

Limita posloupnosti, limita funkce - přehled teorie, příklady (pracovní text)

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Při výpočtu limity používáme pojmy, tvrzení (věty) a postupy, které jsou uvedeny v kapitolách III.1 a III.4 ve skriptu [1] od J. Neustupy a v řešených příkladech ve Sbírce [2] ze seznamu literatury. Podle nich limitu skutečně **počítáme**. V úvodu kapitoly III jsou uvedena pravidla pro počítání v množině $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, v tzv. rošířené množině reálných čísel.

I. Při výpočtu limity posloupnosti používáme následující tvrzení.

1. Věta III.1.11 (o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu posloupností)
2. Věta III.1.15 (o limitě sevřené posloupnosti)
3. Věta III.1.9 (o limitě vybrané posloupnosti)

Poznámka. Symbolem $\{ \text{výraz} \}$ jsou zapsány výrazy vzniklé při formálním použití věty o limitě součtu, rozdílu, součinu či podílu posloupností, resp. funkcí. (Stručně věta o "limitě aritm. operací", příp. o "limitě AO"). Jsou to zpravidla výrazy, jejichž hodnota není definována, tzv. neurčitě výrazy. Výjimkou je typ $\{1/0\}$, o jehož hodnotě rozhodujeme podle níže uvedené Věty z odst. III.4.9.

Příklady

$$\begin{aligned} \boxed{\text{B1.}} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+1)(3-2n)}{4n^2 - (2n-1)^2} &= {}^1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4n^2 + 4n + 3}{4n - 1} = {}^2) \quad \left\{ \frac{-\infty}{+\infty} \right\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2(-4 + 4/n + 3/n^2)}{n(4 - 1/n)} \\ &= {}^3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(-4 + 4/n + 3/n^2)}{4 - 1/n} = {}^4) \quad \left\{ \frac{+\infty(-4 + 0)}{4 - 0} \right\} = \frac{-\infty}{4} = -\infty. \end{aligned}$$

Popis jednotlivých kroků:

- 1) Úprava výrazů
- 2) Podle věty o limitě "aritm. operací" by vyšel neurčitý výraz, proto v čitateli vytkneme nejvyšší mocninu, tj. n^2 . Podobně ve jmenovateli vytkneme nejvyšší mocninu n .
- 3) Krátíme n .
- 4) Věta o limitě AO vede k definovanému výrazu, který upravíme podle pravidel pro počítání se symboly $+\infty, -\infty$.

$$\begin{aligned} \boxed{\text{B2.}} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+4} - \sqrt{n}) &= {}^1) \quad \{+\infty - (+\infty)\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n+4} - \sqrt{n})(\sqrt{n+4} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}} = {}^2) \quad \text{úpravy} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+4-n}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}} = {}^3) \quad \frac{4}{+\infty} = 0. \end{aligned}$$

1) Podle věty o limitě rozdílu by vyšel neurčitý výraz, proto větu nelze použít. Danou funkci tvaru $A - B$ upravíme násobením $A + B$ na tvar $A^2 - B^2$, abychom odstranili odmocniny. Výrazem $A + B$ však musíme též dělit, abychom zachovali rovnost.

- 2) Úpravy výrazu v čitateli
- 3) Věta o "limitě AO" vede k výrazu $4/+\infty$, jehož hodnota 0 je hledanou limitou.

$$\begin{aligned} \boxed{\text{A1.}} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \sqrt{n^2 + n}) &= {}^1) \quad \{+\infty - (+\infty)\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n - \sqrt{n^2 + n})(n + \sqrt{n^2 + n})}{n + \sqrt{n^2 + n}} = {}^2) \quad \text{úpravy} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - (n^2 + n)}{n + \sqrt{n^2 + n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n}{n + \sqrt{n^2 + n}} = {}^3) \quad \left\{ \frac{-\infty}{+\infty} \right\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n}{n(1 + \sqrt{1 + 1/n})} = {}^4) \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{1 + \sqrt{1 + 1/n}} = {}^5) = -1/2.$$

Popis jednotlivých kroků:

1) Postupujeme stejně jako v 1. kroku předchozího příkladu.

2) Úpravy výrazu v čitateli

3) Podle věty o "limitě AO" vychází neurčitý výraz. Proto ve jmenovateli vytkneme nejvyšší mocninu, tj. n .

4) Krátíme n .

5) Věta o "limitě AO" vede k hodnotě $-1/2$, která je hledanou limitou.

II. Při výpočtu limity funkce používáme následující tvrzení.

1. Je-li funkce f **spojitá** v bodě x_0 , pak je $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Věta III.4.6 (o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí)

Pokud výraz napravo (tj. součet limit,...) nemá smysl, pak větu nelze použít. V těchto případech postupujeme takto:

2.1. Jedná-li se o **typ "1/0"**, pak použijeme **Větu z odst. III.4.9**:

Je-li $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ a $f(x) > 0$ v nějakém prstencovém okolí $P(x_0)$, pak platí: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Je-li $f(x) < 0$ v $P(x_0)$, pak je $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

2.2. Jedná-li se o **neurčitě výrazy typu "0/0" nebo " ∞/∞ "**, pak lze použít l'Hospitalovo pravidlo,

tj. **Větu III.6.16.:** Předpokládejme, že $c \in \mathbb{R}^*$ a že limity $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ jsou buď obě nulové nebo obě nekonečné. Pak platí $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, pokud limita vpravo existuje.

2.3. Jedná-li se o **neurčitý výraz typu " $0 \cdot \infty$ "**, pak danou funkci buď převedeme na podíl a pak zkusíme l'Hospitalovo pravidlo nebo provedeme nějakou jinou úpravu.

2.4. Jedná-li se o **neurčitý výraz typu " $\infty - \infty$ "**, pak zkusíme danou funkci upravit.

3. Jedná-li se o **složenou funkci $f(g(x))$** , pak použijeme tomu odpovídající tvrzení, které je zobecněním vět III.4.32 a III.4.34.

Věta (o limitě složené funkce)

Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$, kde $g(x) \neq a$ v nějakém prstencovém okolí $P(x_0)$. Nechť $\lim_{y \rightarrow a} f(y) = L$.

Pak platí: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = L$.

Příklady

B3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{2x}}{\sin 3x - \frac{x}{2}} = {}^1) \left\{ \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - 2e^{2x}}{3 \cos 3x - \frac{1}{2}} = {}^2) \frac{0-2}{3-\frac{1}{2}} = -4/5.$

Popis jednotlivých kroků:

1) Podle věty o "limitě AO" by vyšel neurčitý výraz "0/0". To však znamená, že lze použít l'Hospitalovo pravidlo. Při derivování nezapomeňte na složené funkce e^{2x} , $\sin 3x$.

2) Podle věty o "limitě AO" získáme definovaný výraz, který upravíme.

B4. Je dána funkce $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 9}{x}$. Určete limitu pro $x \rightarrow 0_+$ a limitu pro $x \rightarrow +\infty$.

a) $\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{x^2 + 3x + 9}{x} = 1) \left\{ \frac{9}{0} \right\} = 2) \left\{ \frac{9}{0_+} \right\} = +\infty$.

Popis jednotlivých kroků: 1) Podle věty o "limitě AO" by vyšel nedefinovaný výraz "9/0".

2) Funkce ve jmenovateli, zde to je $g(x) = x$, nabývá pro $x \rightarrow 0_+$ hodnot kladných. Podle Věty III.4.9 je tedy výsledná limita $+\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x + 9}{x} = 1) \left\{ \frac{+\infty}{+\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{1} = 2) \left\{ \frac{+\infty}{1} \right\} = +\infty$.

Popis jednotlivých kroků:

1) Podle věty o "limitě AO" by vyšel neurčitý výraz "+ ∞ /+ ∞ ". To však znamená, že lze použít l'Hospitalovo pravidlo.

2) Věta o "limitě AO" vede k hodnotě $+\infty$.

A2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 1}{x \sin x} = 1) \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \sin 3x}{\sin x + x \cos x} = 2) \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-9 \cos 3x}{2 \cos x - x \sin x} = 3) = -9/2$.

Popis jednotlivých kroků:

1) Podle věty o "limitě AO" by vyšel neurčitý výraz "0/0". Lze tedy použít l'Hospitalovo pravidlo.

2) Podruhé by vyšel neurčitý výraz "0/0", znovu lze použít l'Hospitalovo pravidlo.

3) Věta o "limitě AO" vede k definované hodnotě $-9/2$.

A3. Je dána funkce $f(x) = e^{x-x^2}$. Určete definiční obor a limity v jeho krajních bodech.

Def. obor $D(f) = (-\infty, +\infty)$, budeme tedy počítat limitu pro $x \rightarrow -\infty$ a limitu pro $x \rightarrow +\infty$. Postupujeme podle věty o limitě složené funkce.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-x^2} = 0$, neboť:

1. Limita vnitřní funkce $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^2) = 1) \{+\infty - (+\infty)\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = 2) +\infty \cdot (0 - 1) = -\infty$.

2. Limita vnější funkce $\lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$ 3)

3. Podle věty o limitě složené funkce je tedy $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-x^2} = 0$

Popis jednotlivých kroků:

1) Podle věty o limitě rozdílu by vyšel neurčitý výraz, proto větu nelze použít. Danou funkci upravíme výtknutím nejvyšší mocniny.

2) Věta o "limitě AO" vede k hodnotě $-\infty$.

3) Znalost základních vlastností exponenciální funkce.

b) Podobně vypočítáme, že stejný výsledek má limita v levém krajním bodě, tj. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-x^2} = 0$.

Výpočet limity vnitřní funkce je v tomto případě kratší, neboť věta o limitě rozdílu vede k definovanému výrazu i bez úpravy: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - x^2) = \{-\infty - (+\infty)\} = -\infty$.

Další úlohy k samostatnému procvičení lze nalézt v doporučené literatuře, kde jsou i úlohy řešené.

Literatura:

[1] J. Neustupa: Matematika I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2014, 2017.

[2] S.Kračmar, F. Mráz, J.Neustupa: Sbírka příkladů z Matematiky I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2014, dotisk 2017.

[3] E. Brožíková, M. Kittlerová: Diferenciální počet funkcí jedné proměnné (řešené příklady). Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2007.