

Vektorový prostor

Příklady:

Př.1. $\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^n$...aritmetický n -rozměrný prostor

Dvě operace v \mathbb{R}^n :

součet vektorů $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ a $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ je vektor

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n),$$

násobek vektoru \mathbf{u} číslem λ je vektor

$$\lambda \cdot \mathbf{u} = (\lambda u_1, \dots, \lambda u_n).$$

Př. 2. $V(\mathbb{E}_2)$...množina vektorů v \mathbb{E}_2 , vektor je množina všech navzájem ekvivalentních orientovaných úseček v \mathbb{E}_2 .

$V(\mathbb{E}_3)$...množina vektorů v \mathbb{E}_3 ,

Tyto dvě operace mají následující vlastnosti (pišme obecně množinu V):

(a) Pro libovolné vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ a libovolné $\lambda \in \mathbb{R}$ patří součet $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ i součin $\lambda \cdot \mathbf{u}$ do V .

(b) Tyto dvě operace jsou tzv. rozumné, tj. komutativní, asociativní, distributivní.

Pro libovolné vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ a libovolná reálná čísla α, β platí:

$$(b1) \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u},$$

$$(b2) \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}),$$

$$(b3) \quad 1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u},$$

$$(b4) \quad \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{u}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{u},$$

$$(b5) \quad \alpha \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{u} + \alpha \cdot \mathbf{v}.$$

$$(b6) \quad (\alpha + \beta) \cdot \mathbf{u} = \alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{u}.$$

(c) Ve V existuje tzv. nulový vektor \mathbf{o} . Pro libovolný vektor \mathbf{u} pak platí: $\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u}$.

(d) Ke každému vektoru $\mathbf{u} \in V$ existuje vektor $(-\mathbf{u}) \in V$ (tzv. opačný vektor k vektoru \mathbf{u}) tak, že platí: $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}$.

Poznámka. Vlastnosti (a) se říká *uzavřenost množiny V* vůči oběma operacím.

Definice. Množina V s operacemi sčítání prvků (vektorů) a násobení vektorů reálnými čísly, které mají **vlastnosti** a) až d) **se nazývá vektorový prostor.**

Věta 1.4. Ve vektorovém prostoru V existuje jediný nulový vektor.

Věta 1.7. Pro libovolný vektor $u \in V$ a pro libovolné číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

$$1) 0 \cdot u = o, \quad 2) (-1) \cdot u = -u, \quad 3) \alpha \cdot o = o.$$

Další příklady (se standardně definovanými operacemi):

Př. 3. $C_{\langle a,b \rangle}$... mn. spojitých funkcí v $\langle a, b \rangle$ je vektorový prostor

Př. 4. P_2 ... mn. všech polynomů **stupně právě dva**,
tj. funkce tvaru $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ **není vektorový prostor**

Př. 5. P'_2 ... mn. všech polynomů **stupně nejvýše dva** je vektorový prostor

Př. 6. Množina všech matic téhož typu $m \times n$ je vektorový prostor

Poznámka. Podprostor vektorového prostoru.

Příklad Prostor P'_2 je podprostorem vektorového prostoru $C_{(-\infty, \infty)}$

Lineární závislost, nezávislost (skupiny vektorů)

Příklad 0. Určete vektor w , který je lin. kombinací vektorů $u = (2, 3, -1)$, $v = (-1, 2, 2)$ s koeficienty $\alpha = -2$, $\beta = 2$.
Výsledek: $w = \alpha u + \beta v = (-6, -2, 6)$.

Definice. Skupinu vektorů u_1, \dots, u_n nazýváme *lineárně závislou*, jestliže existují reálná čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (aspoň jedno je $\neq 0$) tak, že platí $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = o$. (*)
Skupinu vektorů, která není lineárně závislá, nazýváme *lineárně nezávislou*.

Poznámka. Skupina vektorů je lin. nezávislá právě tehdy, když vektorová rovnice (*) má pouze nulové řešení $\alpha_i = 0$ pro $\forall i$.

Poznámka. V tomto textu použijeme zkratky LN (lin. nezávislá) a LZ (lin. závislá).

Věta 1.7. Jestliže skupina vektorů obsahuje nulový vektor, pak je tato skupina LZ.

Věta 1.8. Skupina vektorů je LZ právě tehdy, když alespoň jeden z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.

Skupina dvou nenulových vektorů je tedy LZ právě tehdy, když jeden z nich je násobkem druhého.

Příklad 1. Skupina vektorů $u = (6, -3)$, $v = (-2, 1)$ je LZ, zatímco skupina $a = (3, 2, -3)$, $b = (6, 4, -5)$ je LN.

Příklad 2. Určete, pro které hodnoty parametrů α, β je LN (resp. LZ) skupina dvou vektorů $u = (1, 2, -3)$, $v = (-2, \alpha + 2, \beta)$.
Výsledek: $\alpha = -6, \beta = 6$.

ÚLOHA. Určete, zda daná skupina (tří a více vektorů) je LN nebo LZ.

Postup.

1. **možnost:** Pomocí matice sestavené z daných vektorů (někdy i pomocí determinantu).
2. **možnost:** Postupujeme podle definice, tj.
 1. Sestavíme vektorovou rovnici (*) pro hledané koeficienty (vhodný je zápis vektorů ve sloupcovém tvaru).
 2. Rovnici (*) rozepíšeme do souřadnic a takto vzniklou soustavu rovnic vyřešíme.
 3. **Závěr:** Má-li soustava **pouze nulové řešení**, pak je daná skupina **lin. nezávislá**.
Má-li soustava **i nenulové řešení** (a v tomto případě už jich má nekonečně mnoho), pak je tato skupina **lin. závislá**.

Příklad 3. Skupina tří vektorů $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 2, 3)$, $\mathbf{w} = (3, 5, 4)$ je LZ nebo LN? Výsledek: Daná skupina je LN.

Příklad 4. Vektory $\mathbf{u} = (2, 3, -1)$, $\mathbf{v} = (-1, 2, 2)$, $\mathbf{w} = (-6, -2, 6)$ z Př. 0 jsou LZ. Ověřte!

Poznámka. Libovolné dva z daných tří vektorů jsou LN (ověřte si). Jaká je vzájemná poloha těchto tří vektorů ?

Příklad 1* . (Obměna př. 4a z kap. Úlohy ze ZK)

Dána skupina LN vektorů.

- Co lze říci o skupině, která vznikne přidáním jednoho vektoru (je LN, nebo LZ, nebo nelze říci) ?
- Co lze říci o skupině, která vznikne z té původní odebráním jednoho vektoru ?

Dimenze a báze vektorového prostoru

Definice.

Vektorový prostor V se nazývá **n rozměrný** (má dimenzi n , $\dim V = n$), jestliže

- a) ve V **existuje skupina n vektorů**, která je LN,
- b) **každá** skupina **více než n vektorů** je LZ.

Každou lin. nezáv. skupinu n vektorů z V nazýváme **bází prostoru V** .

Poznámka. Dimenze prostoru V je tedy rovna **maximálnímu počtu** LN vektorů z V .
Počet vektorů v libovolné bázi je stejný a je roven $\dim V$.

Věta 1.15. Libovolný vektor z V lze vyjádřit **jediným způsobem** jako lineární kombinaci vektorů dané báze.

- Příklad 5.** a) Vektory $\mathbf{e}_1 = (1; 0)$; $\mathbf{e}_2 = (0; 1)$ tvoří bázi prostoru $V(\mathbb{E}_2)$.
b) Vektory $\mathbf{a} = (1; 2)$; $\mathbf{b} = (3; 1)$ tvoří bázi prostoru $V(\mathbb{E}_2)$.

Příklad 6. Vektory $\mathbf{i} = (1; 0; 0)$; $\mathbf{j} = (0; 1; 0)$; $\mathbf{k} = (0; 0; 1)$ tvoří bázi prostoru $V(\mathbb{E}_3)$.

Příklad 7. Báze v prostoru \mathbb{R}^n .

Příklad 8.

a) Určete, zda vektory z př. 3, tj. $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 2, 3)$, $\mathbf{w} = (3, 5, 4)$ tvoří bázi vektorového prostoru $V(\mathbb{E}_3)$.

b) Pokud je to možné, vyjádřete vektor $\mathbf{a} = (-2, 1, 4)$ ve tvaru lineární kombinace těchto vektorů.

c) Jaká je vzájemná poloha těchto čtyř vektorů (geometrická interpretace) ?

Příklad 2* . (viz Úlohy ze ZK)

Dána skupina $n + 1$ vektorů v prostoru dimenze n . Je tato skupina LZ, nebo LN nebo nelze jednoznačně odpovědět ?

Dána skupina $n - 1$ vektorů

Dána skupina n vektorů ...