

Diferenciální rovnice 1. řádu - opakování

Dif. rovnice 1. řádu (v normálním tvaru): nechť $f(x, y)$ je spoj. funkce dvou proměnných,

$$y' = f(x, y), \quad [x, y] \in G \dots \text{oblast (otevřená souvislá množina)} \quad (1)$$

Řešení rovnice (1) v G : funkce $y(x)$ def. na intervalu I , která má na I spojitou derivaci, splňuje rovnici (1) a pro kterou platí $x \in I \Rightarrow [x, y(x)] \in G$.

Maximální řešení v G : takové, k němuž neexistuje (vlastní) prodloužení v G (řešení y_1 na intervalu J se nazývá prodloužení y na I , pokud $I \subset J$ a $y_1(x) = y(x)$ na I).

Integrální křivka: graf řešení

Směrové pole: vektorové pole $\vec{r} = (1, f(x, y))$

Počáteční (Cauchyho) úloha:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Věta - o existenci a jednoznačnosti řešení

Nechť $f(x, y)$ je funkce dvou proměnných, pro kterou platí:

- $f(x, y)$ je spojitá v G (existence)
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ je spojitá v G (jednoznačnost)

Pak pro každý bod $[x_0, y_0] \in G$ existuje právě jedno maximální řešení úlohy (1), pro které $y(x_0) = y_0$. Jinými slovy: každým bodem $[x_0, y_0] \in G$ prochází právě jedna integrální křivka. O intervalu I max. řešení obecně nelze nic říct (jen že $x_0 \in I$).

Poznámka k Větě o existenci a jednoznačnosti řešení

Druhou podmínku (tj. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ je spojitá v G) lze zeslabit na

- $f(x, y)$ je Lipschitzovsky spojitá v proměnné y v G ,
tj. $\exists L \in \mathbb{R}$ tak, že pro $\forall x, y_1, y_2 \in G$ platí $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$.

Poznámka k existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyho úlohy

Standardní postup: nejdřív zkusíme ověřit oba předpoklady Věty, tj. spojitost $f(x, y)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ v nějakém okolí $U([x_0, y_0])$ bodu $[x_0, y_0]$.

Pokud $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ není spojitá v žádném okolí $[x_0, y_0]$, můžeme ověřit slabší podmínku – zda $f(x, y)$ je v bodě $[x_0, y_0]$ Lipschitzovsky spojitá v proměnné y , tj. zda platí $\exists L \in \mathbb{R}, \exists U([x_0, y_0])$ tak, že pro $\forall x, y \in U([x_0, y_0])$ je $|f(x, y) - f(x, y_0)| \leq L |y - y_0|$.

Metoda separace proměnných

Separovatelná rovnice – předp. $g(x)$ a $h(y)$ spojité na otevřených intervalech $x \in I$ a $y \in J$:

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

Jestliže navíc $h(y)$ je nenulová na J , nebo $h'(y)$ je spoj. na J , nebo $h(y)$ je Lipschitzovsky spoj. na J , pak v oblasti $G = I \times J$ prochází každým bodem právě jedna integrální křivka.

Postup řešení:

I Pokud $h(y_0) = 0$, je $y = y_0$ konstantní řešení.

II Na intervalech, kde $h(y) \neq 0$, postupujeme ve třech krocích:

1. Separace:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx$$

2. Integrace:

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

$$\text{řešení v implicit. tvaru:} \quad H(y) = G(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

3. Inverze:

$$y = H^{-1}(G(x) + c), \quad c \in \mathbb{R}$$

Body 2 a 3 se nemusí podařit (např. integrál nebo inverze se nedají vyjádřit v oboru element. funkcí).

Příklad 6.1: najděte maximální řešení Cauchyho úlohy

$$y' = -3y, \quad y(0) = -1$$

Řešení:

Oblast ex. a jednozn. $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (ověřili jsme spojitost pravé strany a spojitost její p. der. dle y).

Konstantní řešení $y = 0$ nevyhovuje počáteční podmínce. Pro $y \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -3y \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int -3 dx \\ \ln |y| &= -3x + c \\ |y| &= e^{-3x+c} = e^{-3x} e^c = k e^{-3x}, \quad k > 0 \\ y &= \pm k e^{-3x}, \quad k > 0 \end{aligned}$$

Obecné řešení rovnice (se zahrnutím konst. řeš.): $y = k e^{-3x}$, $k \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

Řešení C.ú.: $-1 = y(0) = k e^0 = k \Rightarrow y = -e^{-3x}$, $x \in \mathbb{R}$

Příklad 6.2: najděte maximální řešení Cauchyho úloh

(a) $y' = (x^2 + 1)y, \quad y(-3) = 2$

(b) $y' = 2(x + 1)\sqrt{y}, \quad y(0) = 4$

(c) $y' = 2(x - 3)\sqrt{y + 1}, \quad y(0) = \frac{21}{4}$

(d) $y' = \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + 5}}, \quad y(2) = 0, \text{ resp. } y(2) = 1$

(e) $y' = y^2 + 1, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0$

Řešení:

(a) $f(x, y) = (x^2 + 1)y$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x^2 + 1)$ jsou spoj. v $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Konstantní řešení $y = 0$ nevyhovuje počáteční podmínce. Pro $y \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (x^2 + 1)y \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int x^2 + 1 dx \\ \ln |y| &= \frac{x^3}{3} + x + c \\ |y| &= e^{\frac{x^3}{3} + x + c} = e^{\frac{x^3}{3} + x} e^c = k e^{\frac{x^3}{3} + x}, \quad k > 0 \\ y &= \pm k e^{\frac{x^3}{3} + x}, \quad k > 0 \end{aligned}$$

Obecné řešení rovnice (se zahrnutím konst. řeš.): $y = k e^{\frac{x^3}{3} + x}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}$

Max. řešení C.ú.: $2 = y(-3) = k e^{\frac{(-3)^3}{3} - 3} = k e^{-12} \Rightarrow k = 2 e^{12} \Rightarrow y = 2 e^{12} e^{\frac{x^3}{3} + x}, \quad x \in \mathbb{R}$

(b)

$$\left. \begin{aligned} f(x, y) &= 2(x + 1)\sqrt{y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x+1}{\sqrt{y}} \end{aligned} \right\} \text{ spoj. v } G = \mathbb{R} \times (0, \infty)$$

Konstantní řešení $y = 0$ nevyhovuje počáteční podmínce (navíc neleží v G , takže bychom ani neměli zaručenu jednoznačnost řešení). Pro $y > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2(x + 1)\sqrt{y} \\ \int \frac{1}{2\sqrt{y}} dy &= \int x + 1 dx \\ \sqrt{y} &= \frac{x^2}{2} + x + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ \text{Obecné řešení rovnice: } y &= \left(\frac{x^2}{2} + x + c \right)^2, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Řešení C.ú.: $4 = y(0) = c^2 \Rightarrow c = \pm 2$, ale řešení existuje jen jedno

– konstantu tedy určíme z implicitního tvaru: $\sqrt{4} = 0 + c \Rightarrow c = 2$

interval max. řešení: musí platit $\frac{x^2}{2} + x + 2 > 0$ – platí pro všechna x ($D = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 < 0$)

max. řešení C.ú. je tedy $y = \left(\frac{x^2}{2} + x + 2\right)^2$, $x \in R$

Graf řešení je vyznačen černě na obrázku 1.

Poznámka: pro hodnotu konstanty $c = -2$ taky dostaneme řešení, ale pro jiné počáteční podmínky a ne na celém R , viz modrá křivka na obrázku 1: plnou čarou je vyznačen graf funkce $y = \left(\frac{x^2}{2} + x - 2\right)^2$ na intervalech $(-\infty, -1 - \sqrt{5})$ a $(-1 + \sqrt{5}, \infty)$, kde je řešením dané rovnice, a čárkovaně graf této funkce na intervalu $(-1 - \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5})$, kde ovšem NENÍ řešením dané rovnice – to plyne jednak z implicitního tvaru řešení, jednak se lze přesvědčit dosazením do dané rovnice (a mít přitom na paměti, že $\sqrt{x^2} = |x|$). Modře je vyznačeno i konstantní řešení $y = 0$.

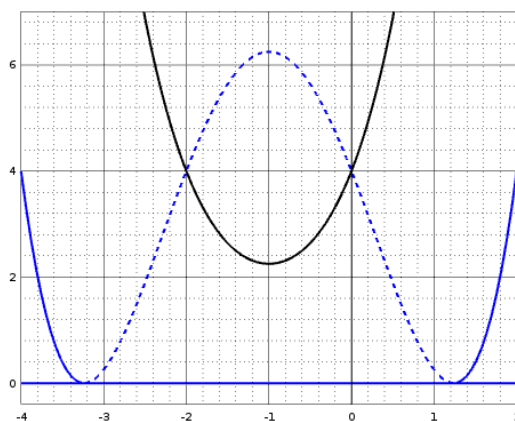


Figure 1: Příklad 6.2 (b)

(c)

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y) = 2(x-3)\sqrt{y+1} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x-3}{\sqrt{y+1}} \end{array} \right\} \text{ spoj. v } G = R \times (-1, \infty)$$

Konstantní řešení $y = -1$ nevyhovuje počáteční podmínce (navíc neleží v G , takže bychom ani neměli zaručenu jednoznačnost řešení). Pro $y > -1$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2(x-3)\sqrt{y+1} \\ \int \frac{1}{2\sqrt{y+1}} dy &= \int x-3 dx \\ \sqrt{y+1} &= \frac{(x-3)^2}{2} + c, \quad c \in R \\ \text{Obecné řešení rovnice: } y &= \left(\frac{(x-3)^2}{2} + c\right)^2 - 1, \quad c \in R \end{aligned}$$

Řešení C.ú.: konstantu určíme z implicitního tvaru: $\sqrt{\frac{21}{4} + 1} = \frac{(-3)^2}{2} + c \Rightarrow c = \sqrt{\frac{25}{4}} - \frac{9}{2} = -2$

interval max. řešení: musí platit $\frac{(x-3)^2}{2} - 2 > 0 \iff x^2 - 6x + 5 > 0$, kořeny jsou $x = 1$ a $x = 5$,

nerovnost platí v int. $I_1 = (-\infty, 1)$ a $I_2 = (5, \infty)$, $x_0 \in I_1$

max. řešení C.ú. je tedy $y = \left(\frac{(x-3)^2}{2} - 2\right)^2 - 1$, $x \in (-\infty, 1)$

Pozn.: kdyby počáteční podmínka byla $y(6) = \frac{21}{4}$, max. řeš. takové C.ú. by sice představovala stejná funkce, ale na jiném intervalu: $y = \left(\frac{(x-3)^2}{2} - 2\right)^2 - 1$, $x \in (5, \infty)$. Na intervalu $(1, 5)$ tato funkce není řešením rovnice (na obrázku 2 je to vyznačeno čárkovaně).

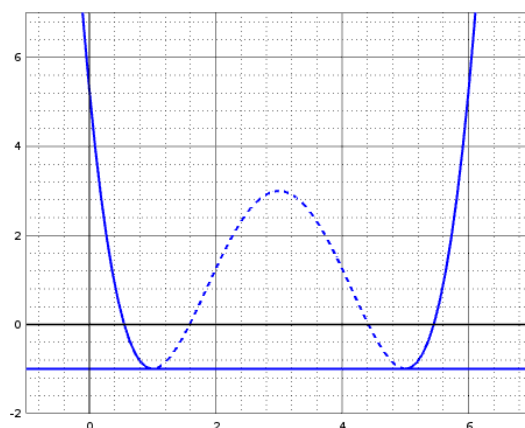


Figure 2: Příklad 6.2 (c)

(d)

$$\left. \begin{aligned} f(x, y) &= \frac{x y^2}{\sqrt{x^2 + 5}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x 2y}{\sqrt{x^2 + 5}} \end{aligned} \right\} \text{ spoj. v } G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Konstantní řešení $y = 0$ vyhovuje první C.ú. s počáteční podmínkou $y(2) = 0$, takže představuje její řešení. Řešení druhé C.ú. úlohy s počáteční podmínkou $y(2) = 1$ musíme hledat dál. Pro $y \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{x y^2}{\sqrt{x^2 + 5}} \\ \int \frac{1}{y^2} dy &= \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} dx \\ -\frac{1}{y} &= \sqrt{x^2 + 5} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{Obecné řešení rovnice: } y = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 5} + c}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Řešení C.ú.: konstantu určíme z implicitního tvaru: $c = -\frac{1}{y_0} - \sqrt{x_0^2 + 5} = -\frac{1}{1} - \sqrt{2^2 + 5} = -4$

interval max. řešení: musí platit $y \neq 0$, tj. integrální křivka musí celá ležet buď v horní, nebo v dolní polorovině. Jelikož $y(2) = 1 > 0$, musí ležet v horní polorovině, tj. $y > 0$:

$$\frac{-1}{\sqrt{x^2 + 5} - 4} > 0 \iff \sqrt{x^2 + 5} - 4 < 0 \iff \sqrt{x^2 + 5} < 4 \iff x^2 + 5 < 16 \iff |x| < \sqrt{11}$$

max. řešení C.ú. je tedy $y = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 5} - 4}$, $x \in (-\sqrt{11}, \sqrt{11})$.

Na obrázku 3 je graf funkce $y = \frac{-1}{\sqrt{x^2+5}-4}$. Ta je řešením dané rovnice na intervalu $(-\infty, -\sqrt{11})$, nebo na intervalu $(-\sqrt{11}, \sqrt{11})$, nebo na $(\sqrt{11}, \infty)$. Odpovídající interval (vždycky jen jeden) je určen počáteční podmínkou.

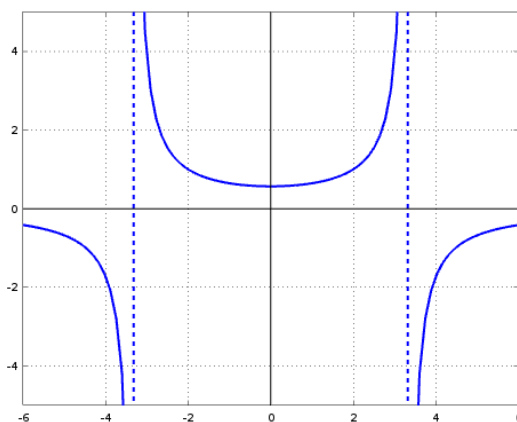


Figure 3: Příklad 6.2 (d)

(e) $f(x, y) = h(y) = y^2 + 1$ je spoj. a nenulová v $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, konstantní řešení neexistuje.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y^2 + 1 \\ \int \frac{1}{y^2 + 1} dy &= \int 1 dx \\ \operatorname{arctg} y &= x + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Obecné řešení rovnice: $y = \operatorname{tg}(x + c), \quad (x + c) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad c \in \mathbb{R}$

Řešení C.ú.: konstantu určíme z implicitního tvaru: $\operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2} + c \Rightarrow c = -\frac{\pi}{2}$

max. řešení C.ú. je tedy $y = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2}), \quad x \in (0, \pi)$.

Zkouška – u předchozích příkladů jsme ji pro stručnost vynechali, měli bychom ji však vždy provést:

- $y = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2})$ je spojitě diferencovatelná na $I = (0, \pi)$,
řešení nelze prodloužit na větší interval,
celá integrální křivka leží v oblasti existence a jednoznačnosti: $I \times \mathbb{R} \subset G$

- rovnice:

$$L = y' = (\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2}))' = \frac{1}{\cos^2(x - \frac{\pi}{2})}$$

$$P = y^2 + 1 = \operatorname{tg}^2(x - \frac{\pi}{2}) + 1 = \frac{\sin^2(x - \frac{\pi}{2})}{\cos^2(x - \frac{\pi}{2})} + 1 = \frac{\sin^2(x - \frac{\pi}{2})}{\cos^2(x - \frac{\pi}{2})} + \frac{\cos^2(x - \frac{\pi}{2})}{\cos^2(x - \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\cos^2(x - \frac{\pi}{2})}$$

$$L = P$$

- počáteční podmínka:

$$\frac{\pi}{2} \in I, \quad y(\frac{\pi}{2}) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) = \operatorname{tg} 0 = 0$$