V. Plošný integrál

V.1. Parametrizace ploch

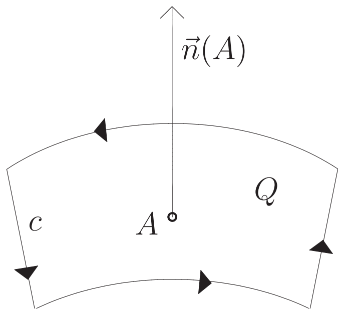
Nechť $B \subset \mathbb{E}_2$ a $X = P(u,v)$ je zobrazení z B do $\mathbb{E}_3$. Nechť $\Gamma = \partial B$ je uzavřená jednoduchá po částech hladká křivka v $\mathbb{E}_2$ tj. $B = \Gamma \cup int\,\Gamma$. Platí-li :

a) zobrazení P je spojité a prosté na B,

b) P má omezené a spojité parciální derivace P_u a P_v v $B \setminus K$, kde K je množina konečného počtu bodů ležících na hranici Γ množiny B,

c) $P_u \times P_v \neq \vec{0}$ v $B \setminus K$,

potom množina $Q = \{X = P(u,v) \in \mathbb{E}_3; [u,v] \in B\}$ se nazývá ***jednoduchá hladká*** **plocha** *v $\mathbb{E}_3$, zobrazení P její* **parametrizací** *a množina $c = \{X = P(u,v) \in \mathbb{E}_3;$ $[u,v] \in \Gamma\}$ její* **okraj**.
Vektory P_u, P_v jsou tečné vektory a vektor $P_u \times P_v$ je normálovým vektorem plochy Q. Jednotkový vektor normály označme $\vec{n}^o$.



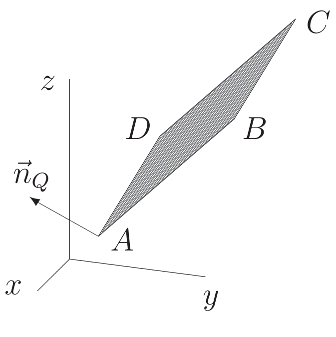
Říkáme, že plocha Q a její okraj c jsou souhlasně orientovány, jestliže pro směr křivky c a normálu $\vec{n}$ plochy platí pravidlo "pravé ruky".

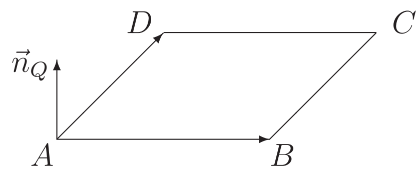
Poznámka : V geometrických a fyzikálních aplikacích se často používá tzv. radiusvektor $\vec{r} = (x,y,z)$ bodu $X = [x,y,z]$. Potom vektorová rovnice $\vec{r}(t) = \Big(x(t), y(t), z(t)\Big)$, $t \in I$ vyjadřuje křivku $c : x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in I$ a podobně $\vec{r}(u,v) = \Big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\Big)$, $[u,v] \in B \subset \mathbb{E}_2$ vyjadřuje plochu $Q = \{X \in \mathbb{E}_3;\ x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v),\ [u,v] \in B\}$.

• Navrhněte parametrizaci plochy Q, jejíž orientace je určena normálovým vektorem $\vec{n}_Q$. Zjistěte, zda plocha Q je orientována souhlasně či nesouhlasně s navrženou parametrizací :

***Příklad* 591**. Q je rovnoběžník s vrcholy $A = [1,1,1]$, $B = [1,4,4]$, $C = [0,5,6]$, $D = [0,2,3]$, $\vec{n}_Q \cdot \vec{k} > 0$.

Řešení :





Snadno se přesvědčíme, že $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (0, 3, 3)$ a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = (-1, 1, 2)$.
Q je část roviny určené bodem A a vektory $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$.
Rovnici roviny napíšeme v parametrickém tvaru $X = A + u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AD}$.
Za parametrizaci plochy Q zvolíme $P(u, v) = A + u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AD}$.

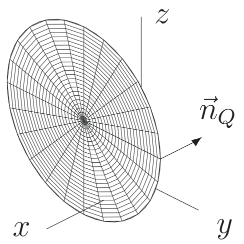
$P(u, v) = [1 - v, 1 + 3u + v, 1 + 3u + 2v]$, kde $[u, v] \in \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$

$$P_u = (0, 3, 3), \quad P_v = (-1, 1, 2) \quad \vec{n} = P_u \times P_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (3, -3, 3)$$

Z podmínky $\vec{n}_Q \cdot \vec{k} = (3, -3, 3) \cdot (0, 0, 1) = 3 > 0$ vyplývá, že orientace plochy je souhlasná se zvolenou parametrizací. ■

***Příklad* 592**. Q je kruh v rovině $x = 2$ se středem v bodě $[2, -1, 3]$ a poloměrem 4, $\vec{n}_Q = (-1, 0, 0)$.

Řešení :



$Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ (y+1)^2 + (z-3)^2 \le 16,\ x = 2\}$.
Navrhneme zobrazení:

a) $P(u, v) = [2,\ -1 + v\cos u,\ 3 + v\sin u]$, $\quad [u, v] \in B = \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, 4\rangle$,
$P_u(u, v) = (0,\ -v\sin u,\ v\cos u) \quad P_v(u, v) = (0,\ \cos u,\ \sin u)$

$$\vec{n} = P_u \times P_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -v\sin u & v\cos u \\ 0 & \cos u & \sin u \end{vmatrix} = (-v, 0, 0) \begin{array}{l} = \vec{0} \text{ pro } v = 0 \\ \neq \vec{0} \text{ pro } v \neq 0. \end{array}$$

Toto zobrazení **není** parametrizací plochy Q, protože je $P_u \times P_v = \vec{0}$ v nekonečném počtu bodů ležících na hranici množiny B. Kromě toho na hranici množiny B není uvažované zobrazení prosté.

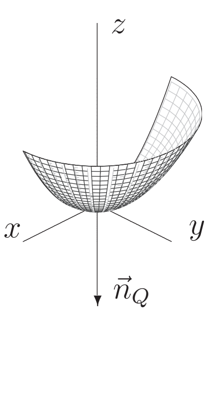
b) $P(u, v) = [2,\ -1 + u,\ 3 + v]$, $\quad B = \{[u, v] \in \mathbb{E}_2;\ u^2 + v^2 \le 16\}$,
$P_u(u, v) = (0,\ 1,\ 0)$, $\quad P_v(u, v) = (0,\ 0,\ 1)$

$$\vec{n} = P_u \times P_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 0, 0) \neq \vec{0} \text{ pro všechny } [u, v] \in B$$

Toto navržené zobrazení **je parametrizací** plochy Q a orientace plochy Q je nesouhlasná s touto parametrizací, protože $\vec{n}_Q = (-1, 0, 0) = -(P_u \times P_v)$. ■

***Příklad* 593**. $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z = x^2 + y^2,\ y \ge 0,\ z \le 1\}$, $\quad \vec{n}_Q([0, 0, 0]) = (0, 0, -1)$

Řešení :



Jde o část pláště rotačního paraboloidu

$$\text{a) } Q : \begin{cases} x = v\cos u \\ y = v\sin u \\ z = v^2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} u \in \langle 0, \pi\rangle, \\ v \in \langle 0, 1\rangle \end{array}$$

$$\text{b) } Q : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases} \quad u^2 + v^2 \le 1,\ v \ge 0$$

Navrhneme zobrazení:

a) $P(u,v) = [v\cos u,\ v\sin u, v^2], \quad [u,v] \in B = \langle 0,\pi\rangle \times \langle 0,1\rangle,$
$P_u(u,v) = (-v\sin u,\ v\cos u,\ 0) \quad P_v(u,v) = (\cos u,\ \sin u,\ 2v)$
$$\vec{n} = P_u \times P_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -v\sin u & v\cos u & 0 \\ \cos u & \sin u & 2v \end{vmatrix} = (2v^2\cos u, 2v^2\sin u, -v)$$
$\vec{n} = \vec{0}$ pro $v = 0 \quad \Rightarrow \quad$ zobrazení není podle definice parametrizací plochy Q.
Kromě toho na hranici množiny B není uvažované zobrazení prosté.

Poznámka: Protože však zobrazení nesplňuje podmínky definice parametrizace jen na množině dvourozměrné míry 0, lze ho použít pro výpočet plošného integrálu.

b) $P(u,v) = [u,\ v,\ u^2+v^2], \quad B = \{[u,v] \in \mathbb{E}_2;\ u^2+v^2 \le 1, v \ge 0\},$
$P_u(u,v) = (1,\ 0,\ 2u), \quad P_v(u,v) = (0,\ 1,\ 2v)$
$$\vec{n} = P_u \times P_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (-2u,-2v,1) \ne \vec{0} \text{ v celém } B$$
$$\vec{n}^o = \frac{(-2u,-2v,1)}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}},\ \vec{n}^o([0,0,0]) = \vec{n}^o(u=v=0) = (0,0,1).$$
Navržené zobrazení je parametrizací. Plocha Q je nesouhlasně orientovaná s touto parametrizací, protože $\vec{n}^o = -\vec{n}_Q$. ■

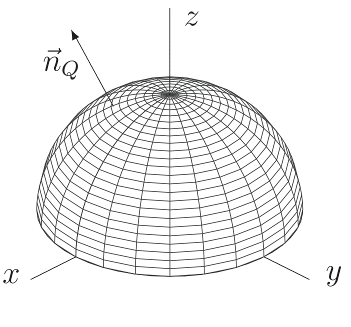
Příklad* 594. Je dána polovina kulové plochy $Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3; x^2+y^2+z^2 = a^2,$ $z \ge 0,\ a > 0,\}$ orientovaná normálovým vektorem $\vec{n} = (n_1,n_2,n_3)$, kde $n_3 \ge 0$. Rozhodněte, která ze zadaných zobrazení $P(u,v)$ jsou parametrizacemi plochy Q.

a) $P(u,v) = \left[u, v, \sqrt{a^2-u^2-v^2}\right]$, kde $[u,v] \in B = \{[u,v] \in \mathbb{E}_2;\ u^2+v^2 \le a^2\}$,

b) $P(u,v) = \left[\dfrac{2a^2u}{a^2+u^2+v^2}, \dfrac{2a^2v}{a^2+u^2+v^2}, \dfrac{2a^3}{a^2+u^2+v^2} - a\right]$, kde $[u,v] \in B$,
$B = \{[u,v] \in \mathbb{E}_2;\ u^2+v^2 \ \le\ a^2\}$,

c) $P(u,v) = [a\cos u\cos v, a\sin u\cos v, a\sin v]$, kde $[u,v] \in B = \langle 0,2\pi\rangle \times \left\langle 0, \dfrac{\pi}{2}\right\rangle$. ■

Řešení :



Dosazením se můžeme snadno přesvědčit, že ve všech případech platí rovnice
$$x^2+y^2+z^2 = a^2.$$

a) Funkce $P_u = \left(1, 0, \dfrac{-u}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}\right), P_v = \left(0, 1, \dfrac{-v}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}\right)$ neexistují na hranici Γ_B. Z toho vyplývá, že dané zobrazení není parametrizací.

b) $P(u,v)$ je spojité, prosté zobrazení v B. Snadno se přesvědčíme, že na B skutečně vychází $z \ge 0$:

$z = \dfrac{2a^3}{a^2+u^2+v^2} - a = \dfrac{a(a^2-u^2-v^2)}{a^2+u^2+v^2}$,
$B = \{[u,v] \in \mathbb{E}_2;\ u^2+v^2 \le a^2 \quad \Longrightarrow \quad a^2-u^2-v^2 \ge 0 \quad \Longrightarrow \quad z \ge 0.$
Spočítáme tečné vektory P_u, P_v a normálový vektor vyplývající z parametrizace P

$$\vec{n} = P_u \times P_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{2a^2(a^2-u^2+v^2)}{(a^2+u^2+v^2)^2} & \frac{-4a^2uv}{(a^2+u^2+v^2)^2} & \frac{-6a^3u}{(a^2+u^2+v^2)^2} \\ \frac{-4a^2uv}{(a^2+u^2+v^2)^2} & \frac{2a^2(a^2+u^2-v^2)}{(a^2+u^2+v^2)^2} & \frac{-6a^3v}{(a^2+u^2+v^2)^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{4a^4}{(a^2+u^2+v^2)^4}\Big(3au(a^2+u^2+v^2),\ 3av(a^2+u^2+v^2),\ a^4-(u^2+v^2)^2\Big) \ne \vec{0}$$

pro všechna $u^2+v^2 \le a^2$; $n_3 = a^4-(u^2+v^2)^2 \ge 0$.
Dané zobrazení je parametrizací plochy Q . Orientace plochy je souhlasná s danou parametrizací.

c) Zobrazení vychází z popisu kulové plochy ve sférických souřadnicích. Víme, že toto zobrazení je prosté a spojité pro $u \in \langle 0, 2\pi)$ a $v \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right)$. Navíc jeho parciální derivace P_u a P_v jsou spojité všude v $\mathbb{E}_2$ a

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin u\cos v & a\cos u\cos v & 0 \\ -a\cos u\sin v & -a\sin u\sin v & a\cos v \end{vmatrix} = (a^2\cos u\cos^2 v, a^2\sin u\cos^2 v, a^2\sin v\cos v),$$

$|\vec{n}| = a^2\cos v \ne 0$ pro všechna $u \in \langle 0, 2\pi), v \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right)$. Na hranici množiny B, kde u je libovolné a $v = \frac{\pi}{2}$, je $\vec{n} = \vec{0}$ a na hranici Γ_B není zobrazení prosté. Z toho vyplývá, že dané zobrazení není parametrizací plochy Q.

■

595. Plocha $Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3; x^2+y^2 = 4, x \ge 0,\ z \in \langle 1,4\rangle\}$ je orientovaná tak, že vektor normály $\vec{n}_Q$ v libovolném bodě splňuje podmínku $\vec{n}_Q \cdot \vec{i} \ge 0$. a) Ověřte, že zobrazení $P(u,v) = [2\cos u, 2\sin u, v], [u,v] \in B, B = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle \times \langle 1,4\rangle$ je parametrizací plochy Q a rozhodněte o orientaci plochy vzhledem k této parametrizaci. b) Zdůvodněte, proč zobrazení $P(u,v) = \left[\sqrt{4-u^2}, u, v\right]$, $[u,v] \in B = \langle -2,2\rangle \times \langle 1,4\rangle$ není parametrizací plochy Q.

[a) orientace plochy Q je souhlasná s parametrizací ,
b) P_u je nespojité v nekonečném počtu bodů množiny B.]

• Navrhněte parametrizaci plochy Q, jejíž orientace je určena normálovým vektorem $\vec{n}_Q$. Zjistěte, zda plocha Q je orientována souhlasně či nesouhlasně s navrženou parametrizací :

596. $Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3; x^2+y^2 = 4, x \ge 0,\ 0 \le z \le 4\}$, $\quad \vec{n}_Q([2,0,2]) = (1,0,0)$

[$P(u,v) = [2\cos u,\ 2\sin u,\ v]$
$[u,v] \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle \times \langle 0,4\rangle$
orientace plochy Q je souhlasná s parametrizací]

597. $Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3; z = xy,\ x^2+y^2 \le a^2,\ a > 0\}$, $\quad \vec{n}_Q \cdot \vec{k} > 0$

[$P(u,v) = [v\cos u,\ v\sin u,\ v^2\sin u\cos u]$
$[u,v] \in \langle 0, 2\pi) \times \langle 0, a\rangle$
zobrazení není parametrizací]

598. $Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\, \dfrac{(y-1)^2}{4} + z^2 = 1,\ x \in \langle -1, 3\rangle, z > 0\},\ \vec{n}_Q([0,0,1]) = (0,0,-1)$

$$\left[\begin{array}{c} P(u,v) = [v,\, 1+2\cos u,\, \sin u] \\ [u,v] \in \langle 0, \pi\rangle \times \langle -1, 3\rangle \\ \text{orientace plochy } Q \text{ je souhlasná s parametrizací} \end{array}\right]$$

599. $Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3; 2x+3y+z = 6,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\},\ \vec{n}_Q = (n_1, n_2, n_3),\ n_1 > 0$

$$\left[\begin{array}{c} P(u,v) = [u,\, v,\, 6-2u-3v] \\ 0 \le u \le 3,\, 0 \le v \le 6-2u \\ \text{orientace plochy } Q \text{ je souhlasná s parametrizací} \end{array}\right]$$

V.2. Plošný integrál skalární funkce

Nechť Q je jednoduchá hladká plocha v $\mathbb{E}_3$ s parametrizací $X = P(u,v)$, $[u,v] \in B \subset \mathbb{E}_2$. Nechť f je skalární funkce definovaná a omezená na ploše Q. Jestliže dvojný integrál $\iint_B f\Big(P(u,v)\Big)\|P_u(u,v) \times P_v(u,v)\|\, du\, dv$ existuje, pak pokládáme

$$\iint_Q f\, dp = \iint_B f\Big(P(u,v)\Big)\|P_u(u,v) \times P_v(u,v)\|\, du\, dv$$

říkáme, že f je **integrovatelná** *na Q.*

Je-li plocha $Q \subset \mathbb{E}_3$ jednoduchá po částech hladká, $Q = \bigcup_{i=1}^{k} Q_i$ jednoduchých hladkých ploch $Q_1, \dots, Q_k$ a f je funkce integrovatelná na každé ploše $Q_i, 1 \le i \le k$, pak je

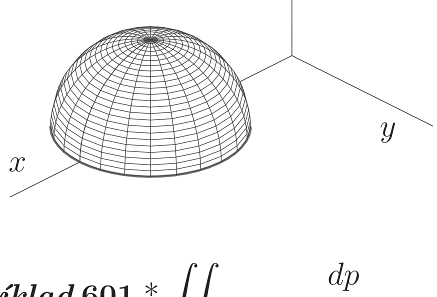
$$\iint_Q f\, dp = \sum_{i=1}^{k} \iint_{Q_i} f\, dp.$$

Poznámka : Víme, že ani existence ani hodnota dvojného integrálu $\iint_B f\, du\, dv$ nezávisí na "chování"funkce f na množině míry 0. Z toho plyne, že lze počítat $\iint_Q f\, dp$ použitím zobrazení $P(u,v)$, které sice (striktně vzato) není parametrizací plochy Q, ale požadované podmínky na parametrizaci jsou porušeny pouze na množině míry 0 v B.

• Rozhodněte o existenci plošného integrálu a pokud integrál existuje, tak jej vypočítejte.

***Příklad* 600**. $\displaystyle\iint_Q \frac{xy\ln|x|}{z}\, dp$, kde $\quad Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3; (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1, z \ge 0\}$

Řešení :



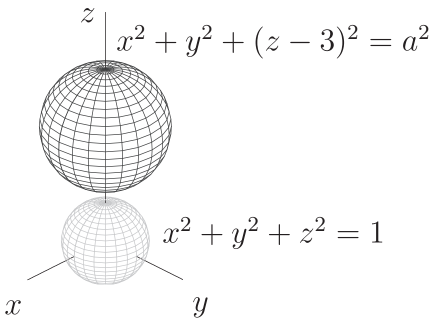
Integrál neexistuje, neboť funkce

$$f(x,y,z) = \frac{xy\ln|x|}{z}$$

není definovaná pro $z = 0$ a není omezená v žádném okolí bodů s nulovou z-tovou souřadnicí. ■

***Příklad* 601**.* $\displaystyle\iint_Q \frac{dp}{x^2+y^2+z^2-1}$, $\quad Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3; x^2+y^2+(z-3)^2 = a^2,\ a > 0\}$

Řešení : Pro existenci integrálu je postačující spojitost integrované funkce na ploše Q.
Tato podmínka je splněna vždy, když Q je disjunktní s kulovou plochou $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, což platí pro $a \in (0, 2) \cup (4, \infty)$.
Naopak, pro $a \in \langle 2, 4\rangle$, integrál neexistuje, protože funkce f není na ploše Q omezená.



Q je kulová plocha se středem $[0, 0, 3]$ a poloměrem a, můžeme ji popsat pomocí sférických souřadnic, kde poloměr je roven a.

$$Q : \begin{cases} x = a\cos u \cos v \\ y = a \sin u \cos v \\ z = 3 + a \sin v \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u \in \langle 0, 2\pi\rangle \\ v \in \left\langle -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right\rangle \end{array}$$

Parametrizace kulové plochy Q:

$$\begin{array}{ll} P(u,v) = [a\cos u\cos v,\ a\sin u\cos v,\ 3 + a\sin v] & B = \left\{[u,v] \in \mathbb{E}_2;\ u \in \langle 0, 2\pi\rangle,\ v \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle\right\} \\ P_u(u,v) = (-a\sin u\cos v,\ a\cos u\cos v,\ 0) & P_u \times P_v = (a^2\cos u\cos^2 v,\ a^2\sin u\cos^2 v,\ a^2\sin v\cos v) \\ P_v(u,v) = (-a\cos u\sin v,\ -a\sin u\sin v,\ a\cos v) & \|P_u \times P_v\| = a^2\cos v \end{array}$$

$$\frac{1}{x^2+y^2+z^2-1} = \frac{1}{a^2\cos^2 u\cos^2 v + a^2\sin^2 u\cos^2 v + (3+a\sin v)^2 - 1} = $$
$$= \frac{1}{a^2 + 8 + 6a\sin v}$$

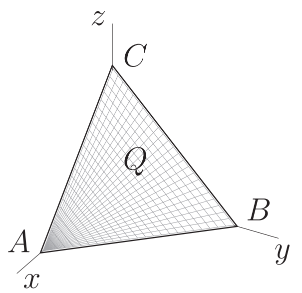
$$\iint_Q f\,dp = \iint_B f\big(P(u,v)\big)\,\|P_u \times P_v\|\,du\,dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi} \frac{a^2\cos v}{a^2+8+6a\sin v}\,du\right)dv =$$
$$= 2\pi\cdot\frac{a^2}{6a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{6a\cos v}{a^2+8+6a\sin v}\,dv = \frac{\pi a}{3}\Big[\ln|a^2+8+6a\sin v|\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a}{3}\ln\left|\frac{a^2+8+6a}{a^2+8-6a}\right|.$$

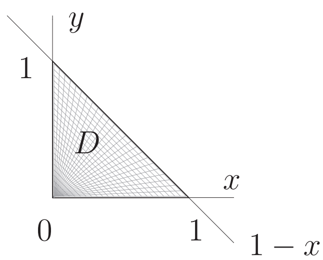
■

• Vypočítejte integrály na ploše $Q \subset \mathbb{E}_3$:

***Příklad* 602**. $\displaystyle\iint_Q xz\,dp$, $\quad Q$ je $\triangle ABC$, kde $A = [1, 0, 0]$, $B = [0, 1, 0]$ a $C = [0, 0, 1]$

Řešení : Q je část roviny $x + y + z = 1$. Průmětem trojúhelníka $\triangle ABC$ do roviny (xy) je trojúhelník D omezený přímkami $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.





$$D : \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1 - x \end{cases}$$

$$Q : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - u - v, \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} P(u,v) = [u,\ v,\ 1-u-v], & B = \left\{[u,v] \in \mathbb{E}_2; 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1-u\right\} \\ P_u = (1, 0, -1), & P_v = (0, 1, -1) \\ P_u \times P_v = (1, 1, 1), & \|P_u \times P_v\| = \sqrt{3} \end{array}$$

$$\iint_Q xz\,dp = \iint_B u\cdot(1-u-v)\cdot\sqrt{3}\,du\,dv = \sqrt{3}\cdot\int_0^1\Big(\int_0^{1-u} u(1-u-v)\,dv\Big)\,du =$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1\left(u(1-u)\Big[v\Big]_0^{1-u} - \frac{u}{2}\Big[v^2\Big]_0^{1-u}\right)du = \sqrt{3}\int_0^1\Big(u(1-u)^2 - \frac{u}{2}(1-u)^2\Big)\,du =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1 u(1-2u+u^2)\,du = \frac{\sqrt{3}}{2}\Big[\frac{u^2}{2} - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{24}.$$

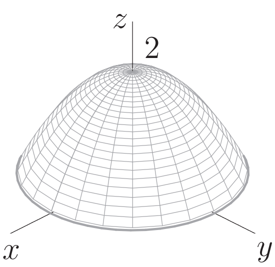
Poznámka : Vzhledem k tomu, že daná plocha Q je grafem funkce $z = g(x,y)$ dvou proměnných, můžeme nezávislé proměnné x, y považovat přímo za parametry $P(x,y) = [x,\ y,\ 1-x-y]$, kde $[x,y] \in D$. Pak tečné vektory jsou $P_x = (1,0,-1)$, $P_y = (0,1,-1)$ a normálový vektor je $P_x \times P_y = (1,1,1)$ a

$$\iint_Q xz\,dp = \iint_D x\cdot(1-x-y)\cdot\sqrt{3}\,dx\,dy = \cdots = \frac{\sqrt{3}}{24}$$

■

***Příklad* 603**. $\displaystyle\iint_Q \sqrt{x^2+y^2+1}\,dp, \qquad Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ 2z + x^2 + y^2 = 4,\ z \geq 0\}$

Řešení :



Q je část paraboloidu, který je grafem explicitně zadané funkce $z = 2 - \dfrac{x^2+y^2}{2}$

$$Q: \begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = 2 - \dfrac{x^2+y^2}{2}, \end{cases} \qquad x^2+y^2 \leq 4$$

$$\left|\begin{array}{ll} P(x,y) = \Big[x,\ y,\ 2 - \dfrac{x^2+y^2}{2}\Big], & B = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2+y^2 \leq 4\} \\ P_x = (1,0,-x), & P_y = (0,1,-y) \\ P_x \times P_y = (x,y,1), & \|P_x \times P_y\| = \sqrt{x^2+y^2+1} \end{array}\right|$$

$$\iint_Q \sqrt{x^2+y^2+1}\,dp = \iint_D \sqrt{x^2+y^2+1}\cdot\sqrt{x^2+y^2+1}\,dxdy =$$

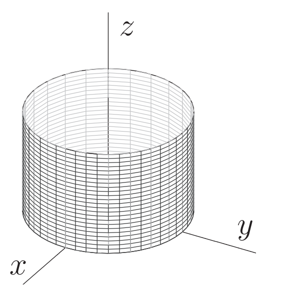
$$\iint_{x^2+y^2\leq 4} (x^2+y^2+1)\,dxdy = \text{(polární souřadnice)} = \left|\begin{array}{lcc} x = r\cos\varphi & & 0 \leq r \leq 2 \\ y = r\sin\varphi & | & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ J = r & & \end{array}\right| =$$

$$= \int_0^2\Big(\int_0^{2\pi}(r^2+1)\cdot r\,d\varphi\Big)\,dr = \Big[\varphi\Big]_0^{2\pi}\cdot\int_0^2 (r^3+r)\,dr = 2\pi\cdot\Big[\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2}\Big]_0^2 = 12\pi.$$

■

***Příklad* 604**. $\displaystyle\iint_Q xy\,dp, \qquad Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3; x^2+y^2 = 4, \quad 0 \leq z \leq 1\}$

Řešení :



Q je část válcové plochy s poloměrem $r = 2$. Vycházíme z cylindrických souřadnic.

$$Q: \begin{cases} x = 2\cos u \\ y = 2\sin u \\ z = v, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u \in \langle 0, 2\pi\rangle \\ v \in \langle 0, 1\rangle \end{array}$$

Integrál existuje, neboť funkce $f(x,y,z) = xy$ je spojitá na Q.

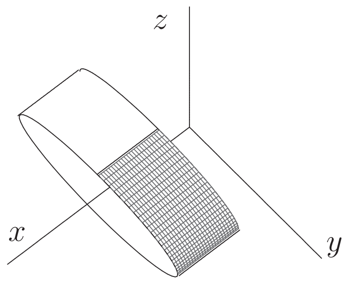
$$\left| \begin{array}{ll} P(u,v) = [2\cos u,\ 2\sin u,\ v], & B = \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0,1\rangle \\ P_u = (-2\sin u, 2\cos u, 0), & P_v = (0,0,1) \\ P_u \times P_v = (2\cos u, 2\sin u, 0), & \|P_u \times P_v\| = 2 \end{array} \right|$$

$$\iint_Q xy\,dp = \iint_B 2\cos u \cdot 2\sin u \cdot 2\,du\,dv = \int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} 4\sin u \cos u \cdot 2\,du \Big)\,dv =$$
$$= 8 \int_0^{2\pi} \sin u \cos u\,du \cdot \int_0^1 1\,dv = 8\Big[\frac{\sin^2 u}{2}\Big]_0^{2\pi} \cdot \Big[v\Big]_0^1 = 8 \cdot 0 \cdot 1 = 0.$$

■

Příklad* 605. $\displaystyle\iint_Q xyz\,dp, \quad Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3; y^2+9z^2 = 9, \quad 1 \le x \le 3,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$

Řešení :



Jde o část eliptické válcové plochy rovnoběžné s osou x a poloměrem $r = 3$.
Vycházíme ze zobecněných cylindrických souřadnic:

$$Q : \begin{cases} x = v & u \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \\ y = 3\cos u & \\ z = \sin u & v \in \langle 1,3 \rangle \end{cases}$$

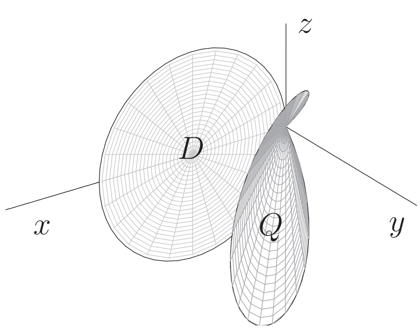
$$\left| \begin{array}{ll} P(u,v) = [v,\ 3\cos u,\ \sin u] & B = \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \times \langle 1,3\rangle \\ P_u = (0, -3\sin u, \cos u) & P_v = (1,0,0) \\ P_u \times P_v = (0, \cos u, 3\sin u) & \|P_u \times P_v\| = \sqrt{8\sin^2 u + 1} \end{array} \right|$$

$$\iint_Q xyz\,dp = \iint_B v \cdot 3\cos u \cdot \sin u \cdot \sqrt{8\sin^2 u + 1}\ du\,dv =$$
$$= 3\int_1^3 v\,dv \cdot \int_0^{\pi/2} \cos u \sin u \cdot \sqrt{8\sin^2 u + 1}\ du = \left| \begin{array}{c} 8\sin^2 u + 1 = t \\ 16 \sin u \cos u\,du = dt \\ t \in \langle 1,9 \rangle \end{array} \right| =$$
$$= 3\Big[\frac{v^2}{2}\Big]_1^3 \cdot \frac{1}{16}\int_1^9 \sqrt{t}\,dt = \frac{3}{2}(9-1) \cdot \frac{1}{16}\Big[\frac{2t^{3/2}}{3}\Big]_1^9 = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}(27-1) = 13.$$

■

Příklad* 606. $\displaystyle\iint_Q (xy+yz+xz)\,dp,\ Q : y = \sqrt{x^2+z^2}$, ležící uvnitř plochy $x^2+z^2 = 2x$.

Řešení :



Plocha Q je část pláště rotačního kužele
$$y = \sqrt{x^2+z^2},$$
(osa y je osou rotace), ležící uvnitř válcové plochy
$$x^2+z^2 = 2x.$$
Průmět plochy Q do roviny (xz) je kruh D
$$x^2+z^2 \le 2x \Longrightarrow (x-1)^2+z^2 \le 1$$
$$D = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3; (x-1)^2+z^2 \le 1, y = 0\}.$$

$$\left| \begin{array}{ll} P(u,v) = \big[u, \sqrt{u^2+v^2}, v\big], & B = \{[u,v] \in \mathbb{E}_2 : (u-1)^2 + v^2 \le 1\} \\ P_u = \Big(1, \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, 0\Big), & P_v = \Big(0, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1\Big) \\ P_u \times P_v = \Big(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, -1, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\Big) & \|P_u \times P_v\| = \sqrt{\frac{u^2}{u^2+v^2} + 1 + \frac{v^2}{u^2+v^2}} = \sqrt{2} \end{array} \right|$$

$$\iint_Q (xy+yz+xz)\,dp = \iint\limits_{(x-1)^2+z^2\le 1} \Big((x+z)\sqrt{x^2+z^2}+xz\Big)\sqrt{2}\,dx\,dz =$$

$$= \iint\limits_{(u-1)^2+v^2\le 1} \Big((u+v)\sqrt{u^2+v^2}+uv\Big)\sqrt{2}\,du\,dv = \left| \begin{array}{lcc} u = r\cos\varphi & & 0\le r\le 2\cos\varphi \\ v = r\sin\varphi & | & -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \\ J = r & & \end{array} \right| =$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\varphi} \Big(r(\cos\varphi+\sin\varphi)\cdot r + r^2\sin\varphi\cos\varphi\Big) r\,dr \right) d\varphi =$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi+\sin\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)\cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi+\sin\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)\cdot 4\cos^4\varphi\,d\varphi =$$

$$= 4\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos^5\varphi + \underbrace{\sin\varphi\cos^4\varphi + \sin\varphi\cos^5\varphi}_{\text{liché funkce}}\Big)\,d\varphi = 4\sqrt{2}\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\,d\varphi + 0 + 0\right) =$$

$$(\text{ viz př. 21}) = 8\sqrt{2}\cdot\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}\cdot 1 = \frac{64\sqrt{2}}{15}.$$

■

• Vypočítejte integrály na ploše $Q \subset \mathbb{E}_3$:

607. $\iint_Q (x+y+z)\,dp, \quad Q = \{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3; x^2+y^2+z^2=a^2,\ z\ge 0,\ a>0\}$ $\quad [\pi a^3]$

608. $\iint_Q (x^2+y^2)\,dp, \quad Q = \left\{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3; z=\sqrt{x^2+y^2},\ 0\le z\le 1\right\}$ $\quad \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right]$

609. $\iint_Q x\,dp, \quad Q = \left\{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3; z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right\}$ $\quad [0]$

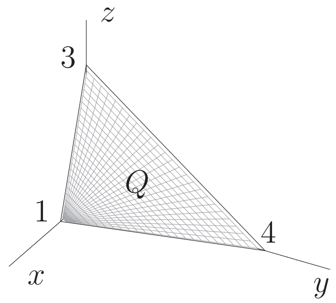
610. $\iint_Q z\,dp, \quad Q = \{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3; 2z=x^2+y^2,\ 0\le z\le 1\}$ $\quad \left[\frac{2}{15}\pi(1+6\sqrt{3})\right]$

V.3. Aplikace plošného integrálu skalární funkce

• Pomocí plošného integrálu vypočítejte obsah plochy $Q \subset \mathbb{E}_3$:

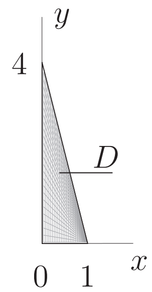
***Příklad* 611**. Q je část roviny $12x + 3y + 4z = 12$ ležící v prvním oktantu.

Řešení : $Q = \Big\{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3, z = \dfrac{12 - 12x - 3y}{4}, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\Big\}$



Průmětem plochy Q
do roviny $z = 0$
je množina D

$$D: \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 4 - 4x$$



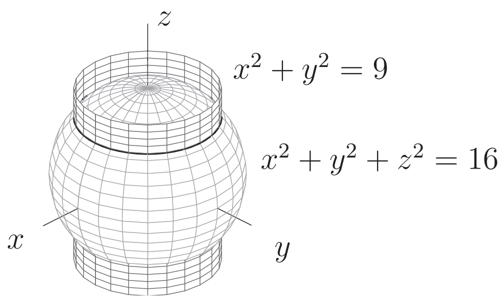
$$\left|\begin{array}{ll} P(x, y) = \Big[x, y, \dfrac{12 - 12x - 3y}{4}\Big] & B = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 4 - 4x\} \\ P_x = \Big(1, 0, 3\Big) & P_y = \Big(0, 1, -\dfrac{3}{4}\Big) \\ P_x \times P_y = \Big(-3, -\dfrac{3}{4}, -1\Big) & \|P_x \times P_y\| = \dfrac{13}{4} \end{array}\right|$$

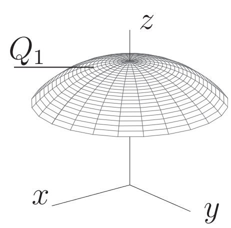
$$S = \iint_Q 1\, dp = \int_0^1 \Big(\int_0^{4-4x} \frac{13}{4}\, dy\Big)\, dx = \frac{13}{4} \int_0^1 (4 - 4x)\, dx = \frac{13}{4}(4 - 2) = \frac{13}{2}.$$

■

***Příklad* 612**. Q je část kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ ležící uvnitř válcové plochy $x^2 + y^2 = 9$.

Řešení : Plocha Q je složena ze dvou stejných částí $Q = Q_1 \cup Q_2$.





Omezíme se na $z \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad S = 2 \iint_{Q_1} 1\, dp$

$$\left|\begin{array}{ll} P(x, y) = [x, y, \sqrt{16 - x^2 - y^2}], & B = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \leq 9\} \\ P_x = \Big(1, 0, \dfrac{-x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}\Big), & P_y = \Big(0, 1, \dfrac{-y}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}\Big) \\ P_x \times P_y = \Big(\dfrac{x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}, 1\Big), & \|P_x \times P_y\| = \dfrac{4}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} \end{array}\right|$$

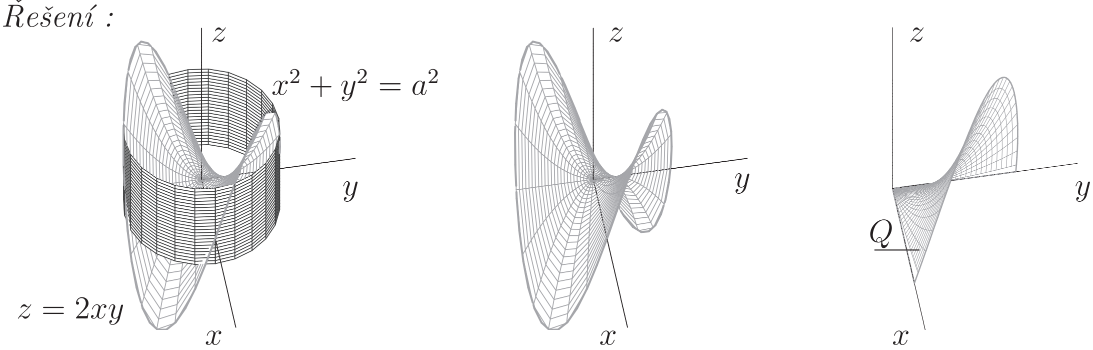
$$S = 2 \iint\limits_{x^2 + y^2 \leq 9} \frac{4\, dx\, dy}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} = \left|\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ J = r \end{array} \quad \Big| \quad \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array}\right| =$$

$$= 8\int_0^{2\pi}\int_0^3 \frac{r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{16-r^2}} = 8\cdot 2\pi\cdot\left[-\sqrt{16-r^2}\right]_0^3 = 16\pi(4-\sqrt{7}).$$

■

***Příklad* 613**. Q je část plochy $z = 2xy$ ležící v prvním oktantu uvnitř válcové plochy $x^2+y^2=a^2$.

Řešení :



$$\left|\begin{array}{ll} P(x,y) = [x,y,2xy], & B = \{[x,y]\in\mathbb{E}_2; x^2+y^2\le a^2\} \\ P_x = (1,0,2y), & P_y = (0,1,2x) \\ P_x\times P_y = (-2y,-2x,1), & \|P_x\times P_y\| = \sqrt{4y^2+4x^2+1} \end{array}\right|$$

$$S = \iint_Q 1\,dp = \iint_B \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy = \left|\begin{array}{ll} x = r\cos\varphi & 0\le r\le a \\ y = r\sin\varphi & 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \\ J = r & \end{array}\right| =$$

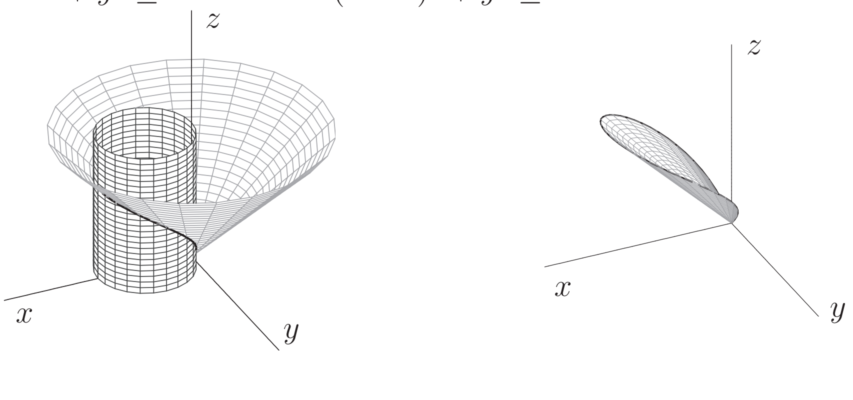
$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^a \sqrt{1+4r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{8}\int_0^a\sqrt{1+4r^2}\cdot 8r\,dr = \frac{\pi}{16}\left[\frac{2(1+4r^2)^{3/2}}{3}\right]_0^a =$$

$$= \frac{\pi}{24}\Big((1+4a^2)\sqrt{1+4a^2}-1\Big).$$

■

***Příklad* 614**. Q je část kuželové plochy $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ležící uvnitř válcové plochy $x^2+y^2=2x$.

Řešení : $x^2+y^2\le 2x \implies (x-1)^2+y^2\le 1$



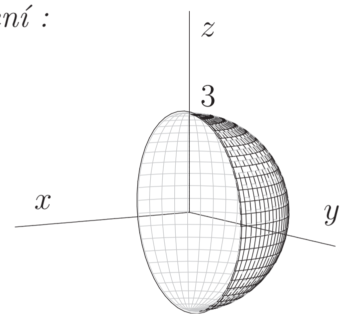
$$\left|\begin{array}{ll} P(x,y) = [x,y,\sqrt{x^2+y^2}], & B = \{[x,y]\in\mathbb{E}_2; (x-1)^2+y^2\le 1\} \\ P_x = \Big(1,0,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big), & P_y = \Big(0,1,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big) \\ P_x\times P_y = \Big(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\Big), & \|P_x\times P_y\| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}+1} = \sqrt{2} \end{array}\right|$$

$$S = \iint_Q 1\,dp = \sqrt{2}\iint_{(x-1)^2+y^2\le 1} dx\,dy = \text{(integrál se rovná obsahu kruhu o poloměru 1)} = \sqrt{2}\cdot\pi\cdot 1^2$$

■

***Příklad* 615**. Stanovte hmotnost plochy $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ x \le 0\}$, je-li hustota $\varrho(x, y, z) = \dfrac{1}{z^2 + 9}$.

Řešení :



$$Q: \begin{cases} x = 3\cos u \cos v \\ y = 3 \sin u \cos v \\ z = 3 \sin v \end{cases} \qquad u \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle \quad v \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$\left| \begin{array}{ll} P(u, v) = [3\cos u \cos v, 3 \sin u \cos v, 3 \sin v] & B = \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle \times \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \\ P_u = (-3 \sin u \cos v,\ 3 \cos u \cos v,\ 0) & P_v = (-3 \cos u \sin v,\ -3 \sin u \sin v,\ 3 \cos v) \\ P_u \times P_v = (9 \cos u \cos^2 v,\ 9 \sin u \cos^2 v,\ 9 \sin v \cos v) & \|P_u \times P_v\| = 9 \cos v \end{array} \right|$$

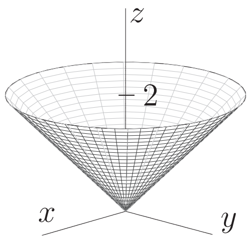
$$m = \iint_Q \varrho(x, y, z)\, dp = \iint_Q \frac{1}{z^2 + 9}\, dp = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big(\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{9 \cos v}{9 \sin^2 v + 9}\, du \Big)\, dv =$$

$$= \pi \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos v}{\sin^2 v + 1}\, dv = \left| \begin{array}{c} \sin v = t \\ \cos v\, dv = dt \end{array} \right| = \pi \cdot \int_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2 + 1} = \pi \cdot \Big[\operatorname{arctg} t \Big]_{-1}^{1} = \pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

■

***Příklad* 616**. Stanovte moment setrvačnosti vzhledem k ose z plochy $Q = \Big\{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ 0 \le z \le 2\Big\}$, je-li hustota konstantní ($\varrho(x, y, z) = k$).

Řešení :



$$Q: \begin{cases} x = v \cos u \\ y = v \sin u \\ z = v \end{cases} \qquad u \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad v \in \langle 0, 2 \rangle$$

$$\left| \begin{array}{ll} P(u, v) = [v \cos u, v \sin u, v] & B = \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, 2 \rangle \\ P_u = (-v \sin u,\ v \cos u,\ 0) & P_v = (\cos u,\ \sin u,\ 1) \\ P_u \times P_v = (v \cos u,\ v \sin u,\ -v) & \|P_u \times P_v\| = v\sqrt{2} \end{array} \right|$$

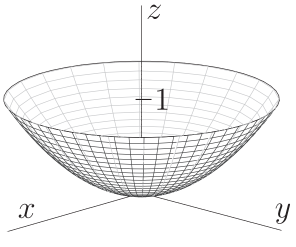
$$J_z = \iint_Q (x^2 + y^2) \varrho(x, y, z)\, dp = \iint_B v^2 \cdot k \cdot v\sqrt{2}\, du dv = \sqrt{2}\, k \int_0^2 \int_0^{2\pi} v^3\, du\, dv =$$

$$= \sqrt{2}\, k \cdot 2\pi \left[\frac{v^4}{4} \right]_0^2 = 8\sqrt{2}\, k\pi.$$

■

***Příklad* 617**. Najděte těžiště části paraboloidu $x^2 + y^2 = 2z$ omezené rovinou $z = 1$, s hustotou $\varrho(x, y, z) = 1$.

Řešení :



Těžiště bude na ose rotace z, tj. $T = [0, 0, z_T]$, $z_T = \frac{M_{xy}}{m}$,

$$Q: \begin{cases} x = v \cos u \\ y = v \sin u \\ z = \dfrac{v^2}{2} \end{cases} \qquad u \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad v \in \langle 0, \sqrt{2} \rangle$$

$$\left|\begin{array}{ll} P(u,v) = [v\cos u, v\sin u, v^2/2] & B = \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, \sqrt{2}\rangle \\ P_u = (-v\sin u,\ v\cos u,\ 0) & P_v = (\cos u,\ \sin u,\ v) \\ P_u \times P_v = (v^2\cos u,\ v^2\sin u,\ -v) & \|P_u \times P_v\| = v\sqrt{1+v^2} \end{array}\right|$$

$$m = \iint_Q \varrho\, dp = \int_0^{\sqrt{2}} \Big(\int_0^{2\pi} 1 \cdot v\sqrt{1+v^2}\, du \Big) dv = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \left(1+v^2\right)^{1/2} \cdot 2v\, dv =$$

$$= \pi \Big[\frac{2(1+v^2)^{3/2}}{3} \Big]_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{3}(3\sqrt{3}-1),$$

$$M_{xy} = \iint_Q z\varrho\, dp = \int_0^{\sqrt{2}} \Big(\int_0^{2\pi} \frac{v^2}{2} \cdot 1 \cdot v\sqrt{1+v^2}\, du \Big) dv =$$

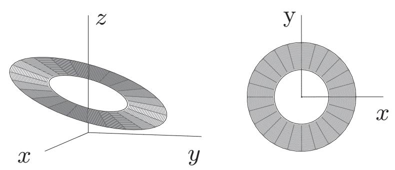
$$= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \Big(\int_0^{2\pi} v^2\sqrt{1+v^2} \cdot v\, du \Big)\, dv = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\sqrt{2}} v^2\sqrt{1+v^2} \cdot v\, dv = \left[\begin{array}{c} 1+v^2 = t^2 \\ 2v\, dv = 2t\, dt \\ t \in \langle 1, \sqrt{3}\rangle \end{array} \right] =$$

$$= \pi \cdot \int_1^{\sqrt{3}} (t^2-1)t^2\, dt = \pi \Big[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \Big]_1^{\sqrt{3}} = \pi \Big(\frac{9\sqrt{3}}{5} - \sqrt{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \Big) = \frac{2\pi}{15}(1+6\sqrt{3}),$$

$$z_T = \frac{2\pi(1+6\sqrt{3}) \cdot 3}{15 \cdot 2\pi(3\sqrt{3}-1)} = \frac{1+6\sqrt{3}}{5(3\sqrt{3}-1)} \qquad \boxed{T = \left[0, 0, \frac{1+6\sqrt{3}}{5(3\sqrt{3}-1)}\right]} \qquad \blacksquare$$

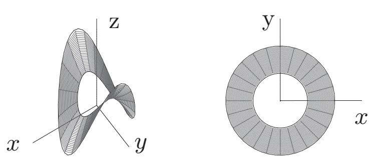
- Je dána plocha $Q \subset \mathbb{E}_3$.
  a) Načrtněte danou plochu Q a její průmět do roviny (xy).
  b) Navrhněte vhodnou parametrizaci plochy Q a vypočítejte délku vektoru kolmého k ploše Q při navržené parametrizaci.
  c) Určete plošný obsah dané plochy.

618. $Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x + 2y + z = 6,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$



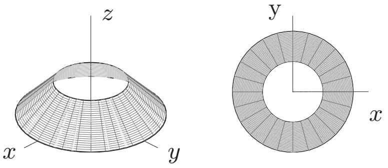
$$\left[\begin{array}{l} b)\ P(x,y) = [x, y, 6-x-2y], \\ \quad B = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2; 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\},\ \|\vec{n}\| = \sqrt{6} \\ c)\ 3\pi\sqrt{6} \end{array} \right]$$

619. $Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ z = y^2 - x^2,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$



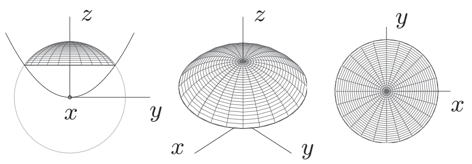
$$\left[\begin{array}{l} b)\ P(x,y) = [x, y, y^2-x^2], \\ \quad B = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2; 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\},\ \|\vec{n}\| = \sqrt{4x^2+4y^2+1} \\ c)\ \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}) \end{array} \right]$$

620. $Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ z = 4 - \sqrt{x^2+y^2},\quad 0 \leq z \leq 2\}$



$$\left[\begin{array}{l} b_1)\ P(x,y) = [x, y, 4-\sqrt{x^2+y^2}], \\ \quad B = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2; 4 \leq x^2+y^2 \leq 16\},\ \|\vec{n}\| = \sqrt{2} \\ b_2)\ P(u,v) = [v\cos u, v\sin u, 4-v], \\ \quad B = \{[u,v] \in \mathbb{E}_2; 0 \leq u \leq 2\pi,\ 2 \leq v \leq 4\},\ \|\vec{n}\| = v\sqrt{2} \\ c)\ 12\pi\sqrt{2} \end{array} \right]$$

621. Q je část kulové plochy $x^2+y^2+z^2=12$ ležící uvnitř paraboloidu $x^2+y^2=4z$.



$\left[\begin{array}{l} b)\ P(u,v)=[\sqrt{12}\cos u\cos v,\ \sqrt{12}\sin u\cos v,\ \sqrt{12}\sin v], \\ \quad B=\{[u,v]\in\mathbb{E}_2;0\le u\le 2\pi,\ \mathrm{arctg}(\sqrt{2}/2)\le v\le \pi/2\}, \\ \quad \|\vec{n}\|=\sqrt{12}\cos v \\ c)\ 8\pi(3-\sqrt{3}) \end{array}\right]$

• Určete plošný obsah plochy $Q\subset\mathbb{E}_3$:

622. $Q=\{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3;\ z=x^2+y^2,\quad x^2+y^2\le 1\}$ $\left[\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)\right]$

623. $Q:=\{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3;\ 3x+4y+z=1,\quad x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$ $\left[\frac{\sqrt{26}}{24}\right]$

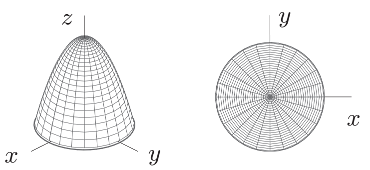
624. Q je část kuželové plochy $z=4\sqrt{x^2+y^2}$ vytínané rovinami $x=0,\ y=0,$ $2x+3y=6.$ $[3\sqrt{17}]$

625. Q je část roviny $2x+y-z=0$ ležící uvnitř eliptické válcové plochy $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1.$ $[12\sqrt{6}\pi]$

626. $Q=\{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3;\ x=u+v,\ y=u-v,\ z=4v,\ [u,v]\in\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle\}.$ $[6]$

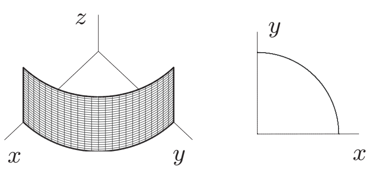
• Je dána plocha Q a plošná hustota $\varrho(x,y,z)$.
a) Načrtněte plochu Q a její průmět do roviny $z=0$.
b) Navrhněte vhodnou parametrizaci plochy Q, napište vektor kolmý k dané ploše a určete jeho délku při této parametrizaci.
c) Určete hmotnost plochy Q.

627. $Q=\{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3:\ z=4-x^2-y^2,\ z\ge 0\},\quad \varrho(x,y,z)=\sqrt{1+4(x^2+y^2)}.$



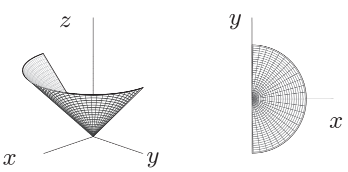
$\left[\begin{array}{l} b_1)\ P(x,y)=[x,y,4-x^2-y^2], \\ \quad B=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;x^2+y^2\le 4\}, \\ \quad \vec{n}=(2x,2y,1),\ \|\vec{n}\|=\sqrt{4x^2+4y^2+1} \\ b_2)\ P(u,v)=[v\cos u,v\sin u,4-v^2], \\ \quad B=\{[u,v]\in\mathbb{E}_2;0\le u\le 2\pi,\ 0\le v\le 2\}, \\ \quad \vec{n}=(2v^2\cos v,\ 2v^2\sin v,\ v),\ \|\vec{n}\|=v\sqrt{4v^2+1} \\ c)\ 36\pi \end{array}\right]$

628. $Q=\{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3:\ x^2+y^2=4,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\in\langle 0,3\rangle\},\ f(x,y,z)=xyz$



$\left[\begin{array}{l} b)\ P(u,v)=[2\cos u,2\sin u,v],\ B=\langle 0,\pi/2\rangle\times\langle 0,3\rangle \\ \quad \vec{n}=(2\cos u,2\sin u,0),\ \|\vec{n}\|=2 \\ c)\ 18 \end{array}\right]$

629. $Q=\{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3:\ z^2=x^2+y^2,\ x\ge 0,\ z\in\langle 0,1\rangle,\quad \varrho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$



$\left[\begin{array}{l} b_1)\ P(x,y)=[x,y,\sqrt{x^2+y^2}], \\ \quad B=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0\}, \\ \quad \vec{n}=\left(\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}},\dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right),\ \|\vec{n}\|=\sqrt{2} \\ b_2)\ P(u,v)=[v\cos u,v\sin u,v], \\ \quad B=\{[u,v]\in\mathbb{E}_2;-\pi/2\le u\le\pi/2,\ 0\le v\le 1\},\ \|\vec{n}\|=v\sqrt{2} \\ c)\ \sqrt{2}\pi/3 \end{array}\right]$

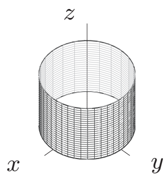
•Je dána plocha Q a skalární funkce f.

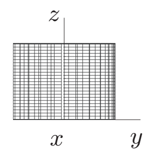
a) Načrtněte plochu Q a její průmět do roviny $x = 0$.

b) Vypočítejte $\displaystyle\iint_Q f\,dp$.

c) Napište, co by mohl vyjadřovat integrál z úlohy b).

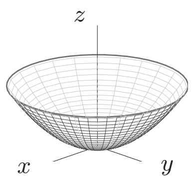
630. $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 :\ x^2 + y^2 = 4,\ x \geq 0,\ z \in \langle 0, 3\rangle\}, \quad \varrho(x, y, z) = xy^2.$

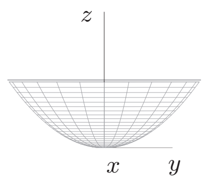




[*b)* 0
c) m při hustotě $\varrho = xy^2$
M_{yz} při hustotě $\varrho = y^2$]

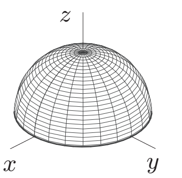
631. $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 :\ z = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2),\ z \in \langle 0, 1\rangle, \quad f(x, y, z) = kz,\ k > 0$

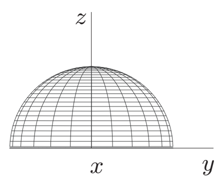




[*b)* $2\pi(1 + 6\sqrt{6})k/15$
c) m při hustotě $\varrho = kz$
M_{xy} při hustotě $\varrho = k$]

632. $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 :\ z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2$





[*b)* 108π
c) m při hustotě $\varrho = x^2 + y^2$
J_z při hustotě $\varrho = 1$]

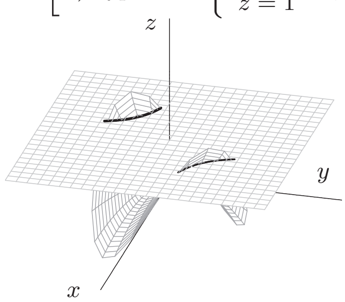
633. Je dána plocha $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 :\ z = xy, x^2 + y^2 \leq 3\}$.

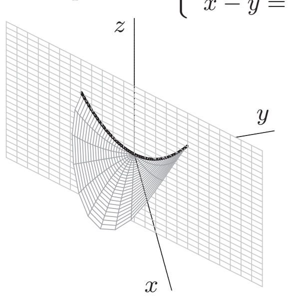
a) Do tří samostatných obrázků načrtněte křivky, které vzniknou řezem grafu funkce $z = xy$ rovinou $z = 1$, rovinou $x - y = 0$ a rovinou $x + y = 0$.

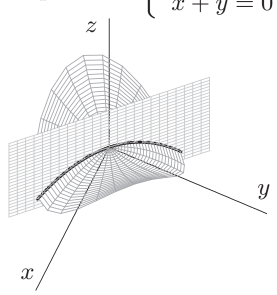
b) Navrhněte vhodnou parametrizaci plochy Q. Napište vektor kolmý k ploše Q a vypočítejte jeho délku (při této parametrizaci).

c) Určete plošný obsah plochy Q.

[*a)* hyperbola $\begin{cases} xy = 1 \\ z = 1 \end{cases}$, parabola $\begin{cases} z = x^2 \\ x - y = 0 \end{cases}$, parabola $\begin{cases} z = -x^2 \\ x + y = 0 \end{cases}$]







[*b)* $P(x, y) = [x, y, xy]$, $B = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \leq 3\}$,
$\vec{n} = (-y, -x, 1)$, $\|\vec{n}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$
c) $14\pi/3$]

634. Vypočtěte hmotnost plochy $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z \geq 0\ a > 0\}$ při plošné hustotě $\varrho(x, y, z) = z$. $[\pi a^3]$

635. Vypočtěte hmotnost plochy $Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x+y+z = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$ při plošné hustotě $\varrho(x,y,z) = \dfrac{1}{(1+x+y)^2}$. $\left[\sqrt{3}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)\right]$

636. Vypočtěte těžiště části kuželové plochy $z = \sqrt{x^2+y^2}$ vyříznuté válcovou plochou $x^2+y^2 = ax,\ (a > 0)$, je-li hustota konstantní $\varrho(x,y,z) = k$. $\left[T = \left[\frac{a}{2}, 0, \frac{16a}{9\pi}\right]\right]$

637. Vypočtěte těžiště plochy $Q = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x = \sqrt{y^2+z^2},\ y \geq 0,\ 0 \leq x \leq 2\right\}$ při plošné hustotě $\varrho(x,y,z) = x$. $\left[T = \left[\frac{3}{2}, \frac{3}{\pi}, 0\right]\right]$

638. Vypočtěte souřadnici y_T těžiště T plochy $Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2+z^2 = 4,\ x \geq 0,\ z \geq 0,\ y \in \langle 0, 3\rangle\}$ při plošné hustotě $\varrho(x,y,z) = xyz$. [2]

639. Vypočtěte statický moment vzhledem k ose rotace povrchu homogenní polokoule o poloměru R, $\varrho(x,y,z) = k$. $\left[\frac{\pi}{6}(3\pi+4)k\,R^3\right]$

640. Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose z homogenního trojúhelníka s vrcholy $[a,0,0],\ [0,a,0],\ [0,0,a]$ $(a > 0,\ \varrho(x,y,z) = k)$. $\left[\frac{\sqrt{3}}{6}\,a^4 k\right]$

641. Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose z homogenní plochy $Q = Q_1 \cup Q_2$, kde $Q_1 = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2+y^2 \leq 16,\ z = 0\}$, $Q_2 = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ z = 4 - \sqrt{x^2+y^2},\ z \geq 0\}$, $\varrho(x,y,z) = k$. $[128\,k\pi(1+\sqrt{2})]$

642. Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose z homogenní plochy $Q = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ z^2 = \dfrac{h^2}{a^2}(x^2+y^2),\ 0 \leq z \leq h\right\}$, $\varrho(x,y,z) = k$. $\left[\frac{\pi}{2}a^3 k\sqrt{a^2+h^2}\right]$