

## Integrace racionálních funkcí

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P, Q \text{ jsou dané polynomy}$$

Předpoklad:  $\text{st}(P) < \text{st}(Q)$

Proto nejprve

**0. krok.** Je-li  $\text{st}(P) \geq \text{st}(Q)$ ,

pak dělíme polynomy  $P(x) : Q(x) = \dots$

---

**Ia. Speciální případ**  $\int \frac{Q'(x)}{Q(x)} dx$

pak subst.  $Q(x) = t, Q'(x) dx = dt$

$$\text{Př. 1. } \int \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + C$$

$$x \in (-\infty, -1), x \in (-1, 1), x \in (1, \infty).$$

$$\text{Př. 2. } \int \frac{3x^4}{x^5 + 32} dx = \frac{3}{5} \ln |x^5 + 32| + C$$

$$\text{Př. 3. } \int \frac{4x - 6}{x^2 - 3x + 15} dx = 2 \ln |x^2 - 3x + 15| + C$$

---

**Ib. Speciální případ**  $\int \frac{\textit{konst}}{(ax + b)^n} dx$

pak subst.  $ax + b = t$ ,  $a dx = dt$

Př. 4. 
$$\int \frac{4}{3(x + 3)^2} dx = -\frac{4}{3(x + 1)} + C$$

---

**Předpoklad** pro další postup:

koeficient u nejvyšší mocniny polynomu  $Q$  je 1.

**II. st** ( $Q$ ) = 2, tj. kvadratický polynom

**Postup výpočtu:**

3 případy podle diskriminantu  $D$  kvadratické rovnice  $Q(x) = 0$ .

---

**II.a. Dva různé reálné kořeny**  $\alpha, \beta$

Pak existuje **rozklad**  $Q(x) = (x - \alpha)(x - \beta) \implies$

**rozklad** dané funkce na **součet parciálních zlomků**

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta}$$

Určíme konstanty  $A$ ,  $B$  a integrujeme:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = A \ln |x - \alpha| + B \ln |x - \beta| + C$$

Př. 5.

$$\int \frac{5x - 4}{x^2 - 8x + 12} dx = \frac{13}{2} \ln |x - 6| - \frac{3}{2} \ln |x - 2| + C$$

---

**II.b.** Jeden dvojnásobný reálný kořen  $\alpha$ .

Pak existuje rozklad  $Q(x) = (x - \alpha)^2 \implies$

rozklad na součet parciálních zlomků

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{(x - \alpha)^2}$$

Př. 6.

$$\int \frac{2x + 3}{x^2 + 4x + 4} dx = 2 \ln |x + 2| + \frac{1}{x + 2} + C$$

---

**II.c.** Rovnice  $Q(x) = 0$  nemá reálný kořen, kořeny jsou dvě komplexní čísla.

Polynom  $Q$  pak nelze v reálném oboru rozložit.

Př. 7.  $\int \frac{dx}{x^2 + 9} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C, x \in \mathbb{R}$

Př. 8.  $\int \frac{dx}{4x^2 + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2x + C, x \in \mathbb{R}$

Př. 9.  $\int \frac{2}{x^2 + 2x + 2} dx = 2 \operatorname{arctg} (x + 1) + C, x \in \mathbb{R}$

### III. $\text{st}(Q) = 3$ (Zkouška Alfa)

pak čtyři případy podle kořenů rovnice  $Q(x) = 0$

#### III.a. Tři různé reálné kořeny $\alpha, \beta, \gamma$ .

Pak existuje rozklad

$$Q(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \implies$$

rozklad na součet parciálních zlomků

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} + \frac{C}{x - \gamma}$$

Př. 10. 
$$\int \frac{2x^2 - 8x + 14}{(x^2 - 1)(x - 3)} dx =$$

$$3 \ln |x + 1| - 2 \ln |x - 1| + \ln |x - 3| + C$$

---

#### III.b.

Dva reálné kořeny  $\alpha, \beta$ , kde  $\beta$  je dvojnásobný

Pak existuje rozklad

$$Q(x) = (x - \alpha)(x - \beta)^2 \implies$$

rozklad na součet parciálních zlomků

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} + \frac{C}{(x - \beta)^2}$$

Př. 11. 
$$\int \frac{dx}{(x-2)(x^2-2x+1)} =$$
$$\frac{1}{x-1} + \ln|x-2| - \ln|x-1| + C$$

---

**III.c.** Jeden trojnásobný reálný kořen  $\alpha$

Pak exist. rozklad  $Q(x) = (x - \alpha)^3 \implies$

rozklad na součet parciálních zlomků

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{(x - \alpha)^2} + \frac{C}{(x - \alpha)^3}$$

---

**III.d.**

Jeden reálný kořen  $\alpha$  a dva kořeny komplexní.

Pak exist. rozklad

$$Q(x) = (x - \alpha)(x^2 + rx + s) \implies$$

rozklad na součet parciálních zlomků

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{Bx + C}{x^2 + rx + s}$$

Př. 12. 
$$\int \frac{dx}{x^3 + 4x} =$$
$$\frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{8} \ln(x^2 + 4) + C$$