V. Určitý (Riemannův) integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Úloha: Obsah obrazce mezi grafem funkce f a osou x

Předpoklady (nutné podmínky pro existenci):

1. $\langle a, b\rangle$ je uzavřený a omezený interval
2. f je omezená funkce na $\langle a, b\rangle$.

Definice

Dělení intervalu

Riemannův součet a jeho limita

Riemannův integrál

? existence integrálu

Věta 3.1 (Postač.podm. pro existenci)

Je-li fce $\boldsymbol{f}$ spojitá v omezeném $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$, pak je integrovatelná v $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$.

Zobecněná postač. podm. pro existenci

Fce $\boldsymbol{f}$ je omezená a po částech spojitá v omezeném $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$, tj. $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ lze rozdělit na konečně mnoho dílčích intervalů a fce f je spojitá ve vnitřku každého z nich.

Př. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ neexistuje, ALE $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ existuje

Geometrický význam

Rozšíření definice

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Střední hodnota funkce f v $\langle a, b\rangle$

je číslo

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

geometrický význam

Některé další vlastnosti Riemannova integrálu

Věty 3.6 a 3.7

Jestliže existují integrály vpravo, pak platí:

$$\int_a^b \mathbf{konst} \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \mathbf{konst} \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Věta 3.8 (Riemannův integrál jako funkce horní meze)

Nechť funkce $\boldsymbol{f}$ je integrovatelná v $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$. Pak platí:

a) funkce $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \int_a^x \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\, \mathrm{d}\boldsymbol{t}$ je spojitá v $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$,

b) rovnost $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}\left(\int_a^x \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\, \mathrm{d}\boldsymbol{t}\right) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ platí ve všech bodech $\boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, ve kterých je funkce f spojitá.

Důsledek.

Je-li funkce f spojitá v omezeném intervalu $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$, pak $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \int_a^x \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\, \mathrm{d}\boldsymbol{t}$ je primitivní funkce k funkci f v $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$.

Výpočet Riemannova integrálu

Věta 4.1 (Základní věta integrálního počtu)

Je-li funkce $\boldsymbol{f}$ spojitá v intervalu $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ a $\boldsymbol{F}$ je funkce primitivní k funkci $\boldsymbol{f}$ v $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$, pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

.

Název: Newtonova-Leibnizova formule, zápis $[F(x)]_a^b$

Věta 4.3 (Integrace per-partes v určitém integrálu)

Nechť funkce u, v mají spojité derivace v $\langle a, b\rangle$.

Potom

$$\int_a^b u' \cdot v \,\mathrm{d}x = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u \cdot v' \,\mathrm{d}x.$$

Věta 4.5 (Substituce v určitém integrálu)

Nechť funkce $t = g(x)$ má spojitou derivaci v $\langle a, b\rangle$, který zobrazuje do J.
Nechť funkce $f(t)$ je spojitá v J.

Potom platí:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

kde $g(x) = t$.

Další aplikace Riemannova integrálu

Objem rotačního tělesa

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Délka křivky $C : y = f(x), x \in \langle a, b \rangle$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

Nevlastní integrál

Nutná podm. pro existenci Riemannova integrálu:

Funkce f je omezená na omezeném intervalu $\langle a, b \rangle$

Není-li tato podm. splněna, pak mluvíme o singulární mezi a o nevlastním integrálu

Dvě situace:
nevlastní vlivem meze,   nevlastní vlivem funkce

Nevlastní integrál se singulární horní mezí

Předpoklad: Fce f je definovaná v $\langle a, b)$, kde $b = +\infty$ nebo fce f není omezená v $\langle a, b)$.
Nechť f je integrovatelná v $\langle a, t\rangle$ pro každé $t < b$.

Definice. Jestliže existuje $\lim\limits_{t \to b_-} \left(\int_a^t f(x)\, \mathrm{d}x \right)$, pak její hodnota se nazývá nevlastní integrál se singulární horní mezí, zapisujeme $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$.

Je-li nevlastní integrál konečný, pak říkáme, že konverguje.
Pokud ne, pak říkáme, že diverguje.

Nevlastní integrál se singulární dolní mezí

je definován analogicky

Př. 1a. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

Př. 1b. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

Poznámka: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, viz Neustupa

Výpočet nevlastního integrálu

1. Postupujeme podle definice NEBO

2. podle následující věty (pozor na předpoklady):

Věta 6.6 Nechť funkce $\boldsymbol{f}$ je spojitá v intervalu $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Potom existuje integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to b_-} F(t) - \lim_{t\to a_+} F(t),$$

pokud výraz na pravé straně má smysl (obě limity existují a jejich rozdíl je definován). Zde F označuje funkci primitivní k funkci f v (a, b).

Poznámka. Je-li funkce f spojitá v omezeném intervalu $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$, pak hodnoty limit jsou $F(b)$, resp. $F(a)$ a jedná se o Newtonovu-Leibnizovu formuli pro ”běžný”Riemannův integrál.