V.4. Plošný integrál vektorové funkce

Nechť Q je jednoduchá hladká plocha orientovaná v bodech $X \in Q$ jednotkovým vektorem normály $\vec{n}^o(X)$. Nechť $\vec{f}$ je vektorová funkce omezená na Q a nechť skalární funkce $\left(\vec{f} \cdot \vec{n}^o\right)$ je integrovatelná na ploše Q. Potom říkáme, že $\vec{f}$ je integrovatelná na Q a

$$\iint_Q \vec{f}(X) \cdot d\vec{p} = \iint_Q \Big(\vec{f}(X) \cdot \vec{n}^o(X)\Big)\, dp.$$

Je-li $X = P(u,v)$ parametrizace plochy Q definovaná na množině $B \subset \mathbb{E}_2$, pak plošný integrál vektorové funkce $\vec{f}$ lze přímo spočítat dle vzorce:

$$\iint_Q \vec{f}(X) \cdot d\vec{p} = \pm \iint_B \vec{f}\big(P(u,v)\big) \cdot \Big(P_u \times P_v\Big)\, du\, dv,$$

přičemž znaménko vybíráme podle toho, zda je plocha Q orientována souhlasně, resp. nesouhlasně, s parametrizací $P(u,v)$, tzn. je-li $\left(P_u \times P_v\right) \cdot \vec{n}^o\big(X\big) \gtrless 0$.

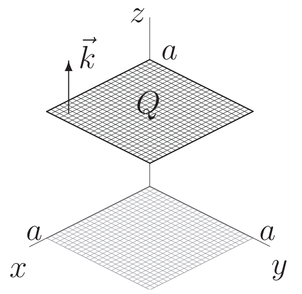
Poznámka : Někdy se používá i jiné značení : Je-li $\vec{f} = (U,V,W)$, pak plošný integrál vektorové funkce $\vec{f}$ se dá zapsat ve tvaru

$$\iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p} = \iint_Q U\, dy\, dz + V\, dx\, dz + W\, dx\, dy$$

• Vypočítejte dané plošné integrály $\displaystyle\iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p}$ na ploše $Q \subset \mathbb{E}_3$, která je orientována daným normálovým vektorem.

***Příklad* 643**. $\vec{f} = (x,y,z), \quad Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3\,;\ x \in \langle 0,\ a\rangle,\ y \in \langle 0,a\rangle,\ z = a,\ a > 0\}$ je orientována vektorem $\vec{k} = (0,0,1)$.

Řešení :



$$Q \left\{ \begin{array}{l} x = u, \\ y = v, \\ z = a, \end{array} \right. \qquad \begin{array}{c} u \in \langle 0,\ a\rangle \\ v \in \langle 0,a\rangle \end{array}$$

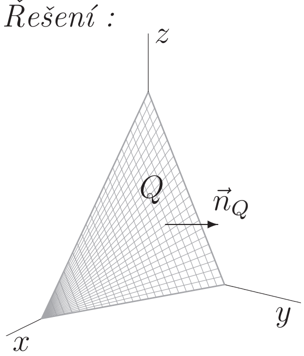
$P(u,v) = [u,v,a], \qquad B = \langle 0,a\rangle \times \langle 0,a\rangle$
$P_u \times P_v = (1,0,0) \times (0,1,0) = (0,0,1) \quad \Rightarrow \quad Q$ je orientovaná souhlasně s parametrizací

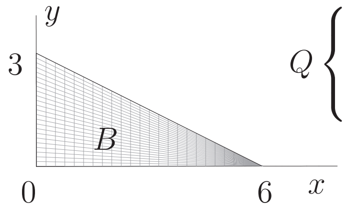
$$\iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p} = \iint_Q (x,y,z) \cdot d\vec{p} = \iint_B (u,v,a) \cdot \Big(P_u \times P_v\Big)\, du\, dv =$$
$$= \iint_B (u,v,a) \cdot (0,0,1)\, du\, dv = a \iint_B 1\, du\, dv = a \cdot a^2 = a^3.$$

■

***Příklad* 644**. $\vec{f} = (z,y,2x), \quad Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3\,;\ x + 2y + z = 6,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$, normálový vektor plochy Q svírá s vektorem $\vec{k} = (0,0,1)$ ostrý úhel.

Řešení :





$$Q\begin{cases} x = x, & x \in \langle 0,\ 6\rangle \\ y = y, & y \in \left\langle 0, 3 - \dfrac{x}{2}\right\rangle \\ z = 6 - x - 2y, & \end{cases}$$

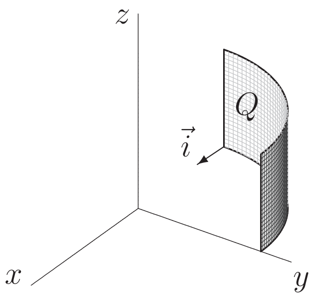
$P(x,y) = [x, y, 6 - x - 2y]$, $\quad B = \left\{[x,y] \in \mathbb{E}_2; 0 \le x \le 6,\ 0 \le y \le 3 - \dfrac{x}{2}\right\}$
$P_x \times P_y = (1,0,-1) \times (0,1,-2) = (1,2,1)$
vektor $(1,2,1)$ svírá s vektorem $\vec{k}$ ostrý úhel, tzn.$(1,2,1) \cdot \vec{k} > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow Q$ je orientovaná souhlasně s parametrizací

$$\iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p} = \iint_Q (z, y, 2x) \cdot d\vec{p} = \iint_B (6 - x - 2y,\ y,\ 2x) \cdot (1,2,1)\, dx\, dy =$$
$$= \iint_B (6 + x)\, dx\, dy = \int_0^6 (6 + x) \Big[y\Big]_0^{3 - x/2} dx = \int_0^6 \Big(18 - \frac{x^2}{2}\Big)\, dx = \Big[18x - \frac{x^3}{6}\Big]_0^6 = 72$$

■

***Příklad* 645**. $\vec{f} = (y, z, x^2)$, $Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2 + y^2 = 16,\ 0 \le z \le 3,\ x \le 0,\ y \ge 0\}$, plocha je v bodě $[-4, 0, 0]$ orientována normálovým vektorem $\vec{i} = (1, 0, 0)$.

Řešení :



Q je část válcové plochy $\Rightarrow$
použijeme cylindrické souřadnice, kde $r = 4$

$$Q\begin{cases} x = 4\cos u, & u \in \left\langle \dfrac{\pi}{2},\ \pi \right\rangle \\ y = 4 \sin u, & \\ z = v, & v \in \langle 0, 3\rangle \end{cases}$$

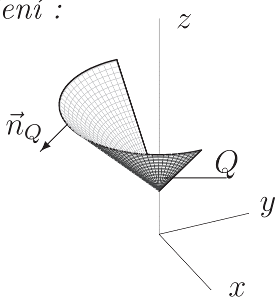
$P(u,v) = [4\cos u, 4 \sin u, v]$ $\qquad B = \left\langle \dfrac{\pi}{2}, \pi \right\rangle \times \langle 0, 3\rangle$
$P_u \times P_v = (-4\sin u, 4\cos u, 0) \times (0,0,1) = (4\cos u, 4\sin u, 0)$
$\vec{n}\big([-4,0,0]\big) = (4\cos\pi, 0, 0) = (-1, 0, 0) = -\vec{i} \quad \Rightarrow \quad Q$ je orientovaná nesouhlasně s parametrizací

$$\iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p} = -\iint_B \big(4 \sin u, v, 16\cos^2 u\big) \cdot \Big(P_u \times P_v\Big)\, du\, dv =$$
$$= -\iint_B \big(4 \sin u, v, 16 \cos^2 u\big) \cdot (4\cos u, 4 \sin u, 0)\, du\, dv =$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \Big(\int_0^3 \big(-8 \sin 2u - 4v \sin u\big)\, dv \Big)\, du = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \Big[\Big(-8v \sin 2u - 4\frac{v^2}{2} \sin u\Big)\Big]_0^3 du =$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -24 \sin 2u - 18 \sin u\, du = \Big[12 \cos 2u + 18 \cos u\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 12 - 18 + 12 = 6$$

■

***Příklad* 646**. $\vec{f} = (y, x, 2)$, $\quad Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0,\ y \le 0,$ $1 \le z \le 3\}, \vec{n}_Q$ svírá s vektorem $\vec{k} = (0,0,1)$ tupý úhel, tzn. $\vec{n}_Q \cdot \vec{k} < 0$.

Řešení :



$$x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0$$
$$z - 1 = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow z = 1 + \sqrt{x^2+y^2}$$

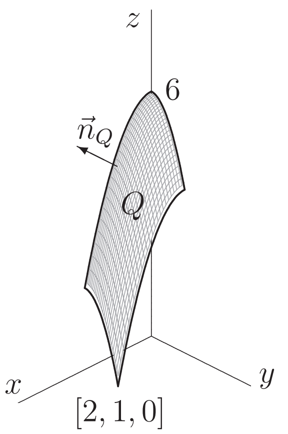
$$Q \begin{cases} x = v\cos u, \\ y = v \sin u, \\ z = 1 + v, \end{cases} \quad \begin{matrix} u \in \langle \pi, 2\pi \rangle \\ v \in \langle 0, 3 \rangle \end{matrix}$$

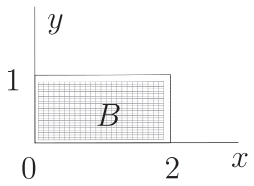
| $P(u,v) = [v\cos u, v\sin u, 1+v] \qquad B = \langle \pi, 2\pi\rangle \times \langle 0,3\rangle$
| $P_u \times P_v = (-v\sin u, v\cos u, 0) \times (\cos u, \sin u, 1) = (v\cos u, v\sin u, -v)$
| $(v\cos u, v\sin u, -v)\cdot(0,0,1) = -v < 0 \quad \Rightarrow \quad Q$ je orientovaná souhlasně s parametrizací

$$\iint_Q \vec{f}\cdot d\vec{p} = \iint_B (v\sin u, v\cos u, 2)\cdot\Big(P_u \times P_v\Big)\, du\, dv =$$
$$= \iint_B (v\sin u, v\cos u, 2)\cdot(v\cos u, v\sin u, -v)\, du\, dv = \iint_B (2v^2 \sin u \cos u - 2v)\, du\, dv =$$
$$= \int_\pi^{2\pi} \Big(\int_0^3 \big(v^2 \sin 2u - 2v\big)\, dv\Big)\, du = \int_\pi^{2\pi} \Big[\Big(\frac{v^3}{3}\sin 2u - v^2\Big)\Big]_0^3 du =$$
$$= \int_\pi^{2\pi} \Big[9\sin 2u - 9\Big]_0^3 du = 9\Big[-\frac{\cos 2u}{2} - u\Big]_\pi^{2\pi} = -9\pi \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 647**. $\vec{f} = (y, x, z), \quad Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3\,;\ z = 6 - x^2 - 2y^2,\ 0 \le x \le 2,$ $0 \le y \le 1,\ z \ge 0\}$, $\vec{n}_Q$ svírá s vektorem $\vec{k} = (0,0,1)$ ostrý úhel.

Řešení :





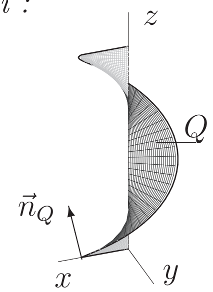
$$Q \begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = 6 - x^2 - 2y^2, \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in \langle 0, 2 \rangle \\ y \in \langle 0, 1 \rangle \end{matrix}$$

| $P(x,y) = [x, y, 6 - x^2 - 2y^2] \qquad B = \langle 0,2\rangle \times \langle 0,1\rangle$
| $P_x \times P_y = (1, 0, -2x) \times (0, 1, -4y) = (2x, 4y, 1)$
| $(2x, 4y, 1)\cdot(0,0,1) > 0 \quad \Rightarrow \quad Q$ je orientovaná souhlasně s parametrizací

$$\iint_Q \vec{f}\cdot d\vec{p} = \iint_B (y, x, 6 - x^2 - 2y^2)\cdot\Big(P_x \times P_y\Big)\, dx\, dy =$$
$$= \iint_B (y, x, 6 - x^2 - 2y^2)\cdot(2x, 4y, 1)\, dx\, dy = \int_0^2 \Big(\int_0^1 \big(6xy + 6 - x^2 - 2y^2\big)\, dy\Big)\, dx =$$
$$= \int_0^2 \Big[\Big(3x\frac{y^2}{2} + 6y - yx^2 - \frac{2}{3}y^3\Big)\Big]_0^1 dx = \int_0^2 \Big(3x + 6 - x^2 - \frac{2}{3}\Big)\, dx =$$
$$= \Big[\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{16}{3}x\Big]_0^2 = 14 \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 648**. $\vec{f} = \Big(xz^2, yz^2, (x^2+y^2)z\Big)$, $\quad Q: x = v\cos u,\ y = v\sin u,\ z = bu$ (**šroubová plocha**), $[u,v] \in \langle 0, a\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$ $(a > 0, b > 0)$, orientována normálovým vektorem $\vec{n}_Q = (n_1, n_2, n_3)$, kde $n_3 > 0$.

Řešení :



$P(u,v) = [v\cos u,\ v\sin u,\ bu]$	$B = \langle 0, a\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$
$P_u = (\cos u, \sin u, 0)$,	$P_v = (-v\sin u, v\cos u, b)$
$P_u \times P_v = (b\sin u, -b\cos u, v)$	
$v > 0 \implies$ orientace plochy je souhlasná s parametrizací	

$$\iint_Q \vec{f}\cdot d\vec{p} = \iint_Q \Big(xz^2, yz^2, (x^2+y^2)z\Big)\cdot d\vec{p} =$$

$$= \iint_B (b^2u^2v\cos u, b^2u^2v\sin u, buv^2)\cdot(b\sin u, -b\cos u, v)\,du\,dv =$$

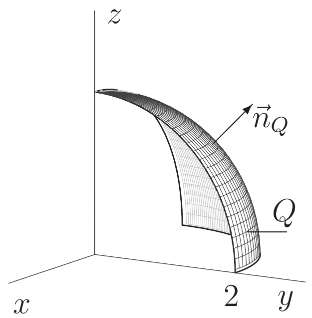
$$= \iint_B \Big(b^3vu^2\sin u\cos u - b^3vu^2\sin u\cos u + bv^3u\Big)\,du\,dv = \iint_B bv^3u\,du\,dv =$$

$$= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^a bv^3u\,dv\Big)\,du = b\Big[\frac{u^4}{4}\Big]_0^a\cdot\Big[\frac{u^2}{2}\Big]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\pi^2a^4b.$$

■

***Příklad* 649**.* Vypočítejte $\displaystyle\iint_Q z^2\,dx\,dy$, $\quad Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2+y^2+z^2 = 4,$ $x \le 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$, $\vec{n}_Q$ svírá s vektorem $\vec{k} = (0,0,1)$ ostrý úhel.

Řešení :



Q je část kulové plochy $\Rightarrow$
použijeme sférické souřadnice, kde $r = 2$:

$$Q\begin{cases} x = 2\cos u\cos v & \frac{\pi}{2} \le u \le \pi \\ y = 2\sin u\cos v & \\ z = 2\sin v & 0 \le v \le \frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$P(u,v) = [2\cos u\cos v,\ 2\sin u\cos v,\ 2\sin v]$	$B = \Big\langle\frac{\pi}{2}, 2\pi\Big\rangle \times \Big\langle 0, \frac{\pi}{2}\Big\rangle$
$P_u = (-2\sin u\cos v,\ 2\cos u\cos v,\ 0)$	$P_v = (-2\cos u\sin v,\ -2\sin u\sin v,\ 2\cos v)$
$P_u \times P_v = (4\cos u\cos^2 v,\ 4\sin u\cos^2 v,\ 4\sin v\cos v)$	Q je orientovaná souhlasně s parametrizací

$$\iint_Q z^2\,dx\,dy = \iint_Q \vec{f}\cdot d\vec{p} = \iint_Q (0,0,z^2)\cdot d\vec{p} =$$

$$= \iint_B (0,0,4\sin^2 v)\cdot(4\cos u\cos^2 v,\ 4\sin u\cos^2 v,\ 4\sin v\cos v) =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\sin^3 v\cos v\,du\,dv = 16\cdot\frac{\pi}{2}\Big[\frac{\sin^4 v}{4}\Big]_0^{\pi/2} = 2\pi.$$

■