Trojný integrál $\int\int\int_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

Nutností je znalost AG v $\mathbb{E}_3$, kvadratické plochy

Předpoklad (NP pro existenci):

$M \subset \mathbb{E}_3$ je omezená množina, funkce $f(x,y,z)$ je omezená na M

Fyzikální aplikace: hmotnost nehomogenního tělesa

I. (Speciální případ)

Trojný integrál na kvádru

a) dělení D

b) volba V bodů

c) Riemannův součet funkce f při dělení D a volbě bodů V:

$s(f, D, V)$

Definice.

Říkáme, že funkce $f(x, y, z)$ je integrovatelná na kvádru K, jestliže existuje vlastní limita Riemannových součtů, tj. $\lim_{\|D\|\to 0} s(f, D, V) = S$.

II. Trojný integrál na obecné množině M

převedeme na integrál na kvádru, viz. kap. II.5 (J. Neustupa).

Fubiniova věta - výpočet $\int\int\int_M f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

převod integrálu trojného na trojnásobný,

je-li M tzv. elementární obor integrace

Věta Fubiniova (II.7.2.).

Nechť funkce $f(x,y,z)$ je spojitá na M, kde M je elementární obor integrace vzhledem k rovině xy.

Pak existuje

$$\iiint_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= \iint_{M_{xy}} \left(\int_{\Phi_1(x,y)}^{\Phi_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Poznámka: Podobně (cyklicky) při elementárním oboru vzhledem k rovině xz, resp. yz.

Př.

Existence trojného integrálu Analogicky jako pro dvojný integrál

Nutná podmínka pro existenci:
M je omezená množina, fce f je omezená na M.

Postačující podmínka pro existenci
1. varianta
Funkce $f(x, y, z)$ je spojitá na M, kde M je elementární obor integrace - viz Fubiniova věta pro trojný integrál.

2. Pro obecnější podm. potřebujeme nový pojem:
Množina $M \subset \mathbb{E}_3$ se nazývá měřitelná,
je-li omezená a existuje integrál $\displaystyle\int\!\!\int\!\!\int_M 1 \cdot \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.
Jeho hodnotu značíme $\mu_3(M)$ a nazýváme
třírozměrnou Jordanovou mírou množiny M

Věta.

Množina $M \subset \mathbb{E}_3$ je měřitelná $\Longleftrightarrow$ M je omezená a $\mu_3(\partial M) = 0$.

Příklady

Měřitelná je libovolná množina M v $\mathbb{E}_3$, jejíž hranice ∂M je jednoduchá (po částech) hladká plocha, neboť $\mu_3(\partial M) = 0$.

Věta II.6.1. (Postačující podmínka pro existenci)

Nechť M je uzavřená a měřitelná množina v $\mathbb{E}_3$ a fce f je spojitá na M.

Pak existuje $\displaystyle\iiint_M f \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

V odst. II.6.1 jsou uvedeny další varianty postačující podmínky, např.

fce f je spojitá a omezená na $M \setminus D$, kde M je měřitelná a $\mu_3(D) = 0$

II.2 Některé vlastnosti trojného integrálu

(za předpokladu existence integrálů)

a) $$\iiint_M \mathbf{konst} \cdot f \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \mathbf{konst} \cdot \iiint_M f \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

b) $$\iiint_M (f+g) = \iiint_M f + \iiint_M g.$$

c) Je-li $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, pak

$$\iiint_{M_1 \cup M_2} f = \iiint_{M_1} f + \iiint_{M_2} f.$$

d) Je-li $f(x,y,z) \geq 0$ na M, pak $\displaystyle\iiint_M f \geq 0$.

e) Je-li f omezená fce na M a $\mu_3(M) = 0$, pak $\displaystyle\iiint_M f = 0$.

Některé aplikace integrálů (přehled vzorců obecně)

Symbol $\int_D f(X)\,\mathrm{d}X$ znamená integrál

a) dvojný, b) trojný, c) křivkový, d) plošný

1. míra množiny: $\mu(D) = \displaystyle\int_D 1 \cdot \mathrm{d}X$

2. hmotnost: $m = \displaystyle\int_D \varrho(X)\,\mathrm{d}X$

3. moment setrvačnosti vzhledem k útvaru U (bod, přímka, rovina):

$$J_U = \int_D (d_U)^2 \cdot \varrho(X)\,\mathrm{d}X$$

d_U je vzdálenost bodu X od útvaru U.

4. souřadnice těžiště T, statický moment M_U:

$$x_T = \frac{1}{m} \int_D x \cdot \varrho(X)\, \mathrm{d}X$$

cyklická záměna pro y_T, z_T

5. objem ”válcového”tělesa

$$V = \int\int_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

Příklad.

Cylindrické souřadnice v $\mathbb{E}_3$

Zobecněné cylindrické souřadnice v $\mathbb{E}_3$

Sférické souřadnice v $\mathbb{E}_3$