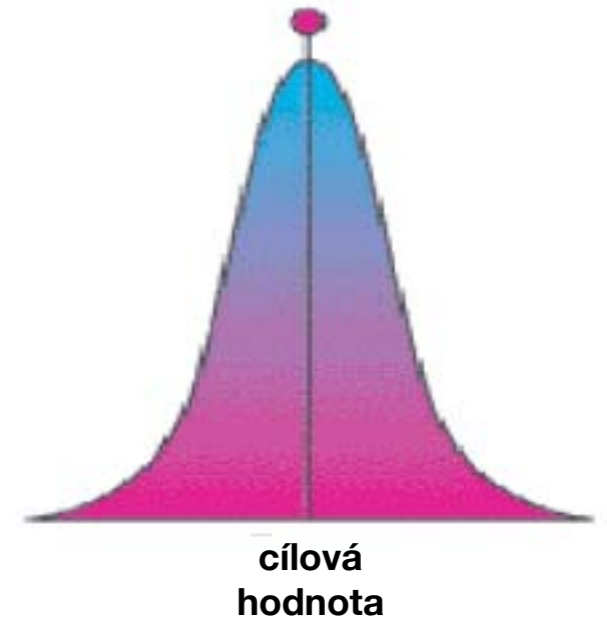
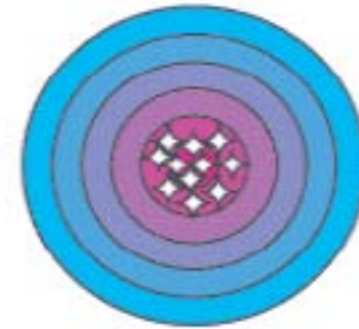
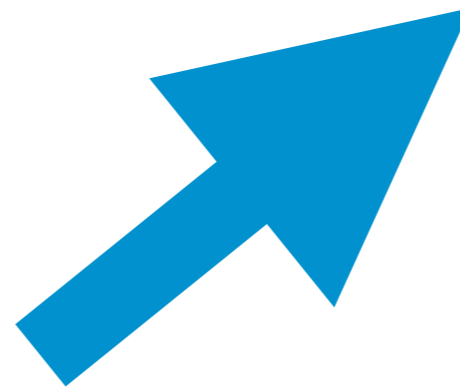
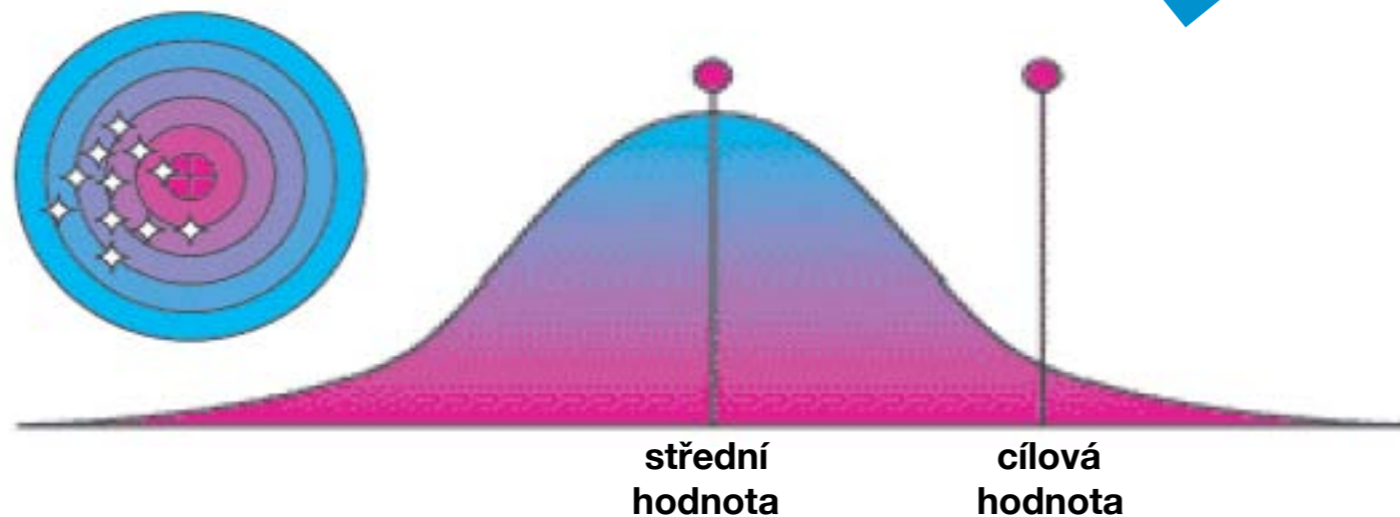


# Základy navrhování průmyslových experimentů DOE



## V. Vícefaktoriální experimenty

---



**Gejza Dohnal**

# Vícefaktoriální návrhy experimentů

## počet faktorů:

- + více faktorů lépe popisuje model
- + můžeme zkoumat vliv více interakcí
- komplikuje se návrh velkým množstvím měření
- složitá a nepřehledná analýza

## počet úrovní:

- 2 nejčastější případ, funguje dobře při lineární závislosti
- 3 máme-li pochybnosti o lineární závislosti odezvy a faktoru
- 4 méně často, komplikovaný návrh, mnoho měření

## počet replikací:

- + více replikací dává lepší obraz variability chyby měření
- + dostáváme spolehlivější výsledky
- nebezpečí závislosti na skrytých faktorech
- narůstá počet měření (cena, čas)
- při jediné replikaci není možné určit chybu měření vůbec

## počet bloků:

- + snižují variabilitu chyby měření
- + umožňují provádět experiment "po částech"
- snižují počet stupňů volnosti pro odhad chyby měření
- směšují se s interakcemi vyšších řádů (ztrácíme informaci)

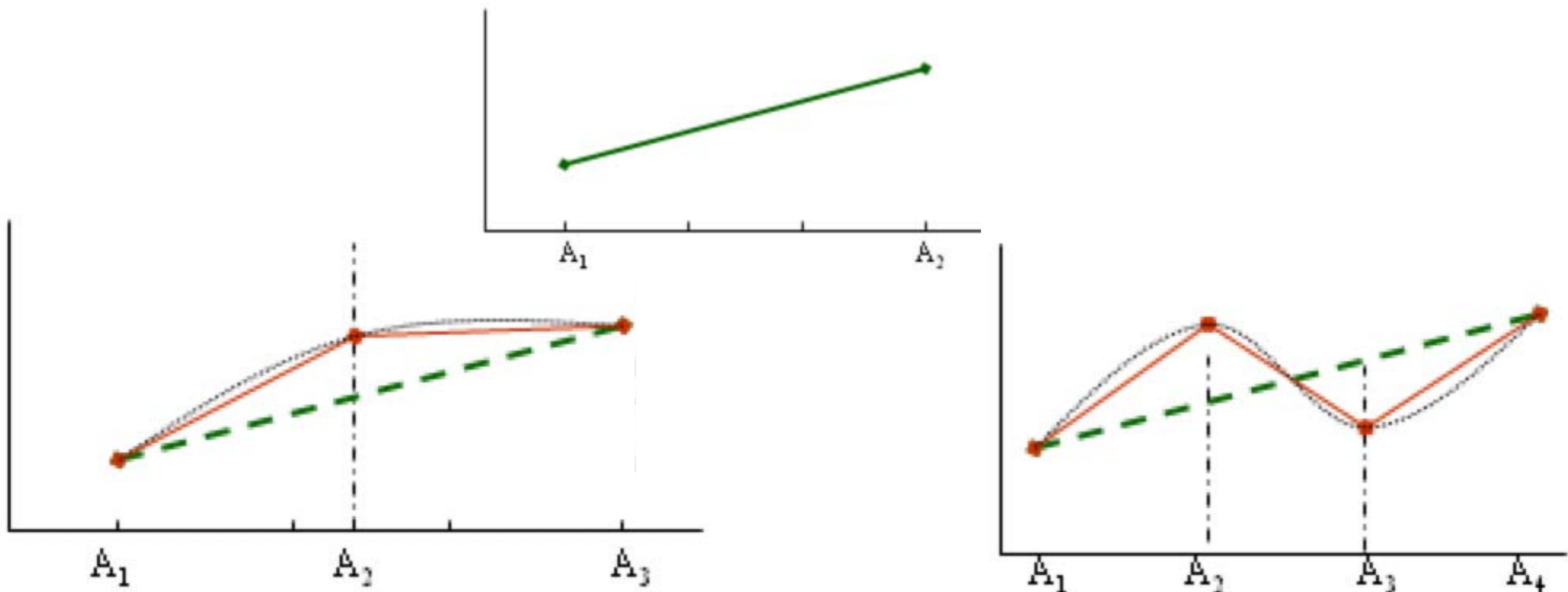
# Vícefaktoriální návrhy experimentů

## počet faktorů:

- + více faktorů lépe popisuje model
- + můžeme zkoumat vliv více interakcí
- komplikuje se návrh velkým množstvím měření
- složitá a nepřehledná analýza

## počet úrovní:

- 2 nejčastější případ, funguje dobře při lineární závislosti
- 3 máme-li pochybnosti o lineární závislosti odezvy a faktoru
- 4 méně často, komplikovaný návrh, mnoho měření



# Vícefaktoriální návrhy experimentů

## Regresní model experimentu

---

**odezva má kvantitativní charakter:** může nabývat hodnot z podintervalu reálné přímky  
**model pro dva faktory:**

lineární model:

$$Y = b_0 + b_1 X_A + b_2 X_B + \epsilon$$

koeficienty lze nalézt jako poloviční odhady příslušných efektů,  
 $b_0$  je celkový průměr  
nebo odhadem metodou nejmenších čtverců

neúplný kvadratický model:  $Y = b_0 + b_1 X_A + b_2 X_B + b_{12} X_A X_B + \epsilon$

koeficienty lze nalézt jako poloviční odhady příslušných efektů,  
 $b_0$  je celkový průměr  
nebo odhadem metodou nejmenších čtverců

úplný kvadratický model:  $Y = b_0 + b_1 X_A + b_2 X_B + b_{11} X_A^2 + b_{22} X_B^2 + b_{12} X_A X_B + \epsilon$

koeficienty nelze nalézt pomocí efektů nebo metodou nejmenších čtverců. Je třeba použít složitější schémata plánů (kombinovaný, víceúrovňový, ...)  
Slouží k výpočtu optimálních hodnot faktorů nebo k výpočtu hodnot  $Y$  pro libovolnou úroveň faktorů,

**Příklad: Účinek koncentrace a teploty na viskozitu výsledného produktu**

A	B	AB	y	y
-	-	+	9.0	9.0
+	-	-	9.3	8.0
-	+	-	5.5	6.5
+	+	+	1.8	1.3
-2.4	-5.05	-2.05		

$$Y = b_0 + b_1 X_A + b_2 X_B + b_{12} X_A X_B + \epsilon$$

$$b_0 = \frac{1}{2} \hat{A} = -1.2, \quad b_1 = \frac{1}{2} \hat{B} = -2.025,$$

$$b_{12} = \frac{1}{2} \widehat{AB} = -1.025, \quad \bar{Y} = 6.3.$$

$$Y = 6.3 - 1.2 X_A - 2.025 X_B - 1.025 X_A X_B$$

$$\hat{A} = \frac{-9 - 9 + 9.3 + 8 - 5.5 - 6.5 + 1.8 + 1.3}{4} = -2.4$$

$$\hat{B} = \frac{-9 - 9 - 9.3 - 8 + 5.5 + 6.5 + 1.8 + 1.3}{4} = -5.05$$

$$\widehat{AB} = \frac{+9 + 9 - 9.3 - 8 - 5.5 - 6.5 + 1.8 + 1.3}{4} = -2.05$$

## Příklad: Účinek koncentrace a teploty na viskozitu výsledného produktu

A	B	AB	y	y
-	-	+	9.0	9.0
+	-	-	9.3	8.0
-	+	-	5.5	6.5
+	+	+	1.8	1.3
-2.4	-5.05	-2.05		

$$Y = b_0 + b_1 X_A + b_2 X_B + b_{12} X_A X_B$$

$$b_1 = \frac{1}{2} \hat{A} = -1.2, \quad b_2 = \frac{1}{2} \hat{B} = -2.025,$$

$$b_{12} = \frac{1}{2} \widehat{AB} = -1.025, \quad \bar{Y} = 6.3 = b_0$$

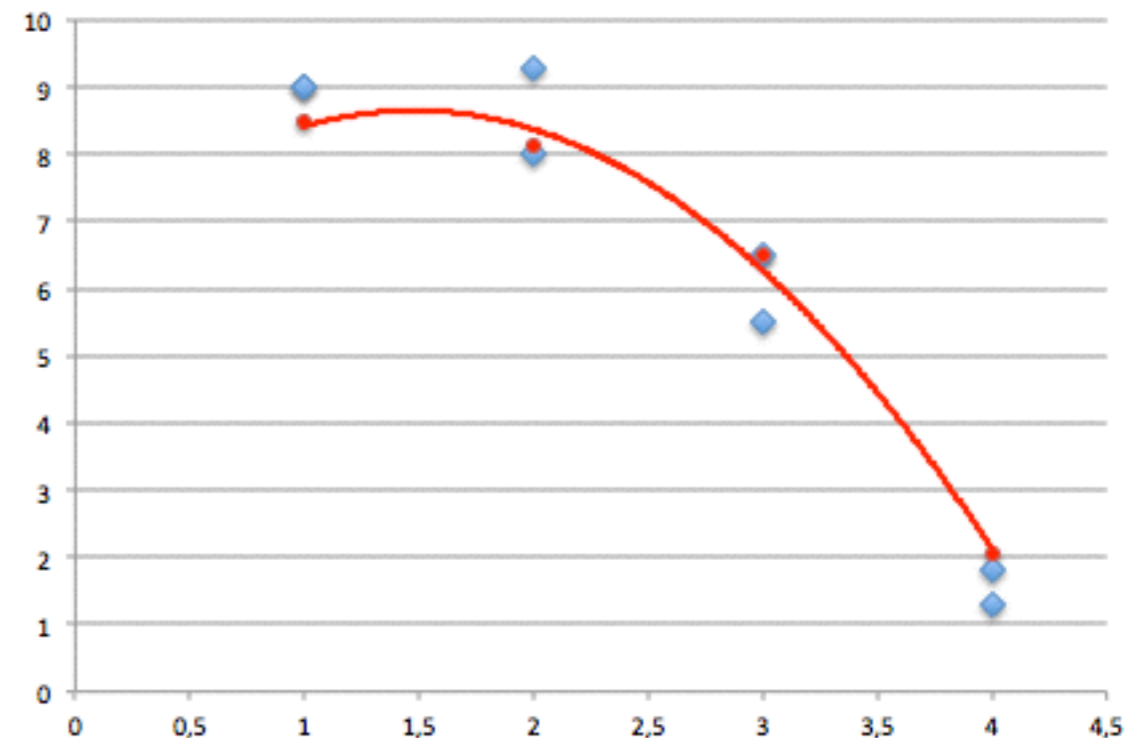
$$Y = 6.3 - 1.2X_A - 2.025X_B - 1.025X_A X_B$$

$$Y_{--} = 6.3 + 1.2 + 2.025 - 1.025 = 8.5$$

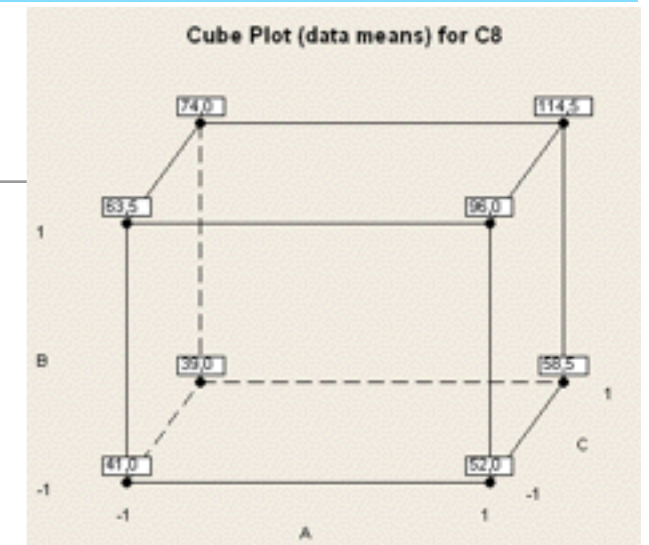
$$Y_{+-} = 6.3 - 1.2 + 2.025 + 1.025 = 8.15$$

$$Y_{-+} = 6.3 + 1.2 - 2.025 + 1.025 = 6.5$$

$$Y_{++} = 6.3 - 1.2 - 2.025 - 1.025 = 2.05$$



# Vícefaktoriální návrhy experimentů



**Významné body návrhu:** krychlové body  
centrální body  
hvězdicové body

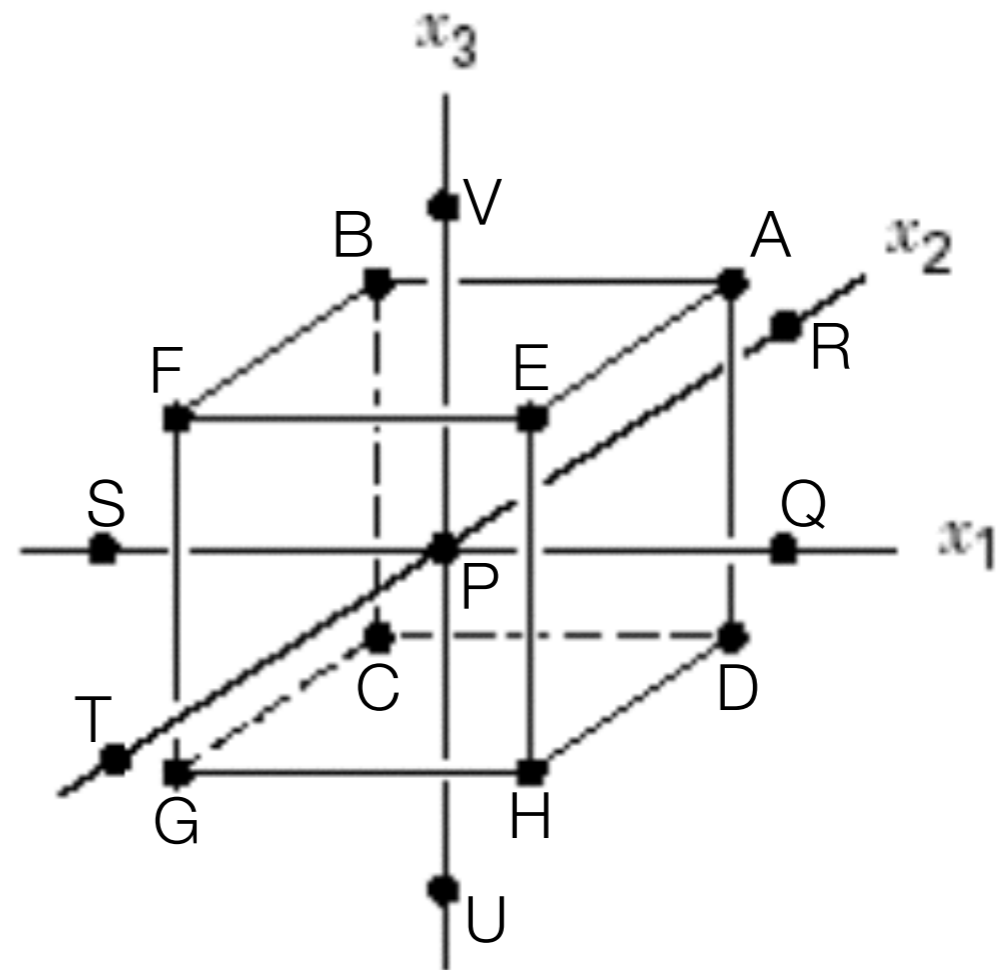
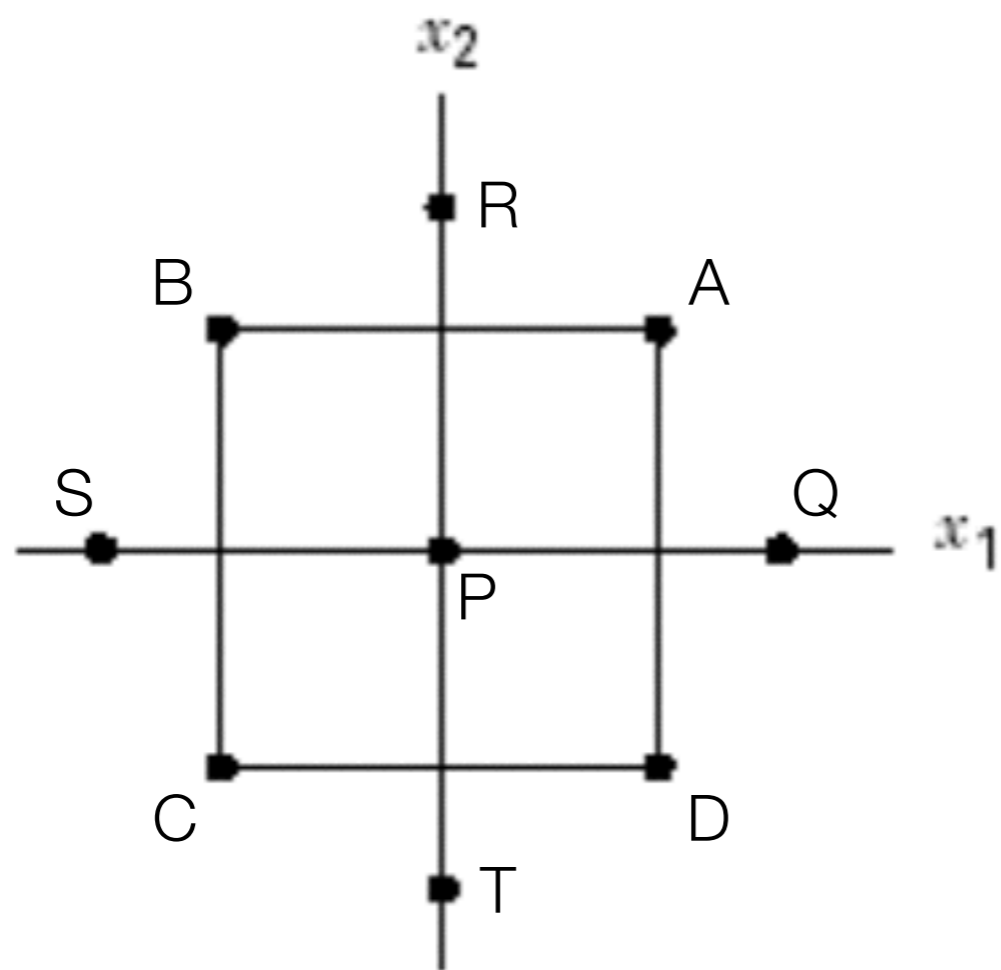
**Krychlové body:** jsou v plánu vždy a je jich  $2^{k-p}$ .  
Mají souřadnice  $\pm 1$  (např. pro 3 faktory jsou jejich souřadnice  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ ).  
Slouží k výpočtu efektů faktorů nebo koeficientů v lineárním modelu.

**Centrální body:** doplňují se do experimentu (doporučený počet je 3-5).  
Mají nulové souřadnice (pro 3 faktory je centrální bod  $(0, 0, 0)$ ).  
Slouží k odhadu rozptylu  $\sigma^2$  jako náhrada za odhad z opakovaných pokusů. Z reziduí v centrálních bodech se počítá čistá chyba měření.  
Nepoužívají se k výpočtu efektů faktorů.

**Hvězdicové body:** leží na průsečících kulové plochy se středem v centrálním bodu, procházející krychlovými body a souřadných os. Jejich počet je  $2k$ .  
Souřadnice pro 3 faktory jsou  $(\pm a, 0, 0)$ ,  $(0, \pm a, 0)$ ,  $(0, 0, \pm a)$ .  
Umožňují výpočet koeficientů v úplném kvadratickém modelu.  
Zpřesňují odhady regresních koeficientů.

# Vícefaktoriální návrhy experimentů

**Významné body návrhu:** krychlové body (A, B, C, D, ...)  
centrální body (P)  
hvězdicové body (Q, R, S, T, ...)





# Vícefaktoriální návrhy experimentů

## Příklad:

Úrovně faktorů:

	-	0	+
A	330	480	700
B	0,01	0,015	0,022
C	0,049	0,07	0,1

test	A	B	C	Y
1	-	-	-	160
a	+	-	-	37
b	-	+	-	165
c	-	-	+	172
ab	+	+	-	22
ac	+	-	+	35
bc	-	+	+	120
abc	+	+	+	18
H	0	0	0	66
F	0	0	0	83
E	0	0	0	71
G	0	0	0	82

Průměr Y v centrálních bodech:

$$\bar{Y}_c = \frac{1}{4} (66 + 83 + 71 + 82) = 75,5$$

Rozptyl Y v centrálních bodech:

$$s^2 = \frac{(66 - 75,5)^2 + (83 - 75,5)^2 + (71 - 75,5)^2 + (82 - 75,5)^2}{4 - 1} = 69,667$$

Rozptyl odhadu efektu:

$$s_e^2 = \frac{4s^2}{n_k} = \frac{4 \cdot 69,667}{8} = 34,83$$

a směrodatná odchylka:  $s_e = 5,9$

# Vícefaktoriální návrhy experimentů

Session

**Factorial Fit: C8 versus A; B; C**

Estimated Effects and Coefficients for C8 (coded units)

Term	Effect	Coef	SE Coef	T	P
Constant		91,13	2,951	30,88	0,000
A	-126,25	-63,13	2,951	-21,39	0,000
B	-19,75	-9,87	2,951	-3,35	0,044
C	-9,75	-4,88	2,951	-1,65	0,197
A*B	3,75	1,88	2,951	0,64	0,570
A*C	6,75	3,37	2,951	1,14	0,336
B*C	-14,75	-7,38	2,951	-2,50	0,088
A*B*C	13,75	6,88	2,951	2,33	0,102
Ct Pt		-15,63	5,111	-3,06	0,055

S = 8,34666 R-Sq = 99,40% R-Sq(adj) = 97,79%

Cube Plot (data means) for C8

Worksheet 1

Worksheet 2 \*\*\*

	C1	C2	C3	C4	C5	
1	StdOrder	RunOrder	CenterPt	Blocks	A	
2	1	11	1	0	1	0
3	2	4	2	1	1	1
4	3	5	3	1	1	-1
5	4	2	4	1	1	-1
6	5	6	5	1	1	-1
7	6	9	6	0	1	0
8	7	10	7	0	1	0
9	8	3	8	1	1	-1
10	9	12	9	0	1	0
11	10	7	10	1	1	-1
12	11	8	11	1	1	1
13	12	1	12	1	1	-1
14						
15						

Number of replicates for corner points:

Number of blocks:

Help OK Cancel

# Taguchiho ortogonální návrhy experimentů

## Taguchiho přístup

Taguchiho ztrátová funkce = rozptyl sledovaného  
jakostního znaku

základem jsou designové matice, označované  $L_n(X^y)$

L	A	B	C
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

$L_n(X^y)$

počet sloupců v návrhu  
= počet faktorů

počet úrovní faktorů

počet řádek v návrhu  
= počet měření pro  
jednu replikaci

L	A	B	C	D	E	F	G
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

Taguchiho přístup se dá použít, pokud  
neuvažujeme interakce (jsou zanedbatelné  
nebo neexistují)

# Taguchiho ortogonální návrhy experimentů

## Designové matice

### Základní typy designových matic v Taguchiho přístupu:

#### 2-úrovňové návrhy:

- $L_4 (2^3)$  (pro 2-3 faktory o dvou úrovních)
- $L_8 (2^7)$  (pro 3-7 faktorů o dvou úrovních)
- $L_{12} (2^{11})$  (pro 4-11 faktorů o dvou úrovních)
- $L_{16} (2^{15})$  (pro 4-15 faktorů o dvou úrovních)

L	A	B	C
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

#### 3-úrovňové návrhy:

- $L_9 (3^4)$
- $L_{18} (2^1 3^7)$

#### 4-úrovňové návrhy:

- $L_{16} (4^5)$

L	A	B	C	D	E	F	G
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

# Taguchiho ortogonální návrhy experimentů

## Řízené a šumové faktory

sledované faktory: - říditelné (lze nastavit jejich úroveň)  
- neřízené, šumové (lze je pouze měřit)

- řízené faktory tvoří tzv. vnitřní ortogonální sestavu
- neřízené faktory tvoří vnější ortogonální sestavu
- provádí se tolik replikací, kolik je kombinací úrovní ve vnější sestavě

vnější sestava

L	X	Y	Z
Q	1	1	1
Q	1	2	2
Q	2	1	2
Q	2	2	1

L	A	B	C	D	E	F	G
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

vnitřní sestava

# Taguchiho ortogonální návrhy experimentů

## Vyhodnocení Taguchiho experimentů

Podíl signál/šum je míra, kterou Taguchi použil k vyhodnocování výsledků pokusů. Je dána vztahem

$$S/N = \frac{\text{síla signálu}}{\text{síla šumu}} = \frac{(\text{citlivost})^2}{(\text{variabilita})^2}$$

$$S/N = \frac{\mu^2}{\sigma^2}$$

odhady střední hodnoty a rozptylu získáme z dat:

$$\hat{\mu} = \bar{y}_i = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \bar{y}_{ij} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left[ \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p y_{ijk} \right]$$

$$\hat{\sigma}^2 = S_i^2 = \frac{1}{Mp} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^p (y_{ijk} - \bar{y}_i)^2$$

### Míry založené na poměru S/N:

- "menší je lepší" (jsou-li hodnoty responzní veličiny kladné a cílová hodnota je nula):

$$z_i = -10 \log_{10} \frac{1}{Mp} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^p y_{ijk}^2$$

- "nominální hodnota je nejlepší" (hodnoty responzní veličiny mohou být kladné i záporné):

$$z_i = 10 \log_{10} \frac{\bar{y}_i^2}{S_i^2}$$

- "větší je lepší" (hodnoty responzní veličiny musejí být kladné):

$$z_i = -10 \log_{10} \frac{1}{Mp} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^p \frac{1}{y_{ijk}^2}$$

# Taguchiho ortogonální návrhy experimentů

## Příklad:

Při kalení oceli uvažujeme pět faktorů, které mají vliv na výslednou tvrdost, každý z těchto faktorů budeme uvažovat ve dvou úrovních:

	úroveň 1	úroveň 2	
teplota	760	900	°C
rychlost kalení	35	140	°C/s
doba ochlazování	1	300	s
obsah uhlíku	1	6	wt% C
koncentrace CO	5	20	%

Máme zjistit, který z faktorů má největší vliv na tvrdost ocelové součástky.

Použijeme tabulku  $L_8 (2^7)$

Pro každou kombinaci provedeme 4 replikace => provedeme celkem  $8 \times 4 = 32$  měření

Zvolíme kritérium "větší je lepší" ...

# Taguchiho ortogonální návrhy experimentů

## Příklad:

L	A	B	C	D	E	F	G
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2



# Taguchiho ortogonální návrhy experimentů

## Příklad:

L	obsah uhlíku	rychlost kalení	doba chlazení	koncentr. CO2	teplota
1	1	35	1	5	760
2	1	35	1	20	900
3	1	140	300	5	760
4	1	140	300	20	900
5	6	35	300	5	900
6	6	35	300	20	760
7	6	140	1	5	900
8	6	140	1	20	760

# Taguchiho ortogonální návrhy experimentů

## Příklad:

L	obsah uhlíku	rychlost kalení	doba chlazení	koncentr. CO2	teplota	T1	T2	T3	T4
1	1	35	1	5	760	68.00	61.41	66.33	97.07
2	1	35	1	20	900	69.84	64.76	86.07	51.67
3	1	140	300	5	760	74.36	61.30	94.57	96.81
4	1	140	300	20	900	71.71	58.42	77.23	60.05
5	6	35	300	5	900	91.27	90.89	84.54	63.72
6	6	35	300	20	760	54.39	73.01	50.10	79.62
7	6	140	1	5	900	64.65	91.51	72.68	84.33
8	6	140	1	20	760	60.31	60.69	76.73	74.97

$$S_1^2 = \frac{1}{N-1} \left( \sum_{i=1}^N T_{1i}^2 - N \cdot (\bar{T}_{1.})^2 \right) \quad z_1 = 10 \log_{10} \frac{\bar{T}_{1.}^2}{S_1^2}$$

# Taguchiho ortogonální návrhy experimentů

## Příklad:

L	obsah uhlíku	rychlost kalení	doba chlazení	koncentr. CO2	teplota	T1	T2	T3	T4	z
1	1	35	1	5	760	68.00	61.41	66.33	97.07	13.07
2	1	35	1	20	900	69.84	64.76	86.07	51.67	13.55
3	1	140	300	5	760	74.36	61.30	94.57	96.81	13.61
4	1	140	300	20	900	71.71	58.42	77.23	60.05	17.29
5	6	35	300	5	900	91.27	90.89	84.54	63.72	16.06
6	6	35	300	20	760	54.39	73.01	50.10	79.62	13.02
7	6	140	1	5	900	64.65	91.51	72.68	84.33	16.30
8	6	140	1	20	760	60.31	60.69	76.73	74.97	17.67

$$S_1^2 = \frac{1}{N-1} \left( \sum_{i=1}^N T_{1i}^2 - N \cdot (\bar{T}_{1.})^2 \right) \quad z_1 = 10 \log_{10} \frac{\bar{T}_{1.}^2}{S_1^2}$$



# Taguchiho ortogonální návrhy experimentů

## Příklad:

L	obsah uhlíku	rychlost kalení	doba chlazení	koncentr. CO2	teplota	T1	T2	T3	T4	z
1	1	35	1	5	760	68.00	61.41	66.33	97.07	13.07
2	1	35	1	20	900	69.84	64.76	86.07	51.67	13.55
3	1	140	300	5	760	74.36	61.30	94.57	96.81	13.61
4	1	140	300	20	900	71.71	58.42	77.23	60.05	17.29
5	6	35	300	5	900	91.27	90.89	84.54	63.72	16.06
6	6	35	300	20	760	54.39	73.01	50.10	79.62	13.02
7	6	140	1	5	900	64.65	91.51	72.68	84.33	16.30
8	6	140	1	20	760	60.31	60.69	76.73	74.97	17.67
úroveň 1	14.38	13.93	15.15	14.76	14.34					
úroveň 2	15.76	16.22	15.00	15.39	15.80					
efekt	1.38	2.29	0.15	0.63	1.46					

# Taguchiho ortogonální návrhy experimentů

## Příklad:

L	obsah uhlíku	rychlost kalení	doba chlazení	koncentr. CO2	teplota	T1	T2	T3	T4	z
1	1	35	1	5	760	68.00	61.41	66.33	97.07	13.07
2	1	35	1	20	900	69.84	64.76	86.07	51.67	13.55
3	1	140	300	5	760	74.36	61.30	94.57	96.81	13.61
4	1	140	300	20	900	71.71	58.42	77.23	60.05	17.29
5	6	35	300	5	900	91.27	90.89	84.54	63.72	16.06
6	6	35	300	20	760	54.39	73.01	50.10	79.62	13.02
7	6	140	1	5	900	64.65	91.51	72.68	84.33	16.30
8	6	140	1	20	760	60.31	60.69	76.73	74.97	17.67
úroveň 1	14.38	13.93	15.15	14.76	14.34					
úroveň 2	15.76	16.22	15.00	15.39	15.80					
efekt	1.38	<b>2.29</b>	0.15	0.63	1.46					

# Taguchiho ortogonální návrhy experimentů

## Příklad:

Uvažujme příklad se čtyřmi říditelnými faktory A,B,C,D a jedním rušivým faktorem Q, všechny o dvou úrovních. Jsou provedeny tři replikace.

Použijeme tabulku  $L_8 (2^7)$ : provedeme celkem  $8 \times 2 \times 3 = 48$  měření

L	A	B	C	D
1	1	1	1	1
2	1	1	2	2
3	1	2	1	2
4	1	2	2	1
5	2	1	1	2
6	2	1	2	1
7	2	2	1	1
8	2	2	2	2

Zvolíme kritérium "větší je lepší" ...

# Taguchiho ortogonální návrhy experimentů

## Příklad:

The screenshot shows the Minitab software interface. The 'Stat' menu is open, and the path 'DOE' > 'Taguchi' > 'Create Taguchi Design...' is selected. Two dialog boxes are open: 'Taguchi Design' and 'Taguchi Design - Design'.

**Taguchi Design Dialog:**

- Type of Design: 2-Level Design (2 to 31 factors)

**Taguchi Design - Design Dialog:**

Runs	2	**	Columns
L8	2	**	4
L12	2	**	4
L16	2	**	4
L32	2	**	4

Add a signal factor for dynamic characteristics

Buttons: Help, OK, Cancel







