Vlastní čísla a vlastní vektory matice (pracovní text)

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Definice: Číslo λ (může být i komplexní) nazýváme vlastním číslem čtvercové matice A, jestliže existuje **nenulový** vektor X takový, že $A \cdot X = \lambda\, X$. Vektor X se pak nazývá vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu λ.
Poznámka: K vlastnímu číslu existuje nekonečně mnoho vlastních vektorů.

Postup při výpočtu:

1. Nejprve řešíme charakteristickou rovnici matice A, tj. rovnici $\det(A - \lambda E) = 0$. Vlastní čísla matice A jsou kořeny této rovnice.

2. Ke každému vlastnímu číslu λ pak určíme odpovídající vlastní vektory X řešením homogenní soustavy lineárních rovnic $(A - \lambda\, E) \cdot X = O$.

Některé další vlastnosti:

a) Je-li λ vlastním číslem matice A s vlastním vektorem X, pak λ^2 je vlastním číslem matice A^2 se stejným vlastním vektorem X.

b) Je-li matice A regulární, pak λ je vlastním číslem matice A právě tehdy, když $1/\lambda$ je vlastním číslem inverzní matice A^{-1}. Odpovídající vlastní vektory jsou pro obě matice stejné.

c) Číslo $\lambda = 0$ je vlastním číslem matice A právě tehdy, když matice A je singulární.

d) Je-li λ je vlastním číslem matice A s vlastním vektorem X, pak $\overline{\lambda}$ je také vlastním číslem matice A, a to s vlastním vektorem $\overline{X}$.

Další vlastnosti jsou uvedeny ve skriptu [1].

Příklad 1. Je dána matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory této matice.
b) Pokud existuje inverzní matice A^{-1}, pak určete její vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory.

<u>Ř e š e n í :</u> a) Nejprve řešíme charakteristickou rovnici matice A, tj. rovnici $\det(A - \lambda E) = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = 0$$
$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0.$$

Vlastní čísla matice A jsou kořeny této rovnice: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$.

Najděme vlastní vektory $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, které odpovídají vlastnímu číslu $\lambda_1 = 2$.

Určíme je řešením homogenní soustavy $(A - \lambda\, E) \cdot X = \overrightarrow{0}$, kde $\lambda = 2$, tj. $\begin{pmatrix} -1, & -1 \\ -4, & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Je to soustava dvou rovnic
$$\begin{aligned} -x \;-\; y &= 0 \\ -4x - 4y &= 0 \end{aligned}$$

Druhou rovnici můžeme vypustit, neboť je násobkem první rovnice. Soustava se tedy redukuje na jedinou rovnici
$$-x - y = 0,$$

která má nekonečně mnoho řešení.

To je správně, je to "kontrolní místo"správnosti výpočtu. Výše uvedená soustava rovnic pro neznámé x, y totiž má mít nekonečně mnoho řešení. Pokud by tomu tak nebylo, tak je ve výpočtu chyba (ve výpočtu vlastních čísel nebo v dosazení vlastního čísla do soustavy).

Hledané vlastní vektory získáme např. tak, že položíme $y = p$, kde p je libovolné číslo. Pro hodnotu x pak platí $x = -p$. Všechny vlastní vektory odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 2$ lze tedy vyjádřit ve tvaru

$X = p \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, kde p je jakékoliv číslo různé od 0. Podmínku $p \neq 0$ přidáváme proto, že nulový vektor nemůže být vlastním vektorem.

Vlastní vektory odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = -3$ určíme stejným postupem. Obdržíme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} 4x \ - y &= 0 \\ -4x + y &= 0 \end{aligned}$$

Druhou rovnici opět můžeme vypustit, neboť je násobkem první rovnice. Soustava se redukuje na jedinou rovnici

$$4x - y = 0,$$

která má nekonečně mnoho řešení ("kontrolní místo"). Při volbě $x = p$ pak je $y = 4p$. Všechny vlastní vektory odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = -3$ lze vyjádřit ve tvaru $X = p \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, kde p je jakékoliv číslo různé od 0.

b) Daná matice je zřejmě regulární, existuje tedy matice k ní inverzní (ověřte si). Plyne to též z výše uvedených vlastností (nemá nulové vlastní číslo). Podle vlastnosti b) pak odpovíme, že inverzní matice má vlastní číslo $\lambda_1 = 1/2$ s odpovídajícími vlastními vektory stejnými jako má první vlastní číslo matice A, tj. $X = p \cdot (-1,\, 1)^T$, $p \neq 0$ libovolné číslo. Druhé vlastní číslo je $\lambda_2 = -1/3$ s vlastními vektory $X = p \cdot (1,\, 4)^T$, $p \neq 0$ libovolné číslo.

Poznámka. Správnost výsledku lze ověřit podle definice vlastního čísla a vlastního vektoru, tj. ověřením platnosti vztahu $A \cdot X = \lambda\, X$.

Příklad 2. Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Výsledek. Vlastní čísla jsou $\lambda_{1,2} = 2 \pm \mathrm{i}$. Pro vl. číslo λ_1 jsou vlastní vektory $X = (1,\, 1+\mathrm{i}) \cdot p$, $p \neq 0$. Podle vlastnosti d) odpovídají vlastnímu číslu $\lambda_2 = 2 - \mathrm{i}$ vlastní vektory $X = (1,\, 1-\mathrm{i}) \cdot p$, $p \neq 0$.

Příklad 3. a) Najděte vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Zvolte jedno z vlastních čísel, sestavte soustavu rovnic pro výpočet odpovídajících vlastních vektorů a ty pak určete.

c) Určete spektrální poloměr $\rho(A)$ dané matice, tj. největší z absolutních hodnot vlastních čísel.

Ř e š e n í : a) Sestavíme charakteristickou rovnici $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -5 \\ 2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Determinant vypočítáme rozvojem podle 1. řádku, což vede k rovnici

$$(4-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)[(1-\lambda)(3-\lambda) + 5] = 0$$

$$(4-\lambda)[\lambda^2 - 4\lambda + 8] = 0.$$

Kořeny jsou $\lambda_1 = 4$, $\lambda_{2,3} = 2 \pm 2\mathrm{i}$ a to jsou vlastní čísla matice A.

b) Určíme vlastní vektory $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, které odpovídají vlastnímu číslu $\lambda_1 = 4$.

Získáme je řešením soustavy $(A - \lambda\, E) \cdot X = \overrightarrow{0}$, kde $\lambda = 4$, tj. $\begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \\ -1, & -3, & -5 \\ 2, & 1, & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Přepíšeme ve tvaru soustavy rovnic, ve které 1. rovnici vypustíme, neboť má všechny koeficinty nulové. Získáme tak soustavu dvou rovnic pro tři neznámé:

$$\begin{aligned} -x - 3y - 5z &= 0 \\ 2x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

Přičteme-li ke druhé rovnici dvojnásobek 1. rovnice (Gaussův algoritmus), získáme soustavu

$$\begin{aligned} -x - 3y - 5z &= 0 \\ -5y - 11z &= 0 \end{aligned}$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení ("kontrolní místo"). Jednu neznámou lze volit, tedy např. $z = p$, kde p je libovolné číslo. Ze druhé rovnice určíme $y = -11p/5$.
Po dosazení do 1. rovnice vypočteme $x = -3y - 5z = 8p/5$.

Všechny vlastní vektory odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 4$ lze vyjádřit ve tvaru $X = p \cdot \begin{pmatrix} 8/5 \\ -11/5 \\ 1 \end{pmatrix}$,

kde p je jakékoliv číslo různé od 0. To lze zapsat též v jednodušším tvaru $X = p \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix}$, kde $p \neq 0$.

c) Spektrální poloměr $\rho(A) = \{\max|\lambda_{\mathrm{i}}|;\ \mathrm{i} = 1, ..., \mathrm{n}\} = \max\{4;\ |2 + 2\mathrm{i}|;\ |2 - 2\mathrm{i}|\} = \max\{4;\ \sqrt{8}\} = 4.$

Poznámka. S pojmem spektrální poloměr matice se setkáme např. v numerické matematice při ověření podmínek konvergence iteračních metod pro přibližné řešení soustav lineárních rovnic.

Příklad 4. a) Najděte vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Určete vlastní čísla matice A^2.

<u>Ř e š e n í :</u> Determinant v charakteristické rovnici vypočítáme buď užitím Sarussova pravidla nebo rozvojem, např. podle 1. řádku. Získáme tak rovnici $\det(A - \lambda E) = (2 - \lambda)\,[\lambda\,(\lambda - 2) + 1] - 1 \cdot (2 - \lambda) = 0$, kterou lze vytknutím upravit na tvar $(2 - \lambda)^2\,(-\lambda) = 0$.

Daná matice má tedy dvě vlastní čísla, $\lambda_1 = 0$ a dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_2 = 2$.

b) Matice A^2 má tedy též dvě vlastní čísla, a to $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 4$.

Poznámka. Jestliže počítáme determinant v charakteristické rovnici pomocí Sarussova parvidla, pak opět získáme výraz, z něhož lze vytknout $(2-\lambda)$ a postupně upravit rovnici na tvar z předchozího postupu. Pokud možnost vytknutí přehlédneme, získáme rovnici $-\lambda^3 + 4\,\lambda^2 - 4\,\lambda = 0$. Je to rovnice kubická, kterou však rychle vyřešíme vytknutím λ.

Další úlohy k samostatnému procvičení lze nalézt v doporučené literatuře, kde jsou i úlohy řešené.

Literatura:

[1] J. Neustupa: Matematika I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2014 (též 2013).
[2] S.Kračmar, F. Mráz, J.Neustupa: Sbírka příkladů z Matematiky I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2014 (též 2013).