IV.7. Potenciální vektorové pole

Vektorové pole $\vec{f} = (U, V, W)$ se nazývá **potenciální pole v oblasti** *$G \subset \mathbb{E}_3$, jestliže existuje skalární funkce φ taková, že $\vec{f} = grad\,\varphi$ v oblasti G. Podobně pro vektorové pole $\vec{f} = (U, V)$ v oblasti $G \subset \mathbb{E}_2$.*
Skalární funkci φ nazýváme **potenciálem vektorového pole $\vec{f}$ v** *G.*

Platí následující tvrzení (podrobněji ve skriptu Matematika II od J. Neustupy):

Věta. *Nechť $\vec{f}$ je potenciální a spojité vektorové pole s potenciálem φ v oblasti $G \subset \mathbb{E}_3$ (resp. $\mathbb{E}_2$). Nechť c je orientovaná křivka v G s počátečním bodem A a s koncovým bodem B. Pak*

$$\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \varphi(B) - \varphi(A).$$

Poznámka.*Protože pro potenciální vektorové pole $\vec{f}$ závisí hodnota křivkového integrálu $\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$ pouze na počátečním a koncovém bodě, lze v tomto případě psát*

$$\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

Věta. *Nechť $\vec{f}$ je spojité vektorové pole v oblasti $G \subset \mathbb{E}_3$ (resp. $\mathbb{E}_2$). Pak následující tři výroky jsou ekvivalentní:*

a) $\vec{f}$ je potenciální pole v G.
b) Křivkový integrál $\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$ nezávisí v oblasti G na integrační cestě.
c) Cirkulace pole $\vec{f}$ po libovolné uzavřené křivce v G je nulová.

V dalším textu se soustředíme především na **vektorové pole v $\mathbb{E}_2$**.

Věta. *(Postačující podmínka potenciálnosti v $\mathbb{E}_2$.)*
Nechť

a) G je jednoduše souvislá oblast v $\mathbb{E}_2$ a
b) $\vec{f} = (U, V)$ je vektorové pole, jehož souřadnicové funkce $U(x, y), V(x, y)$ mají v oblasti G spojité parciální derivace a
c) funkce U, V splňují podmínku $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial y}$ v G.

Pak $\vec{f}$ je potenciální vektorové pole v G.

Při výpočtu potenciálu zpravidla nejprve ověříme podle postačující podmínky, že dané vektorové pole je potenciální v oblasti G. Pro **výpočet potenciálu v $\mathbb{E}_2$** pak máme několik možností.

1. metoda. Potenciál určíme z definice potenciálu, tzn. $\vec{f} = \text{grad}\varphi$ v $\mathbb{E}_2$. Tak dostáváme rovnice

$$(1)\quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = U, \qquad (2)\quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = V$$

2. metoda. Potenciál určíme výpočtem křivkového integrálu. Z výše uvedené věty vyplývá, že potenciál $\varphi(x, y) = \int_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$, kde c je vhodně zvolená křivka v G se zvoleným počátečním bodem $[x_0, y_0]$ a koncovým bodem $[x, y]$.

***Příklad* 554**. Určete největší možnou oblast(i), na níž je dané vektorové pole potenciální. a) $\vec{f} = \left(\dfrac{y^2}{x^2} - \sin y, -\dfrac{2y}{x} + y^2\right)$, b) $\vec{f} = \left(\dfrac{y^2}{x^2}, -\dfrac{2y}{x} + y^2\right)$.

Řešení: a) Souřadnicové funkce U, V daného pole mají spojité parciální derivace v oblastech D_1 a D_2, kde $D_1 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2; x > 0\}$, $\quad D_2 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2; x < 0\}$.

Vypočteme parciální derivace: $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{2y}{x^2}$, zatímco $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2} - \cos y$.

Není tedy splněna nutná podmínka, aby vektorové pole bylo potenciální, tj. podmínka $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial y}$.

b) Dané vektorové pole má spojité parciální derivace v oblasti D_1 a v oblasti D_2 z úlohy a). Každá z těchto oblastí je jednoduše souvislá a platí

$\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{2y}{x^2}$, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2}$. Zadané vektorové pole tedy splňuje výše uvedenou postačující podmínku a proto je potenciální v každé z oblastí D_1, $\quad D_2$. ■

***Příklad* 555**. a) Ověřte, že vektorové pole $\vec{f} = (3 + 2xy,\, x^2 - 3y^2)$ je potenciální v oblasti $\mathbb{E}_2$. b) Určete potenciál tohoto vektorového pole. c) Vypočítejte křivkový integrál $\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$, kde c je úsečka od bodu $A = [1,3]$ do bodu $B = [2,1]$.

Řešení: a) Souřadnicové funkce U, V jsou polynomy. Mají tedy spojité parciální derivace v množině $\mathbb{E}_2$, což je oblast jednoduše souvislá. Výpočtem

$\dfrac{\partial V}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = 2x$ vidíme, že dané pole je potenciální v oblasti $\mathbb{E}_2$.

b) Při výpočtu potenciálu podle 1. metody vyjdeme ze dvou podmínek

$$(1) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 3 + 2xy, \qquad\qquad (2) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 - 3y^2$$

Integrováním podle x vypočítáme z podmínky (1):

$$\varphi(x,y) = \int (3 + 2xy)\, d\,x = 3x + x^2 y + K(y).$$

Takto vypočtená funkce $\varphi(x,y)$ obsahuje neznámou funkci $K(y)$. Po dosazení za φ do podmínky (2) získáme rovnici (2'), ve které už nebude proměnná x .

To je "kontrolní místo" výpočtu. Derivaci funkce K zapíšeme ve tvaru $\dfrac{dK}{dy}$, neboť K je funkce jedné proměnné.

$$(2') \qquad x^2 + \frac{dK}{dy} = x^2 - 3y^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dK}{dy} = -3y^2.$$

Funkci $K(y)$ pak získáme integrováním:

$$K(y) = \int -3y^2\, d\,y = -y^3 + C.$$

Po dosazení za $K(y)$ obdržíme výsledný tvar potenciálu

$$\varphi(x,y) = 3x + x^2 y - y^3 + C,\ [x,y] \in \mathbb{E}_2,\ C \text{ je libovolné reálné číslo.}$$

c) Zadaný křivkový integrál lze vypočítat pomocí parametrizace dané úsečky. Protože však dané pole je potenciální v $\mathbb{E}_2$, lze křivkový integrál vypočítat pomocí potenciálu:

$$\int_c (3 + 2xy,\, x^2 - 3y^2) \cdot d\vec{s} = \varphi(B) - \varphi(A) = \varphi(2,1) - \varphi(1,3) = 30.$$ ■

***Příklad* 556**. a) Ověřte, že jsou splněny postačující podmínky potenciálnosti pro dané vektorové pole $\vec{f}$ v oblasti $G = \mathbb{E}_2$.
b) Určete jeho potenciál výpočtem křivkového integrálu, tj. 2. metodou.
c) Vypočtěte $\displaystyle\int_A^B (3x^2y - 3y^2, x^3 - 6xy) \cdot d\vec{s}$, je-li $A = [1,3], B = [2,1]$.

Řešení: a) Funkce U a V jsou spojité a diferencovatelné v celém $\mathbb{E}_2$.
$G = \mathbb{E}_2$ je jednoduše souvislá oblast,
Pak k ověření, že $\vec{f}$ je potenciální v G, stačí zjistit, zda $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{\partial V}{\partial x}$:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 3x^2 - 6y, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 3x^2 - 6y.$$ Ano, pole $\vec{f}$ je potenciální v $\mathbb{E}_2$.

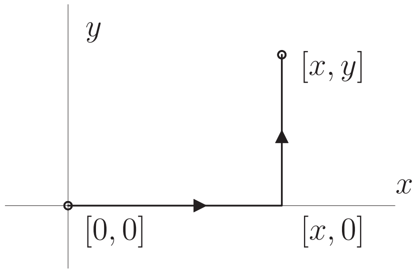
b) $\vec{f} = grad\,\varphi = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$

$$\int_{[x_0,y_0]}^{[x,y]} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{[x_0,y_0]}^{[x,y]} \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy = \int_{[x_0,y_0]}^{[x,y]} d\,\varphi = \varphi\big(x,y\big) - \varphi\big(x_0,y_0\big)\ .$$

Zvolíme $[x_0,y_0] = [0,0]$: $\displaystyle\varphi(x,y) = \int_{[0,0]}^{[x,y]} (3x^2y - 3y^2)\,dx + (x^3 - 6xy)\,dy =$

(víme, že integrál nezávisí na cestě, proto zvolíme lomenou čáru $[0,0] \longrightarrow [x,0] \longrightarrow [x,y]$) :

$$\left|\begin{array}{ll} [0,0] \longrightarrow [x,0] & : \ y = 0, dy = 0 \\ [x,0] \longrightarrow [x,y] & : \ x = \text{konst.}, dx = 0 \end{array}\right|$$



$$= \int_{[0,0]}^{[x,0]} (3x^2y - 3y^2)\,dx + (x^3 - 6xy)\,dy + \int_{[x,0]}^{[x,y]} (3x^2y - 3y^2)\,dx + (x^3 - 6xy)\,dy =$$
$$= \int_0^x 0\,dx + \int_0^y (x^3 - 6xy)\,dy = x^3y - 3xy^2 \quad \Longrightarrow$$
$$\varphi(x,y) = x^3y - 3xy^2 + C,$$

c) $\displaystyle\int_{[1,3]}^{[2,1]} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \varphi(2,1) - \varphi(1,3) = (8-6) - (3-27) = 26.$ ■

***Příklad* 557**. Je dáno vektorové pole $\vec{f} = (3x^2y,\ x^3 + \sqrt{y})$. Napište postačující podmínky pro to, aby křivkový integrál vektorové funkce $\displaystyle\int_c \vec{f}\cdot d\vec{s}$ nezávisel v oblasti $D \subset \mathbb{E}_2$ na cestě. Určete potenciál φ a užijte jej k výpočtu křivkového integrálu vektorové funkce $\vec{f}$ po dané křivce.
a) c_1 je úsečka z bodu $A = [2,4]$ do bodu $B = [1,1]$. b) c_2 je záporně orientovaná hranice množiny $M = \{[x,y] : x^2 + (y-3)^2 \le 8,\ x \ge 0\}$.

Řešení: $U(x,y) = 3x^2y$, $V(x,y) = x^3 + \sqrt{y}$. Ověřte si, že parciální derivace jsou spojité a v oblasti $D = \{\,[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ y > 0\}$, která je jednoduše souvislá platí rovnost $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial y}$.

Výpočet potenciálu φ: Podmínky (1) a (2) mají tvar:

(1) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 3x^2y$, (2) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = x^3 + \sqrt{y}$

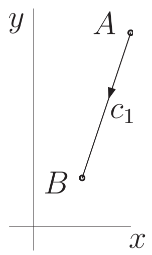
Z podmínky (1) vypočítáme $\varphi(x,y) = \displaystyle\int 3x^2y\,d\,x = x^3y + K(y)$.

Po dosazení do (2): $x^3 + \dfrac{dK}{dy} = x^3 + \sqrt{y}$. Po úpravě získáme rovnici $\dfrac{dK}{dy} = \sqrt{y}$,

ze které určíme $K(y) = \displaystyle\int \sqrt{y}\,d\,y = \frac{2}{3}\sqrt{y^3} + C$.

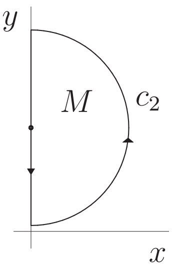
Hledaný potenciál v D je $\varphi(x,y) = x^3y + \dfrac{2}{3}\sqrt{y^3} + C$.

a)



$$\int_{c_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{c_1} (3x^2y,\ x^3 + \sqrt{y})\cdot d\vec{s} =$$
$$= \varphi([1,1]) - \varphi([2,4]) = -107/3.$$

b)



Daná křivka c_2 je uzavřená. Je to obvod půlkruhu M, který leží v oblasti D, v níž je dané vektorové pole $\vec{f}$ potenciální.
Z vlastnosti potenciálu pak vyplývá, že cirkulace daného vektorového pole $\vec{f}$ podél této křivky c_2 je rovna nule.

■

***Příklad* 558**. Je dáno vektorové pole $\vec{f} = (2x\cos y, -x^2\sin y)$. a) Ověřte, že je pole potenciální v $\mathbb{E}_2$. b) Určete jeho potenciál φ. c) Vypočtěte $\displaystyle\int_c \vec{f}\cdot d\vec{s}$, kde c je křivka s počátečním bodem $A = [2,0]$ a koncovým bodem $B = [4,\pi/2]$.

Řešení: a) Oblast $\mathbb{E}_2$ je jednoduše souvislá oblast a platí

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -2x\sin y, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -2x\sin y \quad\Longrightarrow\quad \vec{f} \text{ je potenciální v } \mathbb{E}_2\ .$$

b) $$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2x\cos y \quad\Rightarrow\quad \varphi(x,y) = \int 2x\cos y\,dx = x^2\cos y + K(y)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -x^2\sin y \quad\Rightarrow\quad x^2(-\sin y) + \frac{dK}{dy} = -x^2\sin y \quad\Rightarrow\quad \frac{dK}{dy} = 0 \quad\Rightarrow\quad K(y) = C$$

$$\varphi(x,y) = x^2\cos y + C.$$

c) $$\int_c \vec{f}\cdot d\vec{s} = \varphi(4,\pi/2) - \varphi(2,0) = 16\cos\frac{\pi}{2} - 4\cos 0 = -4\ .$$

■

***Příklad* 559**. Určete oblasti $G \subset \mathbb{E}_2$, v nichž je pole $\vec{f} = \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{y}{x^2} + 2y - 5,\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{y^2} + 2x + 11\right)$ potenciální a stanovte jeho potenciál $\varphi(x,y)$, který splňuje podmínku $\varphi(-2,2) = 0$.

Řešení: $G_1 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x > 0,\ y > 0\}$, $G_2 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x < 0,\ y > 0\}$,
$G_3 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x > 0,\ y < 0\}$, $G_4 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x < 0,\ y < 0\}$.

Platí $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{\partial V}{\partial x} = -\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2} + 2$, tedy je $\vec{f}$ potenciální v $G_i, i = 1,2,3,4$.

Výpočet potenciálu φ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} + 2y - 5 \ \Rightarrow\ \varphi(x,y) = \int \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} + 2y - 5\, dx = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2xy - 5x + K(y)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} + 2x + 11 \ \Rightarrow\ -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} + 2x + \frac{dK}{dy} = \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} + 2x + 11 \ \Rightarrow\ K(y) = 11y + C$$

$$\varphi(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2xy - 5x + 11y + C;$$

Z podmínky $\varphi(-2,2) = 0$ vypočteme konstantu C:

$$-1 + 1 - 8 + 10 + 22 + C = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = -22$$

$$\varphi(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2xy - 5x + 11y - 22 \quad \text{pro} \quad [x,y] \in G_2.$$

■

***Příklad* 560**. Určete největší možnou oblast $G \subset \mathbb{E}_2$, v níž je vektorová funkce $\vec{f} = \left(\dfrac{y^2}{\sqrt{x}}, 4y\sqrt{x}\right)$ spojitá a rozhodněte, zda $\displaystyle\int_c \vec{f}\cdot d\vec{s}$ nezávisí na integrační cestě v G. Pokud tato oblast existuje, vypočtěte $\displaystyle\int_{[1,2]}^{[4,-2]} \vec{f} \cdot d\vec{s}$.

Řešení: $G = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2, x > 0\}$ je polorovina, a tedy je jednodušše souvislá oblast v $\mathbb{E}_2$.
$\displaystyle\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$ nezávisí na cestě, protože parciální derivace souřadnicových funkcí U, V jsou spojité v G a platí $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{2y}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad$ existuje potenciál φ.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{y^2}{\sqrt{x}} \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x,y) = \int \frac{y^2}{\sqrt{x}}\, dx = y^2 \cdot 2\sqrt{x} + K(y)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 4y\sqrt{x} \quad \Longrightarrow \quad 2y \cdot 2\sqrt{x} + \frac{dK}{dy} = 4y\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad K(y) = C$$

$$\varphi(x,y) = 2y^2\sqrt{x} + C$$

$$\int_{[1,2]}^{[4,-2]} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{[1,2]}^{[4,-2]} \left(\frac{y^2}{\sqrt{x}}, 4y\sqrt{x}\right) \cdot d\vec{s} = \varphi(4,-2) - \varphi(1,2) = 8$$

■

***Příklad* 561**. Je dána funkce $\varphi(x,y) = x^3y + x^2y^2$. Určete a) silové pole $\vec{f}$, jehož potenciálem je funkce $\varphi(x,y)$; b) práci síly $\vec{f}$ při pohybu z bodu $M = [1,1]$ do bodu $N = [-2,3]$; c) práci síly $\vec{f}$ podél křivky $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + 4y^2 = 4\}$, která je orientována kladně.

Řešení: a) $\vec{f} = \operatorname{grad} \varphi \quad \Longrightarrow \quad \vec{f} = (3x^2y + 2xy^2, x^3 + 2x^2y)$;

b) $W = \displaystyle\int_M^N \vec{f} \cdot d\vec{s} = \big(\text{integrál nezávisí na cestě}\big) = \varphi(N) - \varphi(M) =$

$= (-24 + 36) - (1 + 1) = 10;$

c) $W = \displaystyle\oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0.$ ■

***Příklad* 562**. Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \dfrac{(x-y, x+y)}{x^2+y^2}$ v $G = \mathbb{E}_2 \setminus \{[0,0]\}$.

a) Ověřte, že platí $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{\partial V}{\partial x}$ v G. b) Výpočtem integrálu $\displaystyle\oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$, kde c je záporně orientovaná kružnice $S = [0,0], r = 2$, se přesvědčte, že pole není potenciální v G.

Řešení: a) $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$

b) Cirkulace $\displaystyle\oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_c \frac{(x-y, x+y)}{x^2+y^2} \cdot d\vec{s} =$

$$= \left| \begin{array}{l} P(t) = [2\cos t, 2\sin t], \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ \dot{P}(t) = (-2\sin t, 2\cos t) \\ \text{křivka je nesouhlasně orientovaná s parametrizací} \end{array} \right| =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \frac{2(\cos t - \sin t), 2(\cos t + \sin t)}{4} \cdot (-2\sin t, 2\cos t)\, dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \Big(-4(\cos t - \sin t)\sin t + 4(\cos t + \sin t)\cos t \Big)\, dt = -\int_0^{2\pi} 1\, dt = -2\pi$$

Pole $\vec{f}$ není potenciální, protože $\displaystyle\oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} \neq 0$.

Poznámka: K výpočtu tohoto integrálu nelze použít Greenovu větu, jelikož bod $[0,0] \in int\ c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2+y^2 < 4\}$ nepatří do $D(\vec{f})$. ■

***Příklad* 563**. Vypočtěte $\displaystyle\int_M^N \vec{f} \cdot d\vec{s}$, kde $M = [1,0,\mathrm{e}]$, $N = [2,-1,\mathrm{e}^2]$, víte-li, že pole $\vec{f}$ je potenciální v oblasti $\mathbb{E}_3$ a jeho potenciál je funkce $\varphi(x,y,z) = xy^2 \ln z$. Určete největší možnou oblast G, v níž je φ potenciálem pole $\vec{f}$.

Řešení: $G = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ z > 0\}$; $\displaystyle\int_M^N \vec{f} \cdot d\vec{s} = \varphi(N) - \varphi(M) = 2\ln \mathrm{e}^2 - 0 = 4.$ ■

• Je dáno vektorové pole $\vec{f}$. Ověřte, že je pole potenciální v $G \subset \mathbb{E}_2$, resp. $\mathbb{E}_3$, stanovte jeho potenciál a vypočtěte $\displaystyle\int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s}$:

***Příklad* 564**.* $\vec{f} = (3x^2y - z^2 + 2z, x^3 + 2yz - 3, y^2 - 2xz + 2x + 5)$, $A = [0,1,1]$, $B = [3,0,2]$, $G = \mathbb{E}_3$

Řešení: a) K ověření stačí:

1) spojitost parciálních derivací funkcí $U(x,y,z)$, $V(x,y,z)$, $W(x,y,z)$ v oblasti G, která je jednodušše souvislá v $\mathbb{E}_3$,

2) rot $\vec{f} = \vec{0}$ v G.

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y - z^2 + 2z & x^3 + 2yz - 3 & y^2 - 2xz + 2x + 5 \end{vmatrix} =$$

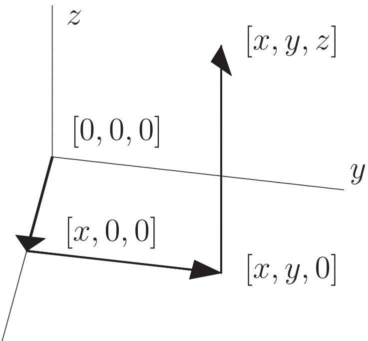
$= (2y - 2y, -2z + 2 + 2z - 2, 3x^2 - 3x^2) = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{f}$ je potenciální v $\mathbb{E}_3$.

b) $\varphi(x, y, z) =$

$$= \int_{[0,0,0]}^{[x,y,z]} (3x^2y - z^2 + 2z)\, dx + (x^3 + 2yz - 3)\, dy + (y^2 - 2xz + 2x + 5)\, dz =$$

$$= \int_{[0,0,0]}^{[x,0,0]} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{[x,0,0]}^{[x,y,0]} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{[x,y,0]}^{[x,y,z]} \vec{f} \cdot d\vec{s} =$$

$$\left| \begin{array}{l} [0,0,0] \Longrightarrow [x,0,0] : y = 0, dy = 0, z = 0, dz = 0 \\ [x,0,0] \Longrightarrow [x,y,0] : dx = 0, z = 0, dz = 0 \\ [x,y,0] \Longrightarrow [x,y,z] : dx = 0, dy = 0 \end{array} \right|$$



$$= \int_0^x 0\, dx + \int_0^y (x^3 - 3)\, dy + \int_0^z (y^2 - 2xz + 2x + 5)\, dz =$$

$= x^3y - 3y + y^2z - xz^2 + 2xz + 5z + C$,

c) $\displaystyle\int_{[0,1,1]}^{[3,0,2]} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \varphi(3, 0, 2) - \varphi(0, 1, 1) = 7$. ■

565. $\vec{f} = (x\mathrm{e}^{2y}, (x^2 + 1)\mathrm{e}^{2y}),\ A = [1, 0],\ B = [3, 1]$ $\left[\varphi = \frac{1}{2}(x^2 + 1)\mathrm{e}^{2y} + C;\ 5\mathrm{e}^2 - 1\right]$

566. $\vec{f} = (3x^2y - 2xy^2, x^3 - 2x^2y),\ A = [1, 1],\ B = [2, -1]$ $[\varphi = x^3y - x^2y^2 + C;\ -12]$

567. $\vec{f} = (\cos 2y + y + x, y - 2x \sin 2y + x),\ A = [0, 7],\ B = [1, 0]$
$\left[\varphi = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + x \cos 2y + xy + C;\ -23\right]$

568.* $\vec{f} = (x^2 - 2yz, y^2 - 2xz, z^2 - 2xy),\ A = [0, 0, 3],\ B = [3, 3, 0]$
$\left[\varphi = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C;\ 9\right]$

569.* $\vec{f} = (2y + z^2, 2x + 1, 2xz + 2),\ A = [0, 1, 1\ ], B = [3, 0, 2]$
$[\varphi = 2xy + y + xz^2 + 2z + C;\ 13]$

570.* $\vec{f} = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \dfrac{y}{x^2 + y^2 + 1}, 2z\right),\ A = [1, 0, 0],\ B = [0, 1, 1]$
$\left[\varphi = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2 + 1) + z^2 + C;\ 1\right]$

571. Ověřte, že pole $\vec{f} = (y^2, 2xy)$ je potenciální v $\mathbb{E}_2$. Stanovte potenciál $\varphi(x, y)$, splňující $\varphi(-4, 3) = -9$. $[\varphi = xy^2 + 27]$

572.* Stanovte potenciál pole $\vec{f} = \left(1 - \dfrac{1}{y} + \dfrac{y}{z}, \dfrac{x}{z} + \dfrac{x}{y^2}, 2z - \dfrac{xy}{z^2}\right)$ na $G \subset \mathbb{E}_3 : y > 0,\ z > 0$.
$\left[\varphi = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + z^2 + C\right]$

573. Najděte práci silového pole $\vec{f}$, jehož potenciálem je funkce $\varphi(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ při pohybu a) z bodu $M = [1, \sqrt{3}]$ do bodu $N = [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$; b) podél křivky $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ (x-2)^2 + y^2 = 1\}$ v kladném směru. $\left[\text{a)} -\frac{\pi}{12},\ \text{b)}\ 0\right]$

• Vypočtěte :

574. $\displaystyle\int_{[2,1]}^{[1,2]} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$ $\left[-\frac{3}{2},\ \text{integrál nezávisí na cestě}\right]$

575. $\displaystyle\int_{[\pi/4,2]}^{[\pi/6,1]} 2y \sin 2x\,dx + (1 - \cos 2x)\,dy$ $\left[-\frac{3}{2}\right]$

576. $\displaystyle\oint_c (2x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy, \quad c : x^2 + y^2 = a^2$ $[0]$

• Určete oblasti G, v nichž je vektorové pole $\vec{f}$ potenciální a stanovte potenciál :

577. $\vec{f} = (x^3y^2 + x, y^2 + yx^4)$ $[G = \emptyset,\ \vec{f}\ \text{není potenciální}]$

578. $\vec{f} = \left(\ln y - \dfrac{e^y}{x^2}, \dfrac{e^y}{x} + \dfrac{x}{y}\right)$ $\left[\begin{array}{c} G_1 \subset \mathbb{E}_2 : y > 0, x > 0 \\ G_2 \subset \mathbb{E}_2 : y > 0, x < 0 \\ \varphi = \dfrac{e^y}{x} + x \ln y + C \end{array}\right]$

579.* $\vec{f} = \left(\dfrac{z}{x - y}, \dfrac{z}{y - x}, \ln(x - y) + \dfrac{1}{\sqrt{z}}\right)$ $\left[\begin{array}{c} G \subset \mathbb{E}_3 : x > y,\ z > 0 \\ \varphi = z \ln(x - y) + 2\sqrt{z} + C \end{array}\right]$

• Je dáno vektorové pole $\vec{f} = (U, V)$ a křivka c.

a) Pomocí křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f}$ působením po křivce c.

b) Ověřte, že vektorové pole $\vec{f} = (U, V)$ je potenciální v $\mathbb{E}_2$.

c) Určete potenciál φ tohoto pole a pomocí něho ověřte výsledek z úlohy a).

580. $\vec{f} = (x{+}3y\ ,\ 3x)$, c je orientovaná úsečka s počátečním bodem $A = [0, 1]$ a koncovým bodem $B = [1, 3]$ $\left[\begin{array}{l} a)\ 19/2 \\ c)\ \varphi(x, y) = x^2/2 + 3xy + C \end{array}\right]$

581. $\vec{f} = (y^2\ ,\ 2xy)$, c je část paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $A = [0, 0]$ a koncovým bodem $B = [2, 4]$ $\left[\begin{array}{l} a)\ 32 \\ c)\ \varphi(x, y) = xy^2 + C \end{array}\right]$

582. $\vec{f} = (2x - y^2, 3 - 2xy)$, $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x = -y^2 - 1\}$ od bodu $[-1; 0]$ do bodu $[-5; -2]$ $\left[\begin{array}{l} a)\ 38 \\ c)\ \varphi(x, y) = x^2 - xy^2 + 3y + C \end{array}\right]$

583. $\vec{f} = (-x\ ,\ y)$, $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = 4\}$ od bodu $A = [2, 0]$ do bodu $B = [0, 2]$ $\left[\begin{array}{l} a)\ 4 \\ c)\ \varphi(x, y) = -x^2/2 + y^2/2 + C \end{array}\right]$

584. a) Vysvětlete, co to znamená, že integrál $\displaystyle\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$ nezávisí v oblasti $G \subset \mathbb{E}_2$ na integrační cestě.

b) Zdůvodněte, zda $\int_c (y \sin x\ ,\ y - \cos x) \cdot \vec{ds}$ nezávisí v $\mathbb{E}_2$ na integrační cestě.

c) Existuje-li potenciál pole $\vec{f} = (y \sin x\ ,\ y{-}\cos x)$ v $\mathbb{E}_2$, najděte jej a vypočítejte křivkový integrál tohoto pole po křivce c s počátečním bodem $A=[0,0]$ a koncovým bodem $B=[0,\pi]$.

[$b)$ ověřte splnění postačující podmínky, $c)$ $\varphi(x,y)=y^2/2-y\,\cos x+C,\ \pi^2/2-\pi$]

- Je dána skalární funkce $\varphi(x,y,z)$, která je potenciálem nějakého vektorového pole $\vec{f}$.
  a) Určete největší oblast v $\mathbb{E}_3$, ve které má φ spojité parciální derivace a vyjádřete v této oblasti pole $\vec{f}$.
  b) Je-li ještě nějaká jiná funkce potenciálem $\vec{f}$ v této oblasti, pak ji uveďte.
  c) Vypočítejte křivkový integrál $\int_c \vec{f}\cdot d\vec{s}$ pro danou křivku c.

585. $\varphi(x,y,z)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+z^2;$ c je křivka v G s počátečním bodem $[1,0,0]$ a koncovým bodem $[0,1,1]$.

[$a)$ $G=\{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3\,;\ x^2+y^2>0\}$
$b)$ $\vec{f}(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\,,\ \dfrac{y}{x^2+y^2}\,,\ 2z\right)$
$c)$ 1]

586. $\varphi(x,y,z)=xy+xz+yz;\quad c=\left\{[x,y,z]:\ x=-1+t,\ y=2+\dfrac{t}{2},\ z=-\cos\left(\dfrac{t\pi}{4}\right),\right.$ pro $\left. t\in\langle 0,4\rangle\right\}$

[$a)$ $\mathbb{E}_3$, funkce $\varphi+C$
$b)$ $\vec{f}=(y+z,\ x+z,\ x+y)$
$c)$ 22]

- Je dáno vektorové pole $\vec{f}=(U,V)$, oblast D a křivka c.
  a) Napište postačující podmínky pro to, aby vektorové pole $\vec{f}=(U,V)$ bylo potenciální v oblasti $D\subset\mathbb{E}_2$.
  b) Ověřte, že postačující podmínky potenciálnosti jsou splněny pro dané vektorové pole $\vec{f}$ a danou oblast D (není-li oblast D dána, uveďte největší možnou).
  c) Určete potenciál a užijte jej k výpočtu křivkového integrálu vektorové funkce $\vec{f}$ po dané křivce c.

587. $\vec{f}=\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\ \dfrac{y}{x^2+y^2}\right),\ D=\{\,[x,y]\in\mathbb{E}_2\,;\ x>0,\ y>0\,\},c$ je úsečka AB s počátečním bodem $A=[2,4]$ a koncovým bodem $B=[1,2]$

[$\varphi(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C;\ -\ln 2$]

588. $\vec{f}=\left(\dfrac{y}{x^2+y^2},\ \dfrac{-x}{x^2+y^2}\right),\ D=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2\,;\ y>0\},\ c$ je kladně orientovaná kružnice $(x-1)^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{4}$

[$\varphi(x,y)=\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}+C;\ 0$]

589. $\vec{f}=\left(y^2-\dfrac{x}{\sqrt{y-x^2}},\ 2xy+\dfrac{1}{2\sqrt{y-x^2}}\right),\ D=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ y>x^2\},\ c$ je křivka s poč. bodem $A=[0,1]$ a konc. bodem $B=[1,2]$

[$\varphi(x,y)=xy^2+\sqrt{y-x^2}+C;\ 0$]

590. $\vec{f}=\left(\dfrac{y^2}{x}+x^2,\ 2y\ln x\ -\cos 2y\right)$, c je křivka s počátečním bodem $A=[1,\pi/4]$ a koncovým bodem $B=[2;0]$

[$\varphi(x,y)=x^3/3+y^2\,\ln x\ -\sin 2y/2+C;\ 17/6$]