III. Diferenciální počet

Rozšířená mn. reálných čísel $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

množina $\mathbb{R}$ rozšířená o dva prvky značené $+\infty,\ -\infty,$ tzv. nevlastní body.

Aritmetické operace v množině $\mathbb{R}^*$

1. Pro každé $x \in \mathbb{R}$:

$$x + (+\infty) = +\infty, \quad x + (-\infty) = -\infty, \quad x - (+\infty) = -\infty,$$
$$x - (-\infty) = +\infty, \quad x/(+\infty) = x/(-\infty) = 0.$$

2. Pro každé $x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x > 0}$:

$$x \cdot (+\infty) = +\infty, \quad x \cdot (-\infty) = -\infty,$$
$$+\infty/x = +\infty, \quad (-\infty)/x = -\infty,$$

pro $\boldsymbol{x < 0}$ jsou opačná znaménka ve výsledku.

3. Operace mezi nevlastními body:

$$(+\infty) + (+\infty) = (+\infty) - (-\infty) = +\infty,$$
$$(-\infty) + (-\infty) = (-\infty) - (+\infty) = -\infty.$$

NEJSOU definovány tzv. neurčité výrazy:

$$(+\infty) - (+\infty), \qquad (-\infty) - (-\infty), \qquad (+\infty) + (-\infty),$$

$$0 \cdot (\pm\infty), \qquad 0/0, \qquad (\pm\infty)/(\pm\infty).$$

Výraz $x/0,\ x \in \mathbb{R}$ není jednoznačně definován, ale o jeho hodnotě můžeme v limitě rozhodnout ze znalosti znaménka výrazu ve jmenovateli v okolí vyšetřovaného bodu.

Posloupnosti

Definice Plst $\{a_n\}$ nazýváme

a) rostoucí, jestliže pro $\forall n \in N$: $\quad a_n < a_{n+1}$

b) klesající, jestliže pro $\forall n \in N$: $\quad a_n > a_{n+1}$

V těchto dvou případech mluvíme o plsti ryze monotónní.

c) neklesající, jestliže pro $\forall n \in N$: $\quad a_n \leq a_{n+1}$

d) nerostoucí, jestliže pro $\forall n \in N$: $\quad a_n \geq a_{n+1}$

V těchto dvou případech mluvíme o plsti monotónní.

Příklad. Vyšetřete monotónii plsti $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$

Definice Plst $\{a_n\}$ nazýváme

a) omezenou shora, existuje-li $K \in \mathbb{R}$ tak, že pro $\forall n \in N: \ a_n \leq K$

b) omezenou zdola, existuje-li $L \in \mathbb{R}$ tak, že pro $\forall n \in N: \ a_n \geq L$.

a)* Nejmenší z čísel s vlastností a) se nazývá supremum plsti $\{a_n\}$.
Je-li některý prvek a_n roven supremu, pak mluvíme o maximu plsti.
Používáme označení $\sup\{a_n\}$, resp. $\max\{a_n\}$.

b)* Největší z čísel s vlastností b) se nazývá infimum plsti $\{a_n\}$.
Je-li některý prvek a_n roven infimu, pak mluvíme o minimu plsti $\{a_n\}$.
Používáme označení $\inf\{a_n\}$, resp. $\min\{a_n\}$.

Příklad *. Dána plst $\{a_n\}$, kde $a_n = \dfrac{n}{n+1}$.
Určete její supremum a infimum. Existují hodnoty maxima a minima ?

Základní věty o limitě posloupnosti

Věta 1.6 Každá plst má nejvýše jednu limitu.

Věta 1.9 (limita vybrané posloupnosti) Má-li plst $\{a_n\}$ limitu a, pak jakákoliv vybraná plst má též limitu a.

Poznámka. Jestliže plst $\{a_n\}$ obsahuje dvě vybrané plsti s různou limitou, pak $\lim \{a_n\}$ neexistuje.

Příklad

Limity **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n$, **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n \dfrac{n}{n+1}$ neexistují,

ALE

Př. $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n \dfrac{1}{n} = 0.$

Věta 1.11 Nechť existují $\lim \boldsymbol{a_n = a}$, $\lim \boldsymbol{b_n = b}$.

Pak platí: $\lim \boldsymbol{a_n * b_n = a * b}$, pokud výraz $\boldsymbol{a * b}$ má smysl.

Symbol * znamená operaci z mn. $\{+, -, \times, /\}$, vždy je $n \to +\infty$

Další řešené příklady v textu Výpočet limity na této web stránce.

Př. 1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (n^3 - 1000n) = +\infty - (+\infty)$, tento výraz však není definován, Větu 1.11 nelze použít. Proto úprava

$$\lim_{n\to+\infty} (n^3 - 1000n) = \lim_{n\to+\infty} n^3 \left(1 - \frac{1000}{n^2}\right) = +\infty \cdot \left(1 - \frac{1000}{+\infty}\right) =$$

$$+\infty \cdot (1 - 0) = +\infty.$$

Př. 2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (1000n - n^3) = -\infty.$

Př. (důležitý) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$ $\quad P,\ Q$ jsou polynomy, vede na typ ”$\dfrac{\infty}{\infty}$”

Postup výpočtu:

Každý z polynomů upravíme jako v př. 1, tj. vytkneme jeho nejvyšší mocninu. Společnou mocninu pak krátíme, čímž odstraníme neurčitý výraz $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Lze postupovat také tak, že danou racionální lomenou funkci,
tj. podíl $P(n)/Q(n)$ krátíme nejvyšší mocninou polynomu $Q(n)$.

Př. 3 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{5n-n^2}{100n+30} = -\infty.$ **Př. 4** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{30n^2+5}{n^3+10n-8} = 0.$

Př. 5. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+3}{4n^2-(2n+1)^2} = -\frac{1}{4}$

Limity s odmocninami

Př. 6. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-2}\right)=0$

Př. 7. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-2}\right)=5/2$

Důležité limity

Př. 8. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}=2,718\ldots$ Eulerovo číslo

Př. 9. Libovolné $a>0$, pak $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1$

Př. 10. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$

Věta 1.15 (limita sevřené plsti)

Nechť pro plsti $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ platí: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = c$ a pro každé $n \in N$ je $a_n \leq b_n \leq c_n$.

Pak existuje $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = c$.

Př. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$

Př. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n!)}{n^2+1} = 0.$