Integrace racionálních funkcí

$\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P, Q jsou dané polynomy

Předpoklad: stupeň(P) < stupeň(Q)

Proto nejprve
0. krok. Je-li $st(P) \geq st(Q)$,
pak dělíme polynomy $P(x) : Q(x) = \ldots$

Ia. Speciální případ $\displaystyle\int \frac{Q'(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$

pak subst. $Q(x) = t,\ Q'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$

Příklady

Ib. Speciální případ $\displaystyle\int \frac{konst}{(ax+b)^n}\,\mathrm{d}x$

pak subst. $ax + b = t,\ a\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$

Příklady

Předpoklad pro další postup:
koeficient u nejvyšší mocniny polynomu Q je 1.

II. st $(Q) = 2$, tj. kvadratický polynom

Postup výpočtu:

3 případy podle diskriminantu D kvadratické rovnice $Q(x) = 0$.

II.a. Dva různé reálné kořeny α, β

Pak existuje **rozklad** $Q(x) = (x - \alpha)(x - \beta) \quad \Longrightarrow$

rozklad dané funkce na **součet parciálních zlomků**

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta}$$

Určíme konstanty A, B a integrujeme:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = A\,\ln|x - \alpha| + B\,\ln|x - \beta| + C$$

Příklad

II.b. Jeden dvojnásobný reálný kořen α.

Pak existuje rozklad $Q(x) = (x - \alpha)^2 \quad \Longrightarrow$

rozklad na součet parciálních zlomků

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{(x - \alpha)^2}$$

Příklad

II.c. Žádný reálný kořen,

kořeny jsou dvě komplexní čísla.

Polynom Q pak nelze v reálném oboru rozložit.

Příklady

III. $\mathrm{st}(Q) = 3$, tj. kubický polynom

pak čtyři případy podle kořenů rovnice $Q(x) = 0$

III.a. Tři různé reálné kořeny α, β, γ.

Pak existuje rozklad

$$Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \quad \Longrightarrow$$

rozklad na součet parciálních zlomků

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma}$$

III.b.
Dva reálné kořeny α, β, kde β je dvojnásobný

Pak existuje rozklad

$$Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)^2 \quad \Longrightarrow$$

rozklad na součet parciálních zlomků

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{(x-\beta)^2}$$

III.c. Jeden trojnásobný reálný kořen α

Pak exist. rozklad $Q(x) = (x-\alpha)^3 \quad \Longrightarrow$

rozklad na součet parciálních zlomků

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \frac{C}{(x-\alpha)^3}$$

III.d.

Jeden reálný kořen α a dva kořeny komplexní.

Pak exist. rozklad

$$Q(x) = (x-\alpha)(x^2+rx+s) \quad \Longrightarrow$$

rozklad na součet parciálních zlomků

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{Bx+C}{x^2+rx+s}$$

Integrace funkcí $\sin^n x \cdot \cos^m x$

Typ I. Aspoň jedno z čísel n, m je liché

Řešíme substitucí $\{\sin x = t\}$ nebo $\{\cos x = t\}$.

Někdy tomu předchází úprava pomocí
$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$.

Příklady

Typ II. Obě čísla n, m jsou sudá

Exponent n, resp. m snížíme pomocí vztahů

$$\boxed{\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}}$$

Odvození

Příklady