Absolutní (globální) extrémy funkce více proměnných

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz )

**Definice.** Nechť $f$ je funkce $n$ proměnných a $M \subset D(f)$. Říkáme, že funkce $f$ nabývá v bodě $A \in M$ svého maxima na množině $M$, jestliže pro každé $X \in M$ platí: $f(X) \leq f(A)$.
Zapisujeme $f(A) = \max\{f(x) : x \in M\}$, stručně $f(A) = \max_M f$.

Analogicky definujeme minimum funkce $f$ na množině $M$. Značíme je stručně $\min_M f$.

Maximum, resp. minimum funkce $f$ na celém definičním oboru $D(f)$ značíme stručně $\max f$, resp. $\min f$.

Výpočet absolutních extrémů vychází z následujícího tvrzení.

**Věta 6.14** (postačující podmínky pro existenci absolutních extrémů)

Nechť $M \subset \mathbb{E}_n$ je neprázdná, omezená a uzavřená množina, nechť funkce $f$ je spojitá na $M$. Pak funkce $f$ nabývá na množině $M$ maxima a minima.

**I. Speciální případ jsou tzv. vázané extrémy**, a to když množina $M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : g(x, y) = 0\}$, kde $g$ je daná funkce.

Pokud lze, pak z vazební podmínky $g(x, y) = 0$ vyjádříme jednu proměnnou, kterou dosadíme do dané funkce $f$, jejíž extrémy na množině $M$ máme vypočítat. Získáme tak úlohu určit absolutní extrémy funkce jedné proměnné $y = \varphi(x)$ resp. $x = \psi(y)$ v uzavřeném omezeném intervalu. Pro řešení této úlohy si připomeňme z Matematiky I:

Při splnění předpokladů výše uvedené existenční věty platí pro funkci jedné proměnné v uzavřeném omezeném intervalu $I$ dodatek.

Maxima (resp. minima) je nabýváno v bodě, který je buď
(1) krajním bodem daného intervalu nebo
(2) vnitřním bodem, ve kterém je derivace $\varphi'(x)$ resp. $\psi'(y)$ rovna nule nebo
(3) vnitřním bodem, ve kterém derivace neexistuje.

Takto určené body nazýváme kritickými, v jiných bodech absolutní extrém být nemůže. Při splněných předpokladech pak stačí určit největší a nejmenší z funkčních hodnot v těchto bodech.

**Příklad 1.** Zdůvodněte existenci a určete absolutní extrémy, tj. určete největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ na množině $M = \{\,[x, y] \in \mathbb{E}_2\,;\ x + y = 1,\ x \in \langle 1/4, 9/10\rangle\}$.

Řešení. Zadaná množina $M$ je úsečka v prvním kvadrantu, ve kterém je funkce $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ spojitá. Podle Věty 6.14 je zaručena existence absolutních extrémů.

Z vazební podmínky $x + y = 1$ vyjádříme $y = 1 - x$ a dosadíme do funkce $f$. Získáme tak funkci jedné proměnné $\varphi(x) = f(x, 1 - x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1 - x}$, pro kterou hledáme absolutní extrémy na intervalu $I = \langle 1/4, 9/10\rangle$. Prvním kritickým bodem je tedy krajní bod $x = 1/4$ (s odpovídající hodnotou $y = 3/4$). Druhým kritickým bodem je $x = 9/10$ (s odpovídající hodnotou $y = 1/10$).

Pro určení případných dalších kritických bodů vypočítáme derivaci $\varphi'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(1 - x)^2}$.
Ta existuje ve všech vnitřních bodech intervalu $I = \langle 1/4, 9/10\rangle$.
Rovnice $\varphi'(x) = 0$ vede po úpravě k rovnici $x^2 = (1 - x)^2$. Ta má jediné řešení $x = 1/2$, s odpovídající hodnotou $y = 1/2$.

Pro zadanou funkce $f(x, y)$ jsme tedy určili tři kritické body:
$A = [1/4, 3/4], B = [9/10, 1/10], C = [1/2, 1/2]$. Vypočítáme funkční hodnoty $f(A) = 16/3, f(B) = 100/9, f(C) = 4$ a formulujeme závěr. Největší hodnota (maximum) zadané funkce na množině M je 100/9, této hodnoty je nabýváno v bodě B. Nejmenší hodnota (minimum) zadané funkce na množině M je 4, této hodnoty je nabýváno v bodě C.
Stručný zápis: $\max_M f = f(9/10, 1/10) = 100/9$, $\min_M f = f(1/2, 1/2) = 4$.

**II. Postup při výpočtu absolutních extrémů**, nejedná-li se o speciální případ vázaných extrémů.

Připomeňme, že $M^0$ je vnitřek a $\partial M$ je hranice množiny $M$.

1. Ověříme splnění předpokladů Věty 6.14, čímž zdůvodníme existenci absolutních extrémů.

2. Určíme všechny kritické body funkce $f$ v otevřené množině $M^0$. To jsou body, v nichž je $\text{grad} f = \vec{0}$ a dále body, v nichž funkce $f$ není diferencovatelná (pokud takové body existují). Jsou to tedy body splňující nutnou podmínku pro lokální extrém funkce $f$.

3. Určíme všechny body $X \in \partial M$, ve kterých může funkce $f$ nabývat vázaných extrémů na hranici množiny $M$. Nezapomeneme na průsečíky křivek, které tvoří hranici $\partial M$ (pokud průsečíky existují).

4. Určíme hodnoty funkce $f$ ve všech vypočítaných bodech. Největší z těchto hodnot je rovna $\max_M f$ a nejmenší hodnota je rovna $\min_M f$.

**Příklad 2.** Zdůvodněte existenci a určete absolutní extrémy funkce $z = f(x, y) = 2x^2 - y^2$ na množině $M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + 4y^2 \leq 4, x \geq 0\}$.

**Řešení:**

1. Zadaná množina $M$ je uzavřená a omezená, její hranici tvoří sjednocení dvou křivek: křivka $K_1$ je část elipsy $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ležící v polorovině $x \geq 0$ (tj. elipsa s poloosami $a = 2$, $b = 1$), křivka $K_2$ je úsečka $x = 0$, $y \in \langle -1, 1 \rangle$ ležící na ose $y$. Načrtněte si obrázek. Množina $M$ je podmnožinou def. oboru, neboť $D(f) = \mathbb{E}_2$. Je tedy daná funkce $f$ spojitá na množině $M$. Předpoklady pro existenci absolutních extrémů jsou splněny.

2. Vypočítáme parciální derivace a určíme body, které splňují nutnou podmínku pro lokální extrém funkce $f$: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y$.

Tyto derivace jsou spojité v $D(f)$. Nutná podmínka pro lokální extrém, tj. $\text{grad} f = \vec{0}$, je tedy splněna pouze v bodě $A = [0, 0]$, který je vnitřním bodem množiny $M$.

3. Vyšetříme hranici $\partial M$.

a) Z rovnice elipsy $K_1$ vyjádříme $x = \pm\sqrt{4 - 4y^2}, y \in \langle -1, 1 \rangle$. Vzhledem k podmínce $x \geq 0$ však zde platí jenom znaménko plus. Po dosazení do funkce $f(x, y)$ získáme funkci jedné proměnné $y$ :
$\varphi(y) = 2\,(4 - 4y^2) - y^2 = 8 - 9\,y^2$. Kritické body jsou krajní body, tj. $y = -1$ a $y = 1$, v obou bodech je odpovídající hodnota $x = 0$.

Z rovnice $\varphi'(y) = -18\,y^2 = 0$ určíme vnitřní kritický bod $y = 0$ s odpovídajícím $x = 2$.

b) Vyjádření úsečky $K_2$, tj. $x = 0$ opět dosadíme do $f$. Získáme funkci jedné proměnné $y$ :
$\psi(y) = -y^2, y \in \langle -1, 1 \rangle$. Z rovnice $\psi'(y) = -2\,y = 0$ určíme vnitřní kritický bod $y = 0$ s odpovídajícím $x = 0$.

4. Nalezli jsme čtyři kritické body: $A = [0, -1], B = [0, 1], C = [2, 0], D = [0, 0]$. Vypočítáme funkční hodnoty $f(A) = -1, f(B) = -1, f(C) = 8, f(D) = 0$ a formulujeme závěr:
Největší hodnota (maximum) zadané funkce na množině M je 8, této hodnoty je nabýváno v bodě C.
Nejmenší hodnota (minimum) zadané funkce na množině M je -1, této hodnoty je nabýváno ve dvou bodech, a to A a B.
Stručný zápis: $\max_M f = f(2, 0) = 8$, $\min_M f = f(0, -1) = f(0, 1) = -1$.

Další příklady k samostatnému počítání, včetně řešených příkladů, najdete v níže uvedených skriptech.

Doporučená literatura k tomuto tématu:

[1] J. Neustupa: **Matematika I.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2014.
[2] J. Neustupa: **Matematika II.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2015.
[3] E. Brožíková, M. Kittlerová, F. Mráz: **Sbírka příkladů z Matematiky II**. Webové stránky Ústavu technické matematiky, FS ČVUT v Praze, předmět Matematika II.