

#### IV.4. Křivkový integrál vektorové funkce

Předpokládejme, že  $c$  je jednoduchá hladká křivka s parametrizací  $P(t)$  v intervalu  $\langle a, b \rangle$  a vektorová funkce  $\vec{f}$  je spojitá na  $c$ . Pak platí

$$\int_c \vec{f}(X) \cdot d\vec{s} = \pm \int_a^b \vec{f}(P(t)) \cdot \dot{P}(t) dt.$$

Znaménko plus (resp. minus) použijeme, když křivka  $c$  je orientována souhlasně (resp. nesouhlasně) s parametrizací  $P(t)$ .

**POZNÁMKA:** Křivkový integrál vektorové funkce  $\vec{f} = (U, V, W)$  lze zapsat v diferenciálech, tj. ve tvaru

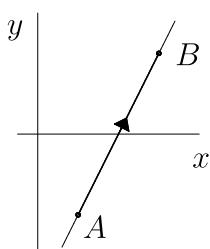
$$\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_c (U, V, W) \cdot (dx, dy, dz) = \int_c (U dx + V dy + W dz).$$

Analogicky pro křivku  $c \in \mathbb{E}_2$ .

- Vypočítejte dané křivkové integrály po orientované křivce  $c$  s počátečním bodem  $A$ .

**Příklad 498.**  $\int_c (x, -y^2) \cdot d\vec{s}$ ,  $c$  je úsečka z bodu  $A = [1, -2]$  do bodu  $B = [3, 2]$ .

*Rешение:*



Parametrické rovnice úsečky:

$$c : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + 4t, \end{cases} \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

Parametrizace křivky  $c$ :

$$\begin{cases} P(t) = [1 + 2t, -2 + 4t], & t \in \langle 0, 1 \rangle, \\ \dot{P}(t) = (2, 4), \\ P(0) = [1, -2] = A \Rightarrow \text{orientace křivky je souhlasná se zvolenou parametrizací} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_c (x, -y^2) \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 \left( \underbrace{(1+2t), -(-2+4t)^2}_{\vec{f}(P(t))} \right) \cdot \underbrace{(2, 4)}_{\dot{P}(t)} dt = \\ &= \int_0^1 \left( (1+2t) \cdot 2 - (4t-2)^2 \cdot 4 \right) dt = 2 \int_0^1 \left( 1+2t - 2(16t^2 - 16t + 4) \right) dt = \\ &= 2 \int_0^1 (-7 + 34t - 32t^2) dt = 2 \left[ -7t + 17t^2 - \frac{32}{3}t^3 \right]_0^1 = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

■

**Příklad 499.**  $\int_c (x^2 - y^2, 1) \cdot d\vec{s}$ ,  $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y = x^3\}$  z bodu  $A = [0, 0]$  do bodu  $B = [3, 27]$ .

*Rешение:*



$$c : \begin{cases} x = t, \\ y = t^3, \end{cases} \quad t \in \langle 0, 3 \rangle$$

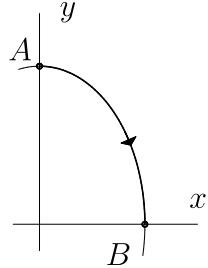
$$\begin{cases} P(t) = [t, t^3], & t \in \langle 0, 3 \rangle \\ \dot{P}(t) = (1, 3t^2), & P(0) = A \Rightarrow \text{souhlasná parametrizace} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_c (x^2 - y^2, 1) \cdot d\vec{s} &= \int_c (t^2 - t^6, 1) \cdot (1, 3t^2) dt = \int_0^3 \left( (t^2 - t^6) \cdot 1 + 1 \cdot 3t^2 \right) dt = \\ &= \left[ \frac{4}{3}t^3 - \frac{t^7}{7} \right]_0^3 = -\frac{1935}{7} \end{aligned}$$

■

**Příklad 500.**  $\int_c (-y, x) \cdot d\vec{s}$ ,  $c = \left\{ [x, y] \in \mathbb{E}_2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$ ,  $A = [0, b]$ .

*Rешение:*



$$c : \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$$

$$\begin{cases} P(t) = [a \cos t, b \sin t], & t \in \langle 0, \pi/2 \rangle \\ \dot{P}(t) = (-a \sin t, b \cos t), & P(0) = [a, 0] = B \end{cases}$$

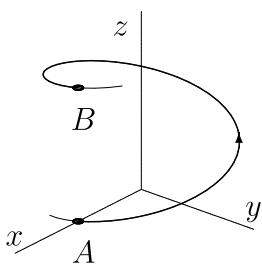
orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací

$$\begin{aligned} \int_c (-y, x) \cdot d\vec{s} &= - \int_0^{\pi/2} (-b \sin t, a \cos t) \cdot (-a \sin t, b \cos t) dt = \\ &= - \int_0^{\pi/2} (b \sin t \cdot a \sin t + a \cos t \cdot b \cos t) dt = -ab \int_0^{\pi/2} 1 dt = -\frac{ab\pi}{2} \end{aligned}$$

■

**Příklad 501.**  $\int_c (y, -x, z) \cdot d\vec{s}$ ,  $c$  je část křivky  $k = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x = R \cos t, y = R \sin t, z = \frac{at}{2\pi}, R > 0 \right\}$ , od průsečíku s rovinou  $z = 0$  do průsečíku s rovinou  $z = a$ ,  $a > 0$ .

*Rешение:* Jedná se o šroubovici s poloměrem vinutí  $R$  a stoupáním  $a$ .



$$z = 0 \implies t_1 = 0$$

$$z = a \implies t_2 = 2\pi$$

$$\begin{cases} P(t) = \left[ R \cos t, R \sin t, \frac{at}{2\pi} \right], & t \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ \dot{P}(t) = \left( -R \sin t, R \cos t, \frac{a}{2\pi} \right), & P(0) = [a, 0, 0] = A \end{cases}$$

orientace je souhlasná

$$\begin{aligned} \int_c (y, -x, z) \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \left( R \sin t, -R \cos t, \frac{at}{2\pi} \right) \cdot \left( -R \sin t, R \cos t, \frac{a}{2\pi} \right) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( -R^2 \sin^2 t - R^2 \cos^2 t + \frac{a^2 t}{4\pi^2} \right) dt = \int_0^{2\pi} \left( -R^2 + \frac{a^2}{4\pi^2} t \right) dt = \\ &= \left[ -R^2 t + \frac{a^2}{8\pi^2} t^2 \right]_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2} - 2\pi R^2 \end{aligned}$$

■

**Příklad 502.**  $\int_c -x \cos y dx + y \sin x dy$ ,  $c$  je úsečka z bodu  $A = [0, 0]$  do bodu  $B = [\pi, 2\pi]$ .

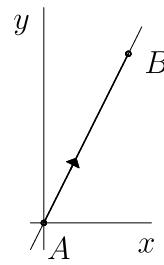
*Rешение:* Daný integrál můžeme počítat dvojím způsobem:

1) Použijeme přímo zadání křivkového integrálu v diferenciálním tvaru.

Při parametrickém vyjádření dané křivky  $c$  dostaneme pro  $t = 0$  počáteční bod  $A$ ,

$$c : \begin{aligned} x &= t, & t \in \langle 0, \pi \rangle \\ y &= 2t, \end{aligned} \quad \begin{aligned} dx &= dt, \\ dy &= 2 dt, \end{aligned}$$

vypočítáme diferenciály,



$$\begin{aligned} \int_C -x \cos y \, dx + y \sin x \, dy &= \int_0^\pi (-t \cos 2t + 2 \cdot 2t \sin t) \, dt = \\ &= \int_0^\pi t(4 \sin t - \cos 2t) \, dt = \left| \begin{array}{l} u = t, \quad v' = 4 \sin t - \cos 2t \\ u' = 1, \quad v = -4 \cos t - \frac{\sin 2t}{2} \end{array} \right| = \\ &= -\left[ 4t \cos t + \frac{t}{2} \sin 2t \right]_0^\pi + \int_0^\pi \left( 4 \cos t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \, dt = 4\pi + \left[ 4 \sin t - \frac{\cos 2t}{4} \right]_0^\pi = 4\pi. \end{aligned}$$

**POZNÁMKA:** Protože úsečka  $c$  je grafem explicitně zadané funkce  $y = 2x$ ,  $x \in \langle 0, \pi \rangle$ , můžeme ponechat proměnnou  $x$  jako parametr. Po výpočtu diferenciálu  $dy = 2 \, dx$  dostáváme

$$\int_c -x \cos y \, dx + y \sin x \, dy = \int_0^\pi (-x \cos 2x + 2 \cdot 2x \sin x) \, dx = \dots,$$

což je stejný Riemannův integrál.

2) Daný integrál v diferenciálním tvaru přepíšeme do tvaru vektorového

$$\int_c -x \cos y \, dx + y \sin x \, dy = \int_c (-x \cos y, y \sin x) \cdot d\vec{s}.$$

Použijeme parametrizaci

$$c : \begin{cases} x = t, \\ y = 2t, \end{cases} \quad t \in \langle 0, \pi \rangle;$$

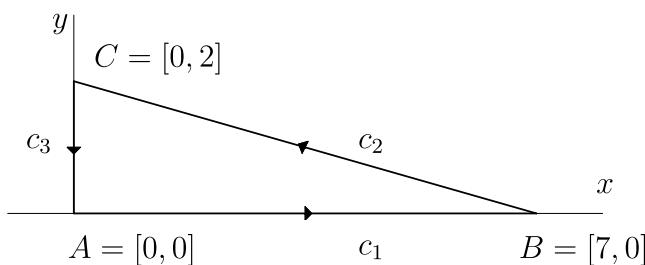
$$\left| \begin{array}{l} P(t) = [t, 2t], \quad t \in \langle 0, \pi \rangle; \quad \dot{P} = (1, 2) \\ P(0) = A \Rightarrow \text{orientace křivky je souhlasná s parametrizací} \end{array} \right|$$

$$\int_0^\pi (-t \cos 2t, 2t \sin t) \cdot (1, 2) \, dt = \int_0^\pi (-t \cos 2t + 4t \sin t) \, dt = \dots$$

a dostaneme zase stejný Riemannův integrál. ■

**Příklad 503.**  $\oint_c x \, dy$ ,  $c$  je obvod trojúhelníka vytvořeného přímkami  $x = 0$ ,  $y = 0$  a  $2x + 7y = 14$ ,  $c$  je orientována kladně.

*Rешение:*



$$c = c_1 \cup c_2 \cup c_3$$

$$\oint_c = \int_{c_1} + \int_{c_2} + \int_{c_3}$$

Podle poznámky z předchozího příkladu:

$$c_1 : y = 0, dy = 0 \cdot dx, x \in \langle 0, 7 \rangle \Rightarrow \int_{c_1} x dy = \int_0^7 0 dx = 0$$

$$c_2 : x = \frac{14 - 7y}{2}, y \in \langle 0, 2 \rangle \Rightarrow \int_{c_2} x dy = \int_0^2 \frac{14 - 7y}{2} dy$$

$$c_3 : x = 0, y \in \langle 2, 0 \rangle \Rightarrow \int_{c_3} x dy = \int_2^0 0 \cdot dy$$

$$\oint_c x dy = 0 + \int_0^2 \frac{14 - 7y}{2} dy + 0 = \frac{1}{2} \left[ 14y - \frac{7y^2}{2} \right]_0^2 = 7 \quad \blacksquare$$

504.  $\int_c (x \cos y, 0) \cdot d\vec{s}$ ,  $c$  je orientovaná úsečka z bodu  $A = [0, 1]$  do bodu  $B = [1, 2]$ .  
 $[\sin 2 + \cos 2 - \cos 1]$

505.  $\int_c (x^2 + y^2, x^2 - y^2) \cdot d\vec{s}$ ,  $c$  je orientovaná křivka  $y = 1 - |1 - x|$ ,  $x \in \langle 0, 2 \rangle$ ,  
počáteční bod je  $A = [0, 0]$ .  $[\frac{4}{3}]$

506.  $\int_c (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$ ,  $c$  je oblouk paraboly  $y = x^2$  z bodu  $A = [-1, 1]$   
do bodu  $B = [1, 1]$ .  $[-\frac{14}{15}]$

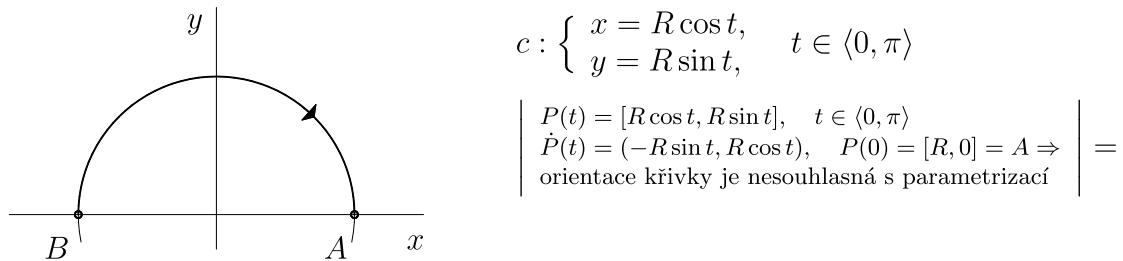
507.  $\int_c (y, x) \cdot d\vec{s}$ ,  $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = a^2, x \geq 0, y \geq 0, a > 0\}$  a počáteční bod je  
 $A = [a, 0]$ .  $[0]$

#### IV.5. Práce síly podél křivky

- Vypočtěte práci  $W$  síly  $\vec{f}$  podél orientované křivky  $c$ :

**Příklad 508.**  $\vec{f} = (x + y, 2x)$ ,  $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = R^2, y \geq 0\}$ , počáteční bod  $B = [-R, 0]$ .

*Rешení:* Práce  $W$  síly  $\vec{f}$  podél orientované křivky  $c$  je rovna integrálu  $\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$ .



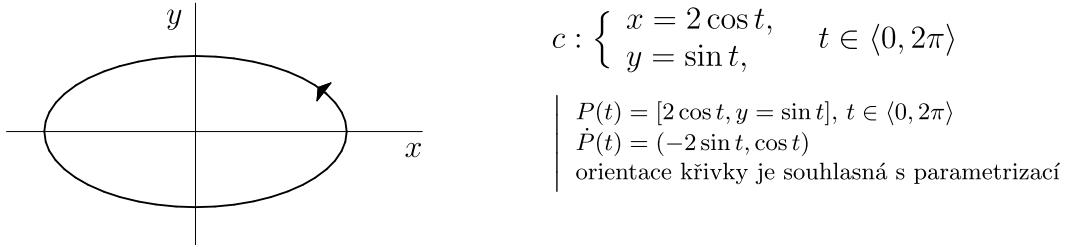
$$\begin{aligned} W &= \int_c (x + y, 2x) \cdot d\vec{s} = - \int_0^\pi (R \cos t + R \sin t, 2R \cos t) \cdot (-R \sin t, R \cos t) dt = \\ &= - \int_0^\pi \left( -R^2 (\sin t + \cos t) \sin t + 2R^2 \cos^2 t \right) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -R^2 \int_0^\pi (-\sin^2 t - \sin t \cos t + 2 \cos^2 t) dt = \\
 &= -R^2 \int_0^\pi \left( -\frac{1 - \cos 2t}{2} - \sin t \cos t + 1 + \cos 2t \right) dt = \\
 &= -R^2 \left[ -\frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4} - \frac{\sin^2 t}{2} + t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^\pi = -\frac{\pi R^2}{2}
 \end{aligned}$$

■

**Příklad 509.**  $\vec{f} = \left( \frac{2y}{x^2 + 4y^2}, \frac{-2x}{x^2 + 4y^2} \right)$ ,  $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$ , křivka  $c$  je orientovaná kladně.

*Rешение:*



$$\begin{aligned}
 W &= \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_c \left( \frac{2y}{x^2 + 4y^2}, -\frac{2x}{x^2 + 4y^2} \right) \cdot d\vec{s} = \\
 &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{2 \sin t}{4}, -\frac{4 \cos t}{4} \right) \cdot (-2 \sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} \left( -\frac{4 \sin^2 t}{4} - \frac{4 \cos^2 t}{4} \right) dt = \\
 &= - \int_0^{2\pi} 1 dt = -2\pi
 \end{aligned}$$

■

**Příklad 510.**  $\vec{f} = -y \vec{i} + x \vec{j} + a \vec{k}$ ,  $c = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0, z = 2\}$ , orientace křivky  $c$  je dána tečným vektorem  $\vec{r}([2, 1, 2]) = -\vec{i}$ .

*Rешение:*

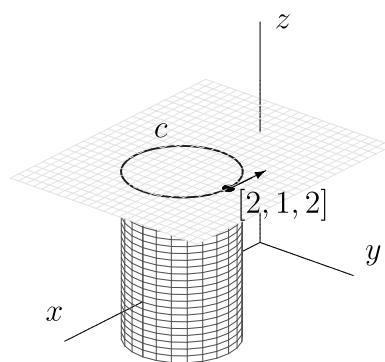
$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 - 4x + 3 &= 0 \implies \text{rovnice válcové plochy} \\
 z = 2 &\implies \text{rovnice roviny}
 \end{aligned}$$

Křivka  $c$  vznikne rovinným řezem válcové plochy.

Rovina je kolmá na osu rotační válcové plochy,  
křivka  $c$  je tedy kružnice

$$c : \begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 = 1 \\ z = 2 \end{cases} \implies$$

$$c : \begin{cases} x = 2 + 1 \cdot \cos t, \\ y = 1 \cdot \sin t, \\ z = 2, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$



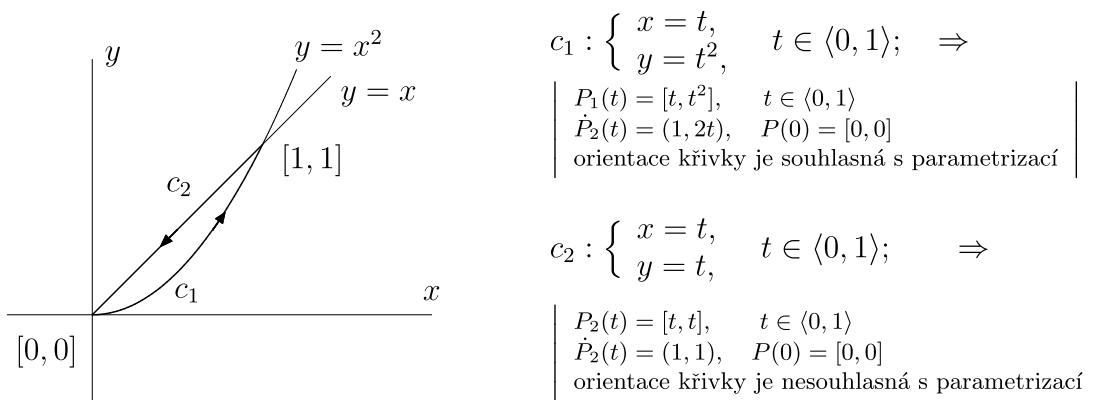
$$\begin{cases} P(t) = [2 + \cos t, \sin t, 2], t \in \langle 0, 2\pi \rangle & P\left(\frac{\pi}{2}\right) = [2, 1, 2]; \quad \dot{P}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1, 0, 0) = -\vec{i} \\ \dot{P}(t) = (-\sin t, \cos t, 0) & \text{orientace křivky je souhlasná s parametrizací} \end{cases}$$

$$W = \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_c (-y, x, a) \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, 2 + \cos t, a) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left( \sin^2 t + (2 + \cos t) \cos t + a \cdot 0 \right) dt = \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos t) dt = 2\pi \quad \blacksquare$$

**Příklad 511.**  $\vec{f} = (xy, x + y)$ ,  $c = c_1 \cup c_2$ ,  $c$  je uzavřená křivka, kde  $c_1$  je část parabol  $y = x^2$  a  $c_2$  je část přímky  $y = x$ ,  $c$  je kladně orientovaná.

*Rешение:*



$$\begin{aligned} W &= \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{c_1} (xy, x + y) \cdot d\vec{s} + \int_{c_2} (xy, x + y) \cdot d\vec{s} = \\ &= \int_0^1 (t^3, t + t^2)(1, 2t) dt - \int_0^1 (t^2, 2t)(1, 1) dt = \int_0^1 (t^3 + 2t^2 + 2t^3) dt - \\ &\quad - \int_0^1 (t^2 + 2t) dt = \left[ \frac{3t^4}{4} + \frac{2t^3}{3} \right]_0^1 - \left[ \frac{t^3}{3} + t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{12} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

- Vypočtěte práci síly  $\vec{f}$  podél orientované křivky  $c$ :

512.  $\vec{f} = \frac{(x-y, x+y)}{x^2+y^2}$ ,  $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x^2+y^2 = 4\}$ , křivka  $c$  je orientovaná záporně.  $[-2\pi]$

513.  $\vec{f} = \frac{2}{x^2+y^2}(y, -x)$ ,  $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x^2+y^2 = 16\}$ , křivka  $c$  je kladně orientovaná.  $[-4\pi]$

514.  $\vec{f} = \left( \frac{1}{y}, -\frac{1}{x} \right)$ ,  $c$  je obvod  $\triangle ABC$ , kde  $A = [1, 1]$ ,  $B = [2, 1]$ ,  $C = [2, 2]$ , křivka  $c$  je kladně orientovaná.  $\left[ \frac{1}{2} \right]$

515.  $\vec{f} = \frac{(y^2, -x^2)}{x^2+y^2}$ ,  $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x^2+y^2 = a^2, a > 0, y \geq 0\}$  z bodu  $[a, 0]$  do bodu  $[-a, 0]$ .  $\left[ -\frac{4}{3} a \right]$

516.  $\vec{f} = (y, 2)$ ,  $c$  je uzavřená křivka tvořená poloosami a čtvrtinou elipsy  $x = 2 \cos t$ ,  $y = \sin t$ , nacházející se v prvním kvadrantu. Orientace je záporná.  $[\pi/2]$

517.  $\vec{f} = (x+y, 2x)$ ,  $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x = a \cos t, y = a \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$ , orientace je kladná.  $[\pi a^2]$

518.  $\vec{f} = (y, z, x)$ ,  $c$  je úsečka s počátečním bodem  $[a, 0, 0]$  a koncovým bodem  $[a, a, a]$ .  
 $\left[ \frac{3}{2} a^2 \right]$

519.  $\vec{f} = (y, z, x)$ ,  $c$  je průsečnice ploch  $z = xy$ ,  $x^2 + y^2 = 1$  z bodu  $[1, 0, 0]$   
do bodu  $[0, 1, 0]$ .  
 $\left[ \frac{2}{3} - \frac{\pi}{4} \right]$

520.  $\vec{f} = (yz, z\sqrt{R^2 - y^2}, xy)$ ,  $c = \left\{ X \in \mathbb{E}_3 : X = P(t); P(t) = \left( R \cos t, R \sin t, \frac{at}{2\pi} \right), a > 0, R > 0, t \in \langle 0, 2\pi \rangle \right\}$ , orientace křivky je souhlasná s parametrizací.  
[0]

521.  $\vec{f} = (x, y, xz - y)$ ,  $c = \{X \in \mathbb{E}_3 : X = P(t); P(t) = (t^2, 2t, 4t^3), t \in \langle 0, 1 \rangle\}$ ,  
orientace křivky je souhlasná s parametrizací.  
 $\left[ \frac{5}{2} \right]$

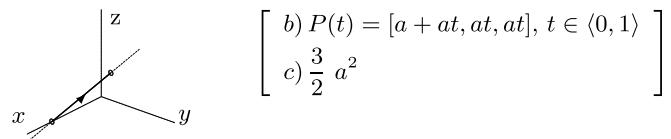
522.  $\vec{f} = (x, y, z)$ ,  $c$  je čtvrtina elipsy  $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 = 4, x + z = 2\}$   
z bodu  $[2, 0, 0]$  do bodu  $[0, 2, 2]$ .  
[2]

523.  $\vec{f} = (y^2, z^2, x^2)$ ,  $c = \{X \in \mathbb{E}_3 : X = P(t); P(t) = (5, 2 + 4 \sin t, -3 + 4 \cos t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$ ,  
orientace křivky je souhlasná s parametrizací.  
[96\pi]

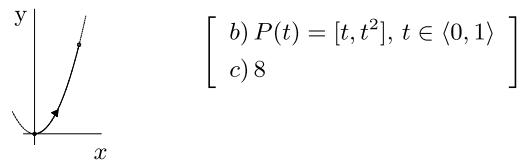
• Je dáno vektorové pole  $\vec{f}$  a orientovaná křivka  $c$ .

- a) Načrtněte danou křivku  $c \subset \mathbb{E}_2$ .
- b) Navrhněte její parametrizaci  $P(t)$  a zdůvodněte, zda je křivka  $c$  orientována souhlasně s touto parametrizací.
- c) Vypočítejte práci, kterou vykoná síla  $\vec{f}$  působením po dané orientované křivce  $c$ .

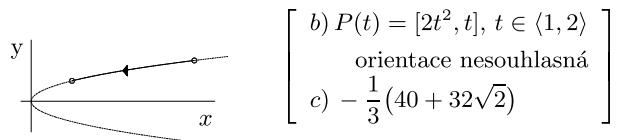
524.  $\vec{f} = (y, z, x)$ ,  $c$  je úsečka s počátečním bodem  $[a, 0, 0]$  a koncovým bodem  $[a, a, a]$ .



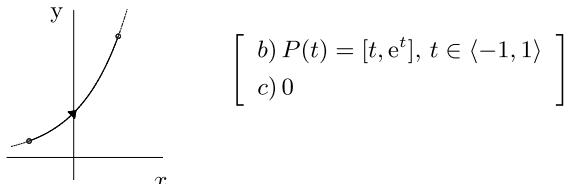
525.  $\vec{f} = (xy, y - 1)$ ,  $c$  je část křivky  $y = x^2$  s počátečním bodem  $A = [0, 0]$  a koncovým bodem  $B = [2, 4]$



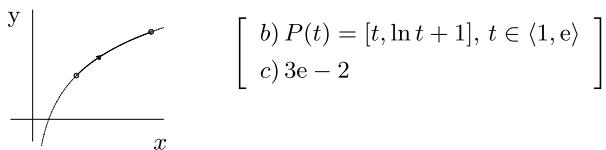
526.  $\vec{f} = (\sqrt{x} + y, x + \sqrt{y})$ ,  $c$  je část křivky  $x = 2y^2$  od bodu  $A = [8, 2]$  do bodu  $B = [2, 1]$



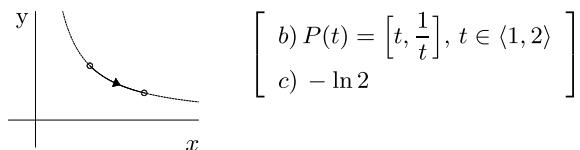
527.  $\vec{f} = \left( x^3, \frac{1}{y} \ln y \right)$ , křivka  $c$  je daná rovnicí  $y = e^x$ , kde  $|x| \leq 1$  a počáteční bod má  $x = -1$



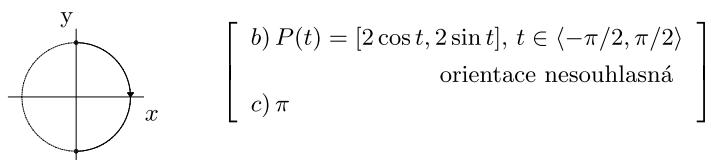
528.  $\vec{f} = (2, xy)$ ;  $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : y = \ln x + 1, x \in \langle 1, e \rangle\}$ , počáteční bod je  $A = [1, ?]$



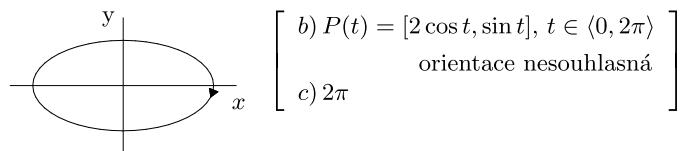
529.  $\vec{f} = (0, x)$ ;  $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : xy = 1, x \in \langle 1, 2 \rangle\}$ ,  $x$ -ová souřadnice p.b. je 1



530.  $\vec{f} = \left( \frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2} \right)$ ,  $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 = 4, x \geq 0\}$  orientovaná od bodu  $[0, 2]$  k bodu  $[0, -2]$



531.  $\vec{f} = \left( \frac{2y}{x^2 + 4y^2}, -\frac{2x}{x^2 + 4y^2} \right)$ ;  $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$ , která je záporně orientovaná



- Je dána úsečka  $AB$ , vektorová funkce  $\vec{f}$  a skalární funkce  $\varrho$ .
  - Navrhněte parametrizaci  $P(t)$  úsečky  $k$  a vypočítejte tečný vektor  $\dot{P}(t)$ .
  - Užitím křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla  $\vec{f}$  působením podél úsečky  $AB$  od bodu  $A$  do bodu  $B$ .
  - Vypočítejte hmotnost křivky  $k$ , je-li délková hustota  $\varrho(x, y)$ .

**532.**  $A = [1, 0]$ ,  $B = [2, 3]$ ,  $\vec{f} = (x, y) = (x^2, xy)$ ,  $\varrho(x, y) = x^2 + y^2$

$$\left[ \begin{array}{l} a) P(t) = [1+t, 3t], t \in \langle 0, 1 \rangle \\ b) \frac{59}{6} \\ c) m = \frac{16}{3}\sqrt{10} \end{array} \right]$$

**533.**  $A = [0, 1]$ ,  $B = [1, 2]$   $\vec{f}(x, y) = (x\sqrt{y^2 - 2x}, 0)$ ,  $\varrho(x, y) = xy$

$$\left[ \begin{array}{l} a) P(t) = [t, 1+t], t \in \langle 0, 1 \rangle \\ b) \frac{1}{3}(\sqrt{8} - 1) \\ c) m = \frac{5}{6}\sqrt{2} \end{array} \right]$$