

Matematika I – Domácí úkol – KS 2017

Upozornění: Výsledky bez zřetelného postupu vašeho výpočtu nebudou uznány. Pokud použijete vzorec, pak ho uveďte. Při výpočtu integrálů: U metody per-partes napište vzorec a uveďte volbu funkcí. Použijete-li substituci, pak ji konkrétně napište, a to včetně diferenciálů.

Úlohy 3f), 4d) a 6c) jsou označeny hvězdičkou. Nejsou v požadavcích zkoušky Beta, pro tento domácí úkol jsou nepovinné.

1. a) Definujte pojmy *lineární závislost*, *lineární nezávislost* skupiny vektorů $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$.
 - b) [spíše Alfa] Určete, pro které hodnoty parametru p tvoří vektory $\vec{u} = (1; 2; 2)$, $\vec{v} = (1; 1; p + 2)$ a $\vec{w} = (0; p; -2p)$ bázi prostoru $V(\mathbb{E}_3)$.
 - c) Zvolte $p = 1$. Pokud lze, vyjádřete vektor $\vec{a} = (4; 6; 12)$ pomocí vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.
Na základě výsledku popište vzájemnou polohu těchto čtyř vektorů.
2. a) Definujte pojem *inverzní matice* k matici A . Uveďte nějakou nutnou a postačující podmínku pro existenci inverzní matice.
 - b) Existuje inverzní matice k matici $A = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \\ 2, & 0, & -2 \\ 0, & 2, & 3 \end{pmatrix}$? Odpověď zdůvodněte!
V kladném případě ji vypočítejte a ověřte správnost výsledku.
 - c) Vypočítejte, obecně i číselně, matici X , která je řešením rovnice $X \cdot A = A^T$.
3. a) Vypočítejte derivace 1. řádu daných funkcí:

$$g(x) = \left(\frac{3}{x} - \frac{x^3}{2}\right) \cdot e^{4x}, \quad h(x) = \ln(\cos(\pi - x^2)).$$
 - b) Určete definiční obor $D(f)$ funkce $f(x) = \sqrt{2x + 8} - x$. Najděte průsečíky grafu se souřadnicovými osami. Vypočítejte derivaci $f'(x)$ a určete $D(f')$.
 - c) Napište rovnici tečny a rovnici normály ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0 = -2$. Napište diferenciál funkce f v bodě x_0 .
 - d) Vypočítejte druhou derivaci $f''(x)$ a její hodnotu $f''(-2)$. Napište Taylorův polynom $T_2(x)$ stupně 2 o středu $x_0 = -2$ zadané funkce f . Pomocí $T_2(x)$ určete přibližně hodnotu $f(-3/2)$.
 - e) Popište chování dané funkce v okolí bodu $x_0 = -2$, tj. rostoucí nebo klesající a jak rychle (odhad sklonu tečny). Načrtněte tečnu z úlohy c) a **tvar** grafu funkce f v okolí bodu $[x_0, f(x_0)]$.
 - f) [Alfa*] Napište Lagrangeův tvar zbytku $R_3(x)$. Odhadněte velikost chyby přibližného výpočtu hodnoty $f(-3/2)$ pomocí $T_2(x)$ z úlohy c).
4. Dána funkce $f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$.
 - a) Určete definiční obor $D(f)$. Vypočítejte limity v jeho krajních bodech.
 - b) Určete intervaly monotónie (funkce rostoucí, klesající) a lokální extrémy.
 - c) Určete intervaly, na nichž je daná funkce konvexní, resp. konkávní. Vyšetřete inflexní body.
 - d) [Alfa*] Vyšetřete asymptoty dané funkce.
 - e) Určete průsečíky grafu funkce f s osou x . Načrtněte graf zadané funkce.
5. a) Vypočítejte integrál $\int \sin \varphi \cos^6 \varphi \, d\varphi$, uveďte interval(y) existence.
 - b) Vypočítejte integrál $\int_0^1 (2x - 3) e^x \, dx$. Hodnotu výsledného výrazu odhadněte celým číslem. Zdůvodněte znaménko výsledku.
6. Je dána funkce $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$.
 - a) Vypočítejte $\int f(x) \, dx$, uveďte interval(y) existence.
 - b) Vypočítejte určitý integrál $\int_0^2 f(x) \, dx$.
Určete obsah obrazce, který je pro $x \in \langle 0, 2 \rangle$ ohraničen osou x a grafem funkce f .
 - c) [Alfa*] Vypočítejte nevlastní integrál $\int_0^3 f(x) \, dx$. Rozhodněte, zda konverguje.