IV. PLOŠNÉ INTEGRÁLY

1. Jednoduchá hladká plocha v $\mathbb{E}_3$
Parametrizace, orientace

2. Plošný integrál skalární funkce $\int\int_{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}$
(obsah, hmotnost, těžiště, momenty ...)

3. Plošný int. vektorové funkce $\int\int_{\boldsymbol{\sigma}} \overrightarrow{\boldsymbol{f}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$
(tok vektorového pole $\overrightarrow{\boldsymbol{f}}$ danou plochou $\boldsymbol{\sigma}$ daným směrem $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$)

4. Gaussova-Ostrogradského věta

výpočet toku uzavřenou plochou $\boldsymbol{\sigma}$ výpočtem

$$\int\int\int_{\mathrm{Int}\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{div}\,\overrightarrow{\boldsymbol{f}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Definice:

Jednoduchá hladká plocha v $\mathbb{E}_3$ je množina bodů tvaru $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, kde $\boldsymbol{P}$ je zobrazení množiny $\boldsymbol{B} \subset \mathbb{E}_2$ do $\mathbb{E}_3$:

a) $\boldsymbol{P}$ je spojité a prosté zobr.,

b) Parciální derivace $\boldsymbol{P_u}$, $\boldsymbol{P_v}$ jsou spojité a omezené v $\boldsymbol{B}$,

c) Vekt. součin $\boldsymbol{P_u} \times \boldsymbol{P_v} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{o}}$ v $\boldsymbol{B}$.

vlastnosti b), c) mohou být nesplněny v konečně mnoha bodech $\boldsymbol{\partial B}$, tj. hranice $\boldsymbol{B}$.

Zobr. $\boldsymbol{P}$ se nazývá parametrizace plochy

Plochy značíme např. $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{Q}, \ldots$

Okraj plochy je křivka v $\mathbb{E}_3$, která je obrazem hranice $\boldsymbol{\partial B}$.

Definice: Plošný integrál skalární funkce $\boldsymbol{f(x, y, z)}$ na ploše $\boldsymbol{\sigma}$ (též plošný integrál 1. druhu) tj. $\int\int_{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{f(X)}\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}$

je definován dvojným integrálem $\int\int_{B} \boldsymbol{f(P(u, v))} \|\boldsymbol{P_u} \times \boldsymbol{P_v}\|\, \mathrm{d}\boldsymbol{u}\mathrm{d}\boldsymbol{v}$,

pokud tento existuje.

Zde $\boldsymbol{\sigma}$ je jednoduchá hladká plocha v $\mathbb{E}_3$ s parametrizací

$\boldsymbol{X = P(u, v), [u, v] \in B}$.

Postač. podm. pro existenci: Fce $\boldsymbol{f}$ je spojitá na ploše $\boldsymbol{\sigma}$

Slabší podm.:
Fce $\boldsymbol{f}$ je spojitá a omezená na $(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{M})$, kde $\boldsymbol{M}$ je konečná mn.

NP pro existenci: Fce $\boldsymbol{f}$ je omezená na ploše $\boldsymbol{\sigma}$

Poznámka: Existence a hodnota nezávisí na volbě parametrizace $\boldsymbol{P}$.

Aplikace: obsah plochy, mechanické charakteristiky plochy

IV.4 Plošný integrál vektorové funkce (též plošný integrál 2. druhu)

Příklad. Objem tekutiny, která při rychlosti $\overrightarrow{v}$ proteče danou plochou $\boldsymbol{\sigma}$ daným směrem $\overrightarrow{n}$ za jednotku času

Předpoklady:

Nestlačitelná tekutina a stacionární proudění,
tj. rychlost $\overrightarrow{v}(x, y, z)$ nezávisí na čase

Definice:

Plošný integrál vektorové funkce $\overrightarrow{\boldsymbol{f}} = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$ na ploše $\boldsymbol{\sigma}$ orientované vektorem $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$, značíme $\int\int_{\boldsymbol{\sigma}} \overrightarrow{\boldsymbol{f}} \cdot \mathbf{d}\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$

je definován hodnotou plošného integrálu skalární funkce $\overrightarrow{\boldsymbol{f}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{n}}$, tj.

$$\int\int_{\sigma} \overrightarrow{\boldsymbol{f}} \cdot \mathbf{d}\overrightarrow{\boldsymbol{p}} = \int\int_{\sigma} (\overrightarrow{\boldsymbol{f}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{n}})\, \mathbf{d}\,\boldsymbol{p},$$

pokud tento existuje.

Název: Tok vekt. pole $\overrightarrow{\boldsymbol{f}}$ danou orientovanou plochou

V následujících úlohách

a) Načrtněte danou plochu a navrhněte její parametrizaci. Napište vektor kolmý k dané ploše (při této parametrizaci).

b) Řešte danou úlohu ...

Skalární funkce

1. a) $\boldsymbol{Q = \{[x, y, z];\ x^2 + y^2 = 16,\ 0 \leq z \leq 5,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}}$.

b) Vypočítejte plošný integrál $\int\int_Q \boldsymbol{z(x^2 + y^2)}\ \mathbf{d}\boldsymbol{p}$.

Co by mohl výsledek vyjadřovat ? $\left[\text{Výsl.:} 400\pi\right]$

2. a) $\boldsymbol{Q: \ z = \sqrt{x^2 + y^2};\ z \leq 6,\ x \geq 0}$

b) Vypočítejte plošný integrál $\int\int_Q \boldsymbol{xy^2z}\ \mathrm{d}\boldsymbol{p}$.
Co by mohl výsledek vyjadřovat ?

Vypočítejte obsah dané plochy.

a) $\boldsymbol{Q: \ z = x^2 + y^2;\ z \leq 9}$

b) $\boldsymbol{Q: \ z = y^2 - x^2;\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4}$

$\left[\text{Výsl.:} \pi\,(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})/6\right]$

V následujících úlohách

a) Načrtněte danou plochu (včetně orientace). Navrhněte její parametrizaci. Napište vektor kolmý k dané ploše (při této parametrizaci).

b) Určete tok daného vekt. pole $\vec{f}$ danou orientovanou plochou.

$\boxed{\textbf{1.}}$ $\boldsymbol{\sigma = \{[x, y, z] \in E_3\,;\; 2x + 2y + z = 6,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0}$. Orientace je dána normálovým vektorem $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, který má $n_3 < 0$.

$\boldsymbol{\vec{f} = (x, y^2, z)}$ [-63/2].

$\boxed{\textbf{2.}}$ $\boldsymbol{Q : x^2 + y^2 + z^2 = 10,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ \ z \geq 0\}}$. Orientace dána vektorem $\vec{n}[(0, 0, 10)] = \vec{k}$.

pole $\boldsymbol{\vec{f} = (x, y, z)}$.

$\boxed{\textbf{3.}}$ $\boldsymbol{\sigma = \{[x, y, z] \in E_3\,;\; z = x^2 + y^2,\; z \le 4\}}$.
Orientace dána vektorem $\vec{n}$, který svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ úhel tupý (též: $\vec{n} \cdot \vec{k} < 0$)

pole $\boldsymbol{\vec{f} = (0, y, 2z)}$.

$\boxed{\textbf{4.}}$ $\boldsymbol{\sigma\ :\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z \le 3}$, ve směru $\vec{n}$, kde $\vec{n}$ svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ úhel tupý.

pole $\boldsymbol{\vec{f} = (-x, -y, z^2)}$.

Věta Gaussova-Ostrogradského.

Nechť 1. Souřadnicové funkce U, V, W vektorového pole $\overrightarrow{f}$ mají spojité parc. derivace v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$.

2. Q je uzavřená po částech hladká plocha, vně orientovaná, která leží i se svým vnitřkem Int Q v D.

Pak platí

$$\iint_Q \overrightarrow{f}(X)\,\mathrm{d}\overrightarrow{p} =$$

$$\iiint_{IntQ} \operatorname{div} \overrightarrow{f}(X)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

! Poznámka: Je-li plocha orientovaná dovnitř, pak napravo přidáme znaménko mínus.

Předpoklady souhrnně:

$\boldsymbol{Q}$ je vně orientovaná uzavřená plocha
ležící se svým vnitřkem Int Q v oblasti $\boldsymbol{D} \subseteq \mathbb{E}_3$,
ve které jsou spojité PD vektorového pole $\overrightarrow{\boldsymbol{f}} = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$.

Poznámka:

Předpoklady vyžadují, aby se vše ”odehrávalo”v oblasti, v níž má dané vekt. pole spojité PD.

Věta Stokesova (IV.5.10.) Nechť

1. souřadnicové funkce U, V, W vekt. pole $\overrightarrow{f}$ mají spojité parc. derivace v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$.

2. σ je jednoduchá po č. hladká plocha v D, jejímž okrajem je uzavřená hladká křivka C.

3. Plocha $\boldsymbol{\sigma}$ je se svým okrajem C souhlasně orientovaná.

Pak platí

$$\oint_C \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s} = \iint_{\sigma} \operatorname{rot} \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{p}$$

Důsledek Je-li plocha $\boldsymbol{\sigma}$ uzavřená, pak její okraj je prázdná množina a proto

$$\iint_{\sigma} \operatorname{rot} \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{p} = 0$$