2} [a + abc - b - c]$$

$$\hat{BC} = \frac{1}{2} [a + abc - b - c]$$

$$\hat{B} = \frac{1}{2} [b + abc - a - c]$$

$$\hat{AC} = \frac{1}{2} [b + abc - a - c]$$

$$\hat{C} = \frac{1}{2} [c + abc - a - b]$$

$$\hat{AB} = \frac{1}{2} [c + abc - a - b]$$

Tedy efekty hlavních faktorů a interakcí druhého řádu jsou nerozlišitelné.

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Směšování ve faktoriálních návrzích

- Uvažujme návrh 2^3 s 8 kombinacemi úrovní faktorů (úplný návrh)
- Z nějakých důvodů je třeba snížit počet měření na polovinu - vytvoříme "dílčí" faktoriální experiment 2^{3-1}
- Podobně jako při dělení na bloky, použijeme k tomu poslední sloupec ABC

test	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	I
1	-	-	-	+	+	+	-	+
a	+	-	-	-	-	+	+	+
b	-	+	-	-	+	-	+	+
c	-	-	+	+	-	-	+	+
ab	+	+	-	+	-	-	-	+
ac	+	-	+	-	+	-	-	+
bc	-	+	+	-	-	+	-	+
abc	+	+	+	+	+	+	+	+

$$ABC = -I$$

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Směšování ve faktoriálních návrzích

- Uvažujme návrh 2^3 s 8 kombinacemi úrovní faktorů (úplný návrh)
- Z nějakých důvodů je třeba snížit počet měření na polovinu - vytvoříme "dílčí" faktoriální experiment 2^{3-1}
- Podobně jako při dělení na bloky, použijeme k tomu poslední sloupec ABC

test	A	B	C	AB	AC	BC
1	-	-	-	+	+	+
ab	+	+	-	+	-	-
ac	+	-	+	-	+	-
bc	-	+	+	-	-	+

$$ABC = -I$$

Platí: $A = -BC$, $B = -AC$, $C = -AB$ Tedy efekty hlavních faktorů a interakcí druhého řádu jsou stejně nerozlišitelné i v tomto případě - **jsou smíchány**.

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Směšování ve faktoriálních návrzích

- rozlišení III:** Návrh tohoto typu umožňuje odhady hlavních efektů. Některé interakce druhého řádu jsou smíchány s hlavními faktory (předpokládáme, že jsou zanedbatelné)
- rozlišení IV:** Návrh tohoto typu umožňuje odhady hlavních efektů nezávisle na interakcích druhého řádu. Některé interakce druhého řádu jsou smíchány dohromady a nelze je odhadnout (předpokládáme, že jsou zanedbatelné)
- rozlišení V:** Návrh tohoto typu umožňuje odhady hlavních faktorů i interakcí druhého řádu. Tyto efekty jsou smíchány s interakcemi třetího a vyššího řádu
- rozlišení VI:** Návrh tohoto typu umožňuje odhady hlavních faktorů i interakcí druhého řádu, které jsou smíchány s interakcemi čtvrtého a vyššího řádu. Některé interakce druhého řádu mohou být smíchány dohromady.
- rozlišení VII:** Návrh tohoto typu umožňuje odhady hlavních faktorů, interakcí druhého řádu, i interakcí třetího řádu. O vyšších interakcích se předpokládá, že jsou zanedbatelné.

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Směšování ve faktoriálních návrzích

- Uvažujme návrh 2^3 s 8 kombinacemi úrovní faktorů (úplný návrh)
- Z nějakých důvodů je třeba snížit počet měření na polovinu - vytvoříme "dílčí" faktoriální experiment 2^{3-1}
- Podobně jako při dělení na bloky, použijeme k tomu poslední sloupec ABC

test	A	B	C	AB	AC	BC
1	-	-	-	+	+	+
ab	+	+	-	+	-	-
ac	+	-	+	-	+	-
bc	-	+	+	-	-	+

$$ABC = -I$$

Platí: $A = -BC$, $B = -AC$, $C = -AB \Rightarrow$ **Neúplný návrh 2^{3-1} má rozlišení III.**

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Dílčí faktoriální návrhy se často používají na začátku experimentování, kdy jsme v rámci úvodní analýzy procesu připravili seznam obsahující velký počet potenciálních vlivů na odezvu, ale přitom očekáváme, že většina hlavních efektů a interakcí bude nevýznamných. V této fázi experimentování, nazývané screening, jde hlavně o vyloučení nepodstatných faktorů.

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Směšování ve faktoriálních návrzích

volba generátorů: v návrhu 2^5 s faktory A, B, C, D, E porovnejme dvě volby generátorů pro snížení počtu měření na polovinu:

- a) I = ABE
- b) I = ABCDE

při volbě a) je $A = BE, B = AE, E = AB \Rightarrow$ rozlišení je III. (dílčí návrh 2_{III}^{5-1})

b) je $A = BCDE, \dots \Rightarrow$ rozlišení je V. (dílčí návrh 2_V^{5-1})

Tedy b) je lepší (má vyšší rozlišení).

Příklad: Která ze dvou voleb generátorů v návrhu 2^7 s faktory A,B,C,D,E,F,G je lepší?

- a) $E = ABCD, F = ABC, G = BCD,$
- b) $E = ABC, F = BCD, G = ACD ?$

Definiční rovnice jsou: a) $I = ABCDE = ABCF = BCDG = DEF = AEG = ADFG = BCEFG \Rightarrow$
návrh dílčího plánu je v tomto případě s rozlišením III (2_{III}^{7-3})

b) $I = ABCE = BCDF = ACDG = ADEF = BDEG = CEFG = ABFG \Rightarrow$
návrh dílčího plánu je v tomto případě s lepším rozlišením IV (2_{IV}^{7-3})

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Factors: 7 Base Design: 7; 16 Resolution: IV
Runs: 16 Replicates: 1 Fraction: 1/8
Blocks: 1 Center pts (total): 0

Design Generators: E = ABC; F = BCD; G = ACD

Alias Structure

I + ABCE + ABFG + ACDG + ADEF + BCDF + BDEG + CEFG

A + BCE + BFG + CDG + DEF + ABCDF + ABDEG + ACEFG
B + ACE + AFG + CDF + DEG + ABCDG + ABDEF + BCEFG
C + ABE + ADG + BDF + EFG + ABCFG + ACDEF + BCDEG
D + ACG + AEF + BCF + BEG + ABCDE + ABDFG + CDEFG
E + ABC + ADF + BDG + CFG + ABCEFG + ACDEG + BCDEF
F + ABG + ADE + BCD + CEG + ABCEF + ACDFG + BDEFG
G + ABF + ACD + BDE + CEF + ABCEG + ADEFG + BCDFG
AB + CE + FG + ACDF + ADEG + BCDG + BDEF + ABCEFG
AC + BE + DG + ABDF + ACFG + BCFG + CDEF + ABCDEG
AD + CG + EF + ABCF + ABEG + BCDE + BDFG + ACDEFG
AE + BC + DF + ABDG + ACFG + BEFG + CDEG + ABCDEF
AF + BG + DE + ABCD + ACEG + BCEF + CDFG + ABDEFG
AG + BF + CD + ABDE + ACEF + BCEG + DEFG + ABCDFG
BD + CF + EG + ABCG + ABEF + ACDE + ADFG + BCDEFG
ABD + ACF + AEG + BCG + BEF + CDE + DFG + ABCDEFG

Create Factorial Design

Type of Design

- 2-level factorial (default generators) (2 to 15 factors)
- 2-level factorial (specify generators) (2 to 15 factors)
- Plackett-Burman design (2 to 47 factors)
- General full factorial design (2 to 15 factors)

Number of factors: 7

Display Available Designs...
Designs... Factors...

Create Factorial Design - Designs

Designs	Runs	Resolution	2**[k-p]
1/16 fraction	8	III	2**(7-4)
1/8 fraction	16	IV	2**(7-3)
1/4 fraction	32	IV	2**(7-2)
1/2 fraction	64	VII	2**(7-1)
Full factorial	128	Full	2**7

Number of center points per block: 0

Number of replicates for corner points: 1

Generators...
Help OK Cancel

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Příklad matice návrhu experimentu 3^2 nebo 3^3

test	A	B
1	-	-
b	-	0
B	-	+
a	0	-
ab	0	0
aB	0	+
A	+	-
Ab	+	0
AB	+	+

test	A	B	C
1	-	-	-
c	-	-	0
C	-	-	+
b	-	0	-
bc	-	0	0
bC	-	0	+
B	-	+	-
Bc	-	+	0
BC	-	+	+
a	0	-	-
ac	0	-	0
aC	0	-	+
ab	0	0	-
abc	0	0	0
abC	0	0	+
aB	0	+	-
aBc	0	+	0
aBC	0	+	+
A	+	-	-
Ac	+	-	0
AC	+	-	+
Ab	+	0	-
Abc	+	0	0
AbC	+	0	+
AB	+	+	-
ABc	+	+	0
ABC	+	+	+