Tečna ke grafu funkce, Taylorův polynom, Lagrangeův tvar zbytku, přibližný výpočet funkční hodnoty, odhad chyby (nepřesnosti) tohoto výpočtu (pracovní text)

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Předpoklad: Funkce f má derivace až do řádu n v bodě x_0. Pak Taylorův polynom n-tého stupně dané funkce f (se středem) v bodě x_0 značíme $T_n(x)$ a je definován takto:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Poznámka 1. Postupným derivováním lze ověřit významnou vlastnost Taylorova polynomu v bodě x_0:

$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0),\ k = 0, 1, ...n.$

Taylorův polynom n-tého stupně a daná funkce f tedy mají v bodě x_0 stejné hodnoty všech derivací až do řádu n.

Lagrangeův tvar zbytku $R_{n+1}(x)$ vyjadřuje chybu (nepřesnost), které se dopustíme při nahrazení funkční hodnoty $f(x)$ hodnotou $T_n(x)$, tj. $R_{n+1}(x) = f(x) - T_n(x)$.

Věta (Taylorova). Nechť funkce f má spojité derivace až do řádu $n + 1$ v okolí $U(x_0)$ bodu x_0.

Pak pro každé $x \in U(x_0)$ existuje mezi body x_0 a x bod ξ tak, že $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

Poznámka2. Protože přesnou polohu bodu ξ zpravidla neznáme, můžeme zmíněnou nepřesnost pomocí tvaru zbytku pouze odhadnout shora. Lze použít odhad $|R_{n+1}(x)| \le \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,|(x-x_0)|^{n+1}$, kde M_{n+1} je maximum funkce $|f^{(n+1)}|$ na intervalu $\langle x_0, x\rangle$, resp. $\langle x, x_0\rangle$.

Poznámka 3. Lagrangeův tvar zbytku a jeho použití pro odhad nepřesnosti $|R_{n+1}(x)| = |f(x) - T_n(x)|$ **nejsou v požadavcích zkoušky Beta**. V následujících příkladech je to vždy úloha c).

V následujících úlohách je dána funkce f, stupeň polynomu n a body x_0, x_1.

a) Napište rovnici tečny ke grafu dané funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$.

b) Napište Taylorův polynom $T_n(x)$ dané funkce f se středem v bodě x_0.
Pomocí $T_n(x)$ určete přibližně hodnotu $f(x)$ pro $x = x_1$ (ve tvaru zlomku).

c) (pouze zkouška Alfa) Napište Lagrangeův tvar zbytku $R_{n+1}(x)$ a $R_{n+1}(x_1)$ pro tuto úlohu.
Pomocí $R_{n+1}(x_1)$ odhadněte velikost chyby přibližného výpočtu hodnoty $f(x_1)$ z úlohy b).

$\boxed{\textbf{1.}}$ Funkce $f(x) = \sqrt{2x - 1} - \dfrac{x^2}{3},\ n = 2,\ x_0 = 1, x_1 = 3/2$

Výsledky. a) Derivace $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} - \dfrac{2x}{3}$, $D(f) = \langle 1/2, \infty), D(f') = (1/2, \infty)$, $f(1) = 2/3$, $f'(1) = 1/3$, tečna: $y = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}(x - 1)$,

b) $f''(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{(2x-1)^3}} - \dfrac{2}{3}$, $f''(1) = -\dfrac{5}{3}$, $T_2(x) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}(x - 1) - \dfrac{5}{6}(x - 1)^2$, $f(3/2) \doteq T_2(3/2) = 5/8$,

c) $f'''(x) = \dfrac{3}{\sqrt{(2x-1)^5}}$, $R_3(x) = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{(2\xi - 1)^5}}\,(x - 1)^3$, kde ξ leží mezi $x_0 = 1$ a x,

$R_3(3/2) = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{(2\xi-1)^5}} \cdot \dfrac{1}{8}$, $\xi \in (1, 3/2)$. Existence bodu ξ je zaručena mezi daným středem $x_0 = 1$ a daným bodem $x_1 = 3/2$, ale přesnou polohu neznáme. Funkce $g(\xi) = 2 \cdot \sqrt{(2\xi - 1)^5}$ je nezáporná a rostoucí na intervalu $\langle 1,\ 3/2\rangle$, proto převrácená hodnota $\dfrac{1}{g(\xi)} = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{(2\xi-1)^5}}$ je na tomto intervalu klesající.

Odhad shora pro $|R_3(1/2)|$ tedy získáme dosazením levého krajního bodu $\xi = 1$ do výrazu $R_3(3/2)$, což vede k výsledku $|R_3(3/2)| = |f(3/2) - T_2(3/2)| \le 1/16$.

Poznámka 4. Vypočtený výsledek lze interpretovat takto: hodnota funkce $f(3/2) \doteq 5/8$ (přibližná hodnota), přičemž přesná hodnota leží v intervalu $I = (\dfrac{5}{8} - \dfrac{1}{16}, \dfrac{5}{8} + \dfrac{1}{16}) = (\dfrac{9}{16}, \dfrac{11}{16})$.

$\boxed{\mathbf{2.}}$ Funkce $f(x) = \ln(x+2),\ n = 2,\ x_0 = -1, x_1 = -4/5.$

Výsledky. a) Derivace $f'(x) = \dfrac{1}{x+2}, D(f) = D(f') = (-2, \infty),\ f(-1) = 0,\ f'(-1) = 1,$ tečna: $y = x + 1,$

b) $f''(x) = \dfrac{-1}{(x+2)^2}, f''(-1) = -1,\ T_2(x) = (x+1) - \dfrac{1}{2}(x+1)^2,\ f(-4/5) \doteq T_2(-4/5) = 9/50,$

c) $f'''(x) = \dfrac{2}{(x+2)^3}, R_3(x) = \dfrac{1}{3(\xi+2)^3}(x+1)^3,$ kde ξ leží mezi $x_0 = 2$ a x. V bodě $x_1 = -4/5$ tedy platí $R_3(-4/5) = \dfrac{1}{3(\xi+2)^3} \cdot \dfrac{1}{125}, \xi \in \langle -1, -4/5 \rangle.$

Funkce $h(\xi) = 3\,(\xi+2)^3$ ve jmenovateli je nezáporná a rostoucí na intervalu $\langle -2, +\infty)$, tedy též na $\langle -1, -4/5 \rangle$.
Proto její převrácená hodnota, tj. funkce $g(\xi) = \dfrac{1}{3(\xi+2)^3}$ je nezáporná a klesající na intervalu $\langle -1, -4/5 \rangle$.

Odhad shora pro $|R_3(-4/5)|$ tedy získáme dosazením levého krajního bodu $\xi = -1$ do výrazu $R_3(-4/5)$.
Tak dospějeme k výsledku $\left|R_3(-\dfrac{4}{5})\right| = \left|f(-\dfrac{4}{5}) - T_2(-\dfrac{4}{5})\right| \leq \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{125} = \dfrac{1}{375}.$

$\boxed{\mathbf{3.}}$ Funkce $f(x) = \mathrm{e}^{2x-4},\ n = 3,\ x_0 = 2, x_1 = 3/2.$

Výsledky. a) Derivace $f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x-4},\ D(f) = D(f') = (-\infty, \infty),\ f(2) = 1,\ f'(2) = 2,$ tečna: $y = 1 + 2(x-2),$

b) $f''(x) = 4\,\mathrm{e}^{2x-4},\ f''(2) = 4, f'''(x) = 8\,\mathrm{e}^{2x-4},\ f'''(2) = 8,$

$T_3(x) = 1 + 2(x-2) + 2\,(x-2)^2 + \frac{4}{3}\,(x-2)^3,\ f(3/2) \doteq T_3(3/2) = 1/3,$

c) $f^{(4)}(x) = 16\,\mathrm{e}^{2x-4},\ R_4(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,(x-2)^4 = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{2\xi-4}}{3}\,(x-2)^4,$ kde ξ leží mezi $x_0 = 2$ a x,

$R_4(3/2) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2\xi-4}}{3} \cdot \dfrac{1}{16} = \dfrac{\mathrm{e}^{2\xi-4}}{24},\ \xi \in \langle 3/2, 2 \rangle, \quad |R_4(3/2)| = |f(3/2) - T_3(3/2)| \leq 1/24.$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $f(x) = \sqrt{2x+1} - \dfrac{x^2}{2}, \quad n = 2,\ x_0 = 0, x_1 = 3/4.$

Výsledky. a) Derivace $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}} - x,\ D(f) = \langle -1/2, \infty),\ D(f') = (-1/2, \infty),\ f(0) = 1,\ f'(0) = 1,$

tečna: $y = 1 + x,$

b) $f''(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{(2x+1)^3}} - 1,\ f''(0) = -2,\ T_2(x) = 1 + x - x^2,\ f(3/4) \doteq T_2(3/4) = 19/16,$

c) $f'''(x) = \dfrac{3}{\sqrt{(2x+1)^5}},\ R_3(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{(2\xi+1)^5}}\,x^3,$ kde ξ leží mezi $x_0 = 0$ a x,

$|R_3(3/4)| = |f(3/4) - T_2(3/4)| \leq 27/128.$

$\boxed{\mathbf{5.}}$ Funkce $f(x) = (2x+1)\ln x,\ n = 2,\ x_0 = 1, x_1 = 1/2$

Výsledky. a) Derivace $f'(x) = 2\ln x + 2 + \dfrac{1}{x},\ D(f) = D(f') = (0, \infty), \quad f(1) = 0,\ f'(1) = 3,$ tečna: $y = 3(x-1),$

b) $f''(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2},\ f''(1) = 1,\ T_2(x) = 3(x-1) + \dfrac{1}{2}\,(x-1)^2,\ f(1/2) \doteq T_2(1/2) = -11/8,$

c) zbytek $R_3(x) = f(x) - T_2(x)$ vyjadřuje chybu (nepřesnost) při aproximaci funkční hodnoty $f(x)$ hodnotou $T_2(x)$,

$f'''(x) = -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{x^3},$ Lagrangeův tvar zbytku: existuje bod ξ ležící mezi $x_0 = 1$ a x, a to takový, že

$R_3(x) = \dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{2}{\xi^2} + \dfrac{2}{\xi^3}\right) \cdot (x-1)^3, \quad R_3(1/2) = \dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{2}{\xi^2} + \dfrac{2}{\xi^3}\right) \cdot (-\dfrac{1}{2})^3 = -\dfrac{1}{24}\left(\dfrac{1}{\xi^3} - \dfrac{1}{\xi^2}\right), \xi \in (1/2, 1).$

Funkce $g(\xi) = \dfrac{1}{\xi^3} - \dfrac{1}{\xi^2}$ je nezáporná a klesající na intervalu $\langle 1/2,\ 1 \rangle$. Pro odhad $|R_3(1/2)|$ shora je tedy

$M_3 = g(1/2) = 4$. Potom $|R_3(1/2)| = |f(1/2) - T_2(1/2)| \leq \dfrac{1}{24} \cdot 4 = 1/6.$

$\boxed{\mathbf{6.}}$ $f(x) = \sin x, \quad n = 3,\ x_0 = 0, x_1 = 3/4.$

Výsledky. a) Derivace $f'(x) = \cos x$, $D(f) = D(f') = (-\infty, \infty)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, tečna: $y = x$,

b) $f''(x) = -\sin x$, $f''(0) = 0$, $f'''(x) = -\cos x$, $f'''(0) = -1$, $\quad T_3(x) = x - \dfrac{1}{6}\,x^3$, $f(3/4) \doteq T_3(3/4) = 87/128$.

b) Pro odhad nepřesnosti $|f(x) - T_3(x)|$ lze použít $|R_4(x)|$. Všimněme si však, že $f^{(4)}(x) = \sin x$, je tedy $f^{(4)}(0) = 0$, a proto platí, že $T_3(x) = T_4(x)$.

Pro nepřesnost výpočtu hodnoty $f(3/4)$ lze tedy použít $|R_5(x)|$. Po výpočtu $f^{(5)}(x) = \cos x$ dostaneme

$R_5(x) = \dfrac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5 = \dfrac{\cos\xi}{120}\,x^5$, kde ξ leží mezi $x_0 = 0$ a x.

Protože $|\cos\xi| \le 1$ pro každé $\xi \in \mathbb{R}$, získáme tak odhad shora $|R_5(3/4)| \le \dfrac{1}{120} \cdot \dfrac{3^5}{4^5} = \dfrac{81}{40960}$.

Poznámka 5. Přesná hodnota sin(3/4) je 0,68163876..., námi vypočtená přibližná hodnota je 0,6796875...
Je tedy **skutečná** chyba přibližného výpočtu 0,00195, zatímco její odhad shora je 0,00198. To je však spíše výjimečná situace, odhad nepřesnosti často bývá výrazněji "pesimističtější", než je skutečná chyba.

Poznámka(důležitá). Protože $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$, budou se v derivacích funkce $\sin x$ periodicky opakovat jenom funkce $\sin x, \cos x, -\sin x, -\cos x$. V bodě $x_0 = 0$ to znamená hodnoty 0, 1, 0, -1. Analogicky platí pro funkci $\cos x$, $x_0 = 0$. Velmi rychle tak dostaneme např. následující Taylorovy polynomy **se středem** $x_0 = 0$.

Taylorův polynom 7. stupně (a též 8. stupně) funkce $\sin x$ je $T_7(x) = x - \dfrac{1}{6}\,x^3 + \dfrac{1}{120}\,x^5 - \dfrac{1}{5040}\,x^7$.

Taylorův polynom 6. stupně (a též 7. stupně) funkce $\cos x$ je $T_6(x) = 1 - \dfrac{1}{2}\,x^2 + \dfrac{1}{24}\,x^4 - \dfrac{1}{720}\,x^6$.

Za pozornost stojí velmi rychlý pokles hodnoty koeficientů u vyšších mocnin. Pro dosažení "malé nepřesnosti"přibližné hodnoty $f(x_1)$ v bodě x_1, který je "blízko"x_0, pak stačí "nízký"stupeň polynomu.

$\boxed{\mathbf{7.}}$ Funkce $f(x) = \ln(2x+1) - \dfrac{x}{2}$, $n = 2$, $x_0 = 0, x_1 = 1/2$.

Výsledky. a) Derivace $f'(x) = \dfrac{2}{2x+1} - \dfrac{1}{2}$, $\quad D(f) = D(f') = (-1/2, +\infty)$. $f(0) = 0, f'(0) = 3/2$,
rovnice tečny: $y = \dfrac{3}{2}\,x$.

b) $f''(x) = \frac{-4}{(2x+1)^2}$, $\quad f''(0) = -4$, $\quad T_2(x) = \dfrac{3}{2}\,x - 2\,x^2$, $f(1/2) \doteq T_2(1/2) = 1/4$.

c) $f'''(x) = \dfrac{16}{(2x+1)^3}$, $R_3(x) = \dfrac{f'''(\xi)}{3!}\,x^3 = \dfrac{8}{3\,(2\,\xi+1)^3}\,x^3$, kde ξ leží mezi $x_0 = 0$ a x,

$R_3(1/2) = \dfrac{8}{3\,(2\,\xi+1)^3} \cdot \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{3\,(2\,\xi+1)^3}$, $\xi \in \langle 0, 1/2\rangle$

Funkce $g(\xi) = \dfrac{1}{(\xi+1)^3}$ je nezáporná a klesající na intervalu $\langle 0, 1/2\rangle$. Odhad shora pro $|R_3(1/2)|$ vypočítáme dosazením levého krajního bodu $\xi = 0$ do výrazu $R_3(1/2)$.
Získáme tak výsledek $|R_3(1/2)| = |f(1/2) - T_2(1/2)| \le 1/3$.

Literatura:

[1] J. Neustupa: **Matematika I.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2017 (též 2014, 2013).

[2] S.Kračmar, F. Mráz, J.Neustupa: **Sbírka příkladů z Matematiky I**. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2017 (též 2014, 2013).

[3] E. Brožíková, M. Kittlerová: **Diferenciální počet funkcé jedné proměnné** (řešené příklady). Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2007.