Tečna ke grafu funkce, Taylorův polynom, Lagrangeův tvar zbytku, přibližný výpočet funkční hodnoty, odhad chyby (nepřesnosti) tohoto výpočtu (pracovní text)

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Literatura:

[1] J. Neustupa: **Matematika I.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2013.

[2] S.Kračmar, F. Mráz, J.Neustupa: **Sbírka příkladů z Matematiky I**. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2013.

[3] E. Brožíková, M. Kittlerová: **Diferenciální počet funkcé jedné proměnné** (řešené příklady). Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2007.

Poznámka: V uvedených textech lze nalézt varianty k níže uvedeným úlohám.

Předpoklad: Funkce f má derivace až do řádu n v bodě x_0. Pak Taylorův polynom n-tého stupně dané funkce f (se středem) v bodě x_0:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Lagrangeův tvar zbytku $R_{n+1}(x)$ vyjadřuje chybu (nepřesnost), které se dopustíme při nahrazení funkční hodnoty $f(x)$ hodnotou $T_n(x)$, tj. $R_{n+1}(x) = f(x) - T_n(x)$.

> **Věta (Taylorova).** Nechť funkce f má spojité derivace až do řádu $n + 1$ v okolí $U(x_0)$ bodu x_0.
>
> Pak pro každé $x \in U(x_0)$ existuje mezi body x_0 a x bod ξ tak, že $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

Protože přesnou polohu bodu ξ zpravidla neznáme, můžeme zmíněnou nepřesnost pomocí tvaru zbytku pouze odhadnout shora. Lze použít odhad $|R_{n+1}(x)| \le \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,|(x - x_0)|^{n+1}$, kde M_{n+1} je maximum funkce $|f^{(n+1)}|$ na intervalu $\langle x_0, x\rangle$, resp. $\langle x, x_0\rangle$.

Poznámka: Lagrangeův tvar zbytku a jeho použití pro odhad nepřesnosti $|R_{n+1}(x)| = |f(x) - T_n(x)|$ nejsou v požadavcích zkoušky Beta.

1 Je dána funkce $f(x) = (2x + 1)\ln x$.

a) Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0 = 1$. Tečnu načrtněte.

b) Napište Taylorův polynom $T_2(x)$ stupně dva se středem $x_0 = 1$ dané funkce f. Pomocí $T_2(x)$ určete přibližně hodnotu $f(x)$ pro $x = 1/2$.

c) Napište, co vyjadřuje zbytek $R_3(x)$. Napište Lagrangeův tvar zbytku $R_3(x)$ a $R_3(1/2)$.

Výsledky: Derivace $f'(x) = 2\ln x + 2 + \dfrac{1}{x}$, $f''(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}$, $D(f) = D(f') = D(f'') = (0, \infty)$, tečna: $y = 3(x - 1)$, $T_2(x) = 3(x - 1) + \dfrac{1}{2}(x - 1)^2$, $f(1/2) \doteq T_2(1/2) = -11/8$,
c) zbytek $R_3(x) = f(x) - T_2(x)$ vyjadřuje chybu (nepřesnost) při aproximaci funkční hodnoty $f(x)$ hodnotou $T_2(x)$, $f'''(x) = -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}$, Lagrangeův tvar zbytku: existuje bod ξ ležící mezi $x_0 = 1$ a x, a to takový, že $R_3(x) = \dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{2}{\xi^2} + \dfrac{2}{\xi^3}\right) \cdot (x - 1)^3$, $R_3(1/2) = \dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{2}{\xi^2} + \dfrac{2}{\xi^3}\right) \cdot (-\dfrac{1}{2})^3, \xi \in (1/2, 1)$.

V následujících úlohách je dána funkce f, stupeň n a body x_0, $\overline{x}$.

a) Napište rovnici tečny ke grafu dané funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$.

b) Napište Taylorův polynom $T_n(x)$ dané funkce f se středem v bodě x_0.
Pomocí $T_n(x)$ určete přibližně hodnotu $f(x)$ pro $x = x_1$ (ve tvaru zlomku).

c) Napište Lagrangeův tvar zbytku $R_{n+1}(x)$ a $R_{n+1}(\overline{x})$ pro tuto úlohu.
Pomocí $R_{n+1}(x_1)$ odhadněte velikost chyby přibližného výpočtu hodnoty $f(\overline{x})$ z úlohy b).

$\boxed{2}$ $f(x)=\sqrt{2x+1}-\dfrac{x^2}{2},\quad n=2,\ x_0=0, \overline{x}=3/4.$

[Výsl.:Derivace $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}-x$, $f''(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{(2x+1)^3}}-1$, $D(f)=\langle -1/2,\infty)$, $D(f')=D(f'')=(-1/2,\infty)$,

$T_2(x)=1+x-x^2$, $f(3/4)\doteq T_2(3/4)=19/16\doteq 1.2$, $f'''(x)=\dfrac{3}{\sqrt{(2x+1)^5}}$, $R_3(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{(2\xi+1)^5}}\,x^3$,

$|R_3(3/4)|=|f(3/4)-T_2(3/4)|\le 27/128.$]

$\boxed{3.}$ Funkce $f(x)=\ln(x+2),\ n=2,\ x_0=-1, \overline{x}=-0.8.$

[Výsl.: Derivace $f'(x)=\dfrac{1}{x+2}$, $f''(x)=\dfrac{-1}{(x+2)^2}$,

$D(f)=D(f')=D(f'')=(-2,\infty)$, $T_2(x)=(x+1)-\dfrac{1}{2}\,(x+1)^2$,

$f(-0.9)\doteq T_2(-0.9)=0.095$, $f'''(x)=\dfrac{2}{(x+2)^3}$,

$R_3(x)=\dfrac{1}{3(\xi+2)^3}\,(x+1)^3,\ R_3(-0.9)=\dfrac{1}{3(\xi+2)^3}\cdot\dfrac{1}{10^3},\ \xi\in\langle -1,-0.9\rangle$.

$|R_3(-0.9)|=|f(-0.9)-T_2(-0.9)|\le 1/3000.$]

$\boxed{4.}$ Funkce $f(x)=\mathrm{e}^{2x-4},\ n=2,\ x_0=2, \overline{x}=3/2.$

[Výsl.: derivace $f'(x)=2\,\mathrm{e}^{2x-4}$, $D(f)=D(f')=(-\infty,\infty)$, $f'(2)=2$, tečna:
$y=1+2(x-2)$, $f''(x)=4\,\mathrm{e}^{2x-4}$, $f''(2)=4$,
$T_2(x)=1+2(x-2)+2\,(x-2)^2$, $f(3/2)\doteq T_2(3/2)=1/2$, $f'''(x)=8\,\mathrm{e}^{2x-4}$,

$R_3(x)=\dfrac{f'''(\xi)}{3!}\,(x-2)^3=\dfrac{4\,\mathrm{e}^{2\xi-4}}{3}\,(x-2)^3$, kde ξ leží mezi $x_0=2$ a x,
$R_3(3/2)=-\dfrac{\mathrm{e}^{2\xi-4}}{6},\ \xi\in\langle 3/2,2\rangle,\quad |R_3(3/2)|=|f(3/2)-T_2(3/2)|\le 1/6$]

$\boxed{5.}$ $f(x)=\sin x,\quad n=3,\ x_0=0, \overline{x}=3/4.$

[Výsl.: derivace $f'(x)=\cos x$, $D(f)=D(f')=(-\infty,\infty)$, $f'(0)=1$, tečna: $y=x$, $f''(x)=-\sin x$,

$f''(0)=0, f'''(x)=-\cos x$, $f'''(0)=-1$, $\quad T_3(x)=x-\dfrac{1}{6}\,x^3$, $f(3/4)\doteq T_2(3/4)=87/128$, $f^{(4)}(x)=\sin x$,

$f^{(4)}(0)=0$, je tedy $T_3(x)=T_4(x)$. Pro odhad nepřesnosti $|f(x)-T_3(x)|$ lze použít $|R_4(x)|$, lepší výsledek však dostaneme, použijeme-li $|R_5(x)|$. Všimněme si, že $f^{(5)}(x)=\cos x=f'(x)$. V derivacích vyššího řádu už se tedy budou jenom periodicky opakovat fce $\sin x, \cos x, -\sin x, -\cos x$. V bodě $x_0=0$ to budou hodnoty 0, 1, 0, -1.

Pak je $R_5(x)=\dfrac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5=\dfrac{\cos\xi}{120}\,x^5$, kde ξ leží mezi $x_0=0$ a x.

Odtud získáme odhad $|R_5(3/4)|\le\dfrac{1}{120}\cdot\dfrac{3^5}{4^5}=\dfrac{81}{40960}$.

Poznámka: Přesná hodnota sin(3/4) je 0,6816387..., námi vypočtená přibližná hodnota je 0,6796875...Je tedy skutečná chyba přibližného výpočtu 0,00195, zatímco její odhad shora je 0,00198. Odhad nepřesnosti však často bývá "pesimističtější", než je skutečná chyba.

$\boxed{6.}$ Funkce $f(x)=\ln(2x+1)-\dfrac{x}{2},\ n=2,\ x_0=0, \overline{x}=1/2.$

Výsl.: a) Derivace $f'(x)=\dfrac{2}{2x+1}-\dfrac{1}{2}$, $f''(x)=\dfrac{-4}{(2x+1)^2}$, $\quad D(f)=D(f')=(-1/2,+\infty)$.

b) $f(0)=0, f'(0)=3/2$, rovnice tečny: $y=\dfrac{3}{2}\,x$.

c) $f''(0)=-4,\quad T_2(x)=\dfrac{3}{2}\,x-2\,x^2,\ f(1/2)\doteq T_2(1/2)=1/4.$

d) $f'''(x)=\dfrac{16}{(2x+1)^3}$, $R_3(x)=\dfrac{f'''(\xi)}{3!}\,x^3=\dfrac{8}{3\,(2\,\xi+1)^3}\,x^3$, kde ξ leží mezi

$x_0=0$ a x, $\quad R_3(1/2)=\dfrac{8}{3\,(2\,\xi+1)^3}\cdot\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{3\,(2\,\xi+1)^3}$, $\xi\in\langle 0,1/2\rangle$

$|R_3(1/2)|=|f(1/2)-T_2(1/2)|\le 1/3.$

$\boxed{\mathbf{7.}}$ Funkce $f(x)=\sqrt{2x-1}-\dfrac{x^2}{3},\ n=2,\ x_0=1, \overline{x}=3/2$

[Výsl.: Derivace $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}-\dfrac{2x}{3},\ f''(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{(2x-1)^3}}-2/3,\ D(f)=\langle 1/2,\infty),$

$D(f')=D(f'')=(1/2,\infty), T_2(x)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\,(x-1)-\dfrac{5}{6}(x-1)^2,\ f(3/2)\doteq T_2(3/2)=5/8,$

$f'''(x)=\dfrac{3}{\sqrt{(2x-1)^5}},\ R_3(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{(2\xi-1)^5}}\,(x-1)^3,\ |R_3(3/2)|=|f(3/2)-T_2(3/2)|\leq 1/16.$]