

Opakování (ze střední školy a z 1. semestru)

Sami si zopakujte z 1. semestru zejména:

- limity (ty jednoduché poznat na první pohled)
- derivování (rychle a bez chyb)
- integrování
- vlastní čísla a vlastní vektory matic 2x2 (i komplexní) a jejich geometrický význam ve 2D

Posloupnosti: $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \equiv \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

Příklad 1.1:

- (a) $a_k = \frac{k}{k+2}$, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} = \{1/3, 2/4, 3/5, \dots\}$
 (b) $a_k = \sin(k \frac{\pi}{2})$, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} = \{1, 0, -1, 0, \dots\}$
 (c) $a_k = \ln(1 + 1/k)$

Jaké jsou limity těchto posloupností? Které z nich jsou konvergentní?

Poznámka: konvergence posloupnosti nezávisí na přidání, odebrání nebo změně *konečného* počtu členů.

Číselné řady: $\sum a_k \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$... n -tý částečný součet řady $\sum a_k$

$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$... zbytek po n -tém částečném součtu řady $\sum a_k$

řada $\sum a_k$ je **konvergentní** $\Leftrightarrow$ existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{R}$; s nazýváme součtem řady

jinak je řada divergentní (tj. když limita s_n je nevlastní nebo neexistuje)

Příklad 1.2: запиште předchozí posloupnosti jako řady. Které jsou konvergentní (určete součet)?

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \dots$

posloupnost $\{a_k\}$ je kladná a rostoucí, tedy $s_n = \sum_{k=1}^n a_k > n \cdot a_1 = \frac{n}{3} \rightarrow \infty$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(k \frac{\pi}{2}) = 1 + 0 - 1 + 0 + 1 + \dots$

$s_1 = s_2 = 1, s_3 = s_4 = 0, s_5 = s_6 = 1, \dots$ – limita s_n neex.

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + 1/k) = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \dots = \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + \dots$, $s_n = \ln(n+1) \rightarrow \infty$

Poznámka: konvergence řady *nezávisí na hodnotách konečného počtu jejích členů*.
(Součet samozřejmě ano.)

Nutná podmínka pro konvergenci řady: $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

Tato podmínka není postačující - viz př. 1.2 c).

Geometrická řada: $\sum_{k=0}^{\infty} a_0 \cdot q^k = a_0 + a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + \dots$

$$s_n = a_0 (1 + q + q^2 + \dots + q^n) = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (\text{pro } q \neq 1)$$

pro $|q| < 1$ je $\lim s_n = \frac{a_0}{1 - q}$, pro $|q| \geq 1$ neexistuje vlastní limita – řada diverguje.

Příklad: $2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k$, $q = -\frac{1}{2}$, $s = \frac{a_0}{1 - q} = \frac{2}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$

Řady funkcí:

$$\sum_k f_k(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots$$

řada $\sum_k f_k(x)$ **konverguje v bodě** $x_0 \Leftrightarrow$ číselná řada $\sum_k f_k(x_0)$ je konvergentní
obor konvergence je množina bodů, v nichž řada konverguje

Příklad 1.3: určete obory konvergence řad

- $\sum_k k \cdot x$ [$s_n = x \cdot \sum_{k=1}^n k$, obor konv. je $\{0\}$]
- $\sum_{k=0}^{\infty} (\ln x)^k$ [pro pevné x je to geom. řada, $q = \ln x$: pro $|\ln x| < 1$ je $s = \frac{1}{1 - \ln x}$,
pro $|\ln x| \geq 1$ řada diverguje, obor konv. je (e^{-1}, e)]
- $\sum_{k=0}^{\infty} (x^2 - 3)^k$ [pro pevné x je to geom. řada, $q = x^2 - 3$: pro $|x^2 - 3| < 1$ je $s = \frac{1}{4 - x^2}$,
pro $|x^2 - 3| \geq 1$ řada diverguje, obor konv. je $(-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2)$]

Mocninná řada se středem x_0 a koeficienty c_k je $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$

interval konvergence je $I = (x_0 - R, x_0 + R)$, $R \geq 0$ nebo $R = \infty$
(obor konvergence může zahrnovat navíc i jeden nebo oba krajní body)

Příklad 1.4: určete obory konvergence mocninných řad

- $\sum_k x^k$
– pro pevné x je to geom. řada ($q = x$): obor konv. je $|x| < 1 \Rightarrow x \in (-1, 1)$
- $\sum_k (x + 2)^k$
– geom. řada ($q = x + 2$): obor konv. je $|x + 2| < 1 \Rightarrow x \in (-3, -1)$

- $\sum_k 7(x-12)^k$
– geom. řada ($q = x - 12$): obor konv. je $|x - 12| < 1 \Rightarrow x \in (-13, -11)$
- $\sum_k \frac{x^k}{3^{k-1}}$
– geom. řada ($q = \frac{x}{3}$, $a_0 = 3$): pro $|\frac{x}{3}| < 1$ je $s = \frac{3}{1-x/3}$, obor konv. je $(-3, 3)$

Taylorův polynom

Nechť reálná funkce f má $(n+1)$ -ní spoj. derivaci na intervalu I , $x_0, x \in I$. Pak

$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, kde

$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$... Taylorův polynom

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ pro nějaké $\xi \in (x_0, x)$... zbytek v Lagrangeově tvaru

Příklad 1.5: napište Taylorův polynom $T_3(x)$ se středem $x_0 = 1$ a zbytek $R_3(x)$ pro funkci $f(x) = e^{2x}$

der.	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$
0.	e^{2x}	e^2
1.	$2e^{2x}$	$2e^2$
2.	$4e^{2x}$	$4e^2$
3.	$8e^{2x}$	$8e^2$
4.	$16e^{2x}$	

$$T_3(x) = e^2 + 2e^2(x-1) + \frac{4e^2}{2!}(x-1)^2 + \frac{8e^2}{3!}(x-1)^3, \quad R_3(x) = \frac{16e^{2\xi}}{4!}(x-1)^4$$

Taylorova řada

Nechť reálná funkce f je definovaná v okolí bodu x_0 a má v něm derivace všech řádů.

Taylorova řada funkce f o středu x_0 je

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Příklad 1.6: napište Taylorovu řadu se středem v nule funkcí e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$.

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $x \in \mathbb{R}$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, $x \in \mathbb{R}$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$, $x \in (-1, 1)$

Otázky:

- Pro jaká x konverguje Taylorova řada $f(x)$?
- Když pro x konverguje, konverguje k $f(x)$?

Geometrická mocninná řada

Příklad 1.7: napište Taylorovu řadu funkce $\frac{1}{1-x}$ se středem $x_0 = 0$:

k -tá derivace $(\frac{1}{1-x})^{(k)}$ v bodě $x_0 = 0$ je $k!(1-x)^{-(k+1)}|_{x=0} = k!$

Tayl. řada: $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

– geom. řada, konv. pouze pro $|x| < 1$, pak její součet je opravdu $\frac{1}{1-x}$

Platí: **Mocninná řada je Taylorovou řadou svého součtu na intervalu konvergence.**

– takže pro funkci $\frac{1}{1-x}$ můžeme napsat její Taylorovu řadu bez derivování, když si ji představíme jako součet geometrické řady

Příklad 1.8: S využitím vzorce pro součet geometrické řady napište Taylorovy řady o středu x_0 následujících funkcí $f(x)$ a určete, kde tyto řady konvergují k $f(x)$.

$$a) f(x) = \frac{4}{2-x}, \quad x_0 = 0 \quad b) f(x) = \frac{4}{1+x}, \quad x_0 = 1 \quad c) f(x) = \frac{1}{8x^2-2}, \quad x_0 = 0$$

řešení:

potřebujeme funkci $f(x)$ převést na tvar $\frac{a_0}{1-q}$, kde $q = c(x-x_0)$, resp. $q = c(x-x_0)^m$

$$a) \frac{8}{2-x} = \frac{8}{2(1-\frac{x}{2})} - \text{součet geometrické řady pro } a_0 = 4, \quad q = \frac{x}{2}$$

$$|q| < 1 \Leftrightarrow |\frac{x}{2}| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow x \in (-2, 2)$$

$$f(x) = 4 + 2x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^k, \quad x \in (-2, 2)$$

$$b) \frac{4}{1+x} = \frac{4}{1+(x-1)+1} = \frac{4}{2+(x-1)} = \frac{4}{2(1+\frac{(x-1)}{2})} = \frac{2}{1+\frac{x-1}{2}}$$

– součet geometrické řady pro $a_0 = 2$, $q = -\frac{x-1}{2}$

$$|q| < 1 \Leftrightarrow |\frac{x-1}{2}| < 1 \Leftrightarrow |x-1| < 2 \Leftrightarrow x \in (-1, 3)$$

$$f(x) = 2 - (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{4} + \frac{(x-1)^4}{8} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot (-1)^k \left(\frac{(x-1)}{2}\right)^k, \quad x \in (-1, 3)$$

$$c) \frac{1}{8x^2-2} = \frac{-1}{2-8x^2} = \frac{-1}{2(1-4x^2)} - \text{součet geometrické řady pro } a_0 = -\frac{1}{2}, \quad q = 4x^2$$

$$|q| < 1 \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} - 2x^2 - 8x^4 - 32x^6 - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{2} (4x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{2} (2x)^{2k}, \quad x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$