Integrace racionálních funkcí

$\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P, Q jsou dané polynomy

Předpoklad: stupeň(P) < stupeň(Q)

Proto nejprve

0. krok. Je-li $st(P) \geq st(Q)$,

pak dělíme polynomy $P(x) : Q(x) = \ldots$

Ia. Speciální případ $\displaystyle\int \frac{Q'(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$

pak subst. $Q(x) = t,\ Q'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$

Př. 1. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C$

$x \in (-\infty, -1),\ x \in (-1, 1), x \in (1, \infty)$.

Př. 2. $\displaystyle\int \frac{3x^4}{x^5+32}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{5}\ln|x^5+32| + C,\ x \neq -2$

Př. 3. $\displaystyle\int \frac{4x-6}{x^2-3x+15}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x^2-3x+15| + C$,
$x \in (-\infty, \infty)$.

Ib. Speciální případ $\displaystyle\int \frac{konst}{(ax+b)^n}\,\mathrm{d}x$

pak subst. $ax + b = t, \;\; a\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$

Př. 4. $\displaystyle\int \frac{4}{3(x+3)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{4}{3(x+3)} + C,\; x \neq -3$

Předpoklad pro další postup:
koeficient u nejvyšší mocniny polynomu Q je 1.

II. st $(Q) = 2$, tj. kvadratický polynom

Postup výpočtu:

3 případy podle diskriminantu D kvadratické rovnice $Q(x) = 0$.

II.a. $D > 0$, tj. dva různé reálné kořeny α, β

Pak existuje rozklad $Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta) \quad \Longrightarrow$

rozklad dané funkce na součet parciálních zlomků

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$$

Určíme konstanty A, B a integrujeme:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = A\,\ln|x-\alpha| + B\,\ln|x-\beta| + C$$

Př. 5.

$$\int \frac{5x-4}{x^2-8x+12}\,\mathrm{d}x = \frac{13}{2}\ln|x-6| - \frac{3}{2}\ln|x-2| + C$$

$x \in (-\infty, 2),\ x \in (2, 6), x \in (6, \infty)$.

II.b. $D = 0$, **tj. dvojnásobný reálný kořen** α

Pak existuje rozklad $Q(x) = (x-\alpha)^2 \quad \Longrightarrow$

rozklad $P(x)/Q(x)$ **na součet parciálních zlomků**

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2}$$

Př. 6.

$$\int \frac{2x+3}{x^2+4x+4}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x+2| + \frac{1}{x+2} + C, x \neq -2$$

II.c. $D < 0$, **rovnice** $Q(x) = 0$ **nemá reálný kořen,**
kořeny jsou dvě komplexní čísla.

Polynom Q **pak nelze v reálném oboru rozložit.**

Př. 7. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+9} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C,\ x \in \mathbb{R}$

Př. 8. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x + C,\ x \in \mathbb{R}$

Př. 9. $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x = 2\operatorname{arctg}(x+1) + C,\ x \in \mathbb{R}$

III. $\mathrm{st}(Q) = 3$ (Zkouška Alfa)

pak čtyři případy podle kořenů rovnice $Q(x) = 0$

III.a. Tři různé reálné kořeny α, β, γ.

Pak existuje rozklad

$$Q(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \quad \Longrightarrow$$

rozklad na součet parciálních zlomků

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} + \frac{C}{x - \gamma}$$

Př. 10. $\displaystyle\int \frac{2x^2 - 8x + 14}{(x^2 - 1)(x - 3)}\,\mathrm{d}x =$

$3 \ln|x + 1| - 2 \ln|x - 1| + \ln|x - 3| + C$

$I_1 = (-\infty, -1), I_2 = (-1, 1), I_3 = (1, 3), I_4 = (3, \infty).$

III.b.

Dva reálné kořeny α, β, kde β je dvojnásobný

Pak existuje rozklad

$$Q(x) = (x - \alpha)(x - \beta)^2 \quad \Longrightarrow$$

rozklad na součet parciálních zlomků

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} + \frac{C}{(x - \beta)^2}$$

Př. 11. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)(x^2-2x+1)} =$

$$\frac{1}{x-1} + \ln|x-2| - \ln|x-1| + C$$

$x \in (-\infty, 1),\ x \in (1, 2), x \in (2, \infty).$

III.c. Jeden trojnásobný reálný kořen α

Pak exist. rozklad $Q(x) = (x-\alpha)^3 \quad \Longrightarrow$

rozklad na součet parciálních zlomků

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \frac{C}{(x-\alpha)^3}$$

III.d.

Jeden reálný kořen α a dva kořeny komplexní.

Pak exist. rozklad

$$Q(x) = (x-\alpha)(x^2+rx+s) \quad \Longrightarrow$$

rozklad na součet parciálních zlomků

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{Bx+C}{x^2+rx+s}$$

Př. 12. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+4x} =$

$$\frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{8}\ln(x^2+4) + C$$

$x \in (-\infty, 0),\ x \in (0, \infty).$